Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА

А. П. Гремяченский

(Ростов-на-Дону)

В докторской диссертации А. М. Ляпунова *Общая задача об устойчивости движения*, в примечании, стр. 222, изд. 1935 г., имеется следующая теорема.

Все решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dX}{dt} = XP(t) \tag{1}$$

матрица которых $P(t)$ тождественно удовлетворяет соотношению

$$P(t)B + BP(-t) = 0 \tag{2}$$

где B—постоянная матрица, являются периодическими, если характеристические числа матрицы B все различны, их абсолютные величины также различны и нуль не является характеристическим числом. Интегрирование такой системы выполняется при помощи n квадратур.

Теорема, однако, остается справедливой и в том случае, когда матрица B имеет кратные характеристические числа при условии, что каждому из них соответствует единственный элементарный делитель Вейерштрасса.

Для доказательства этого приведем матрицу B к каноническому виду

$$B = GEG^{-1} \tag{3}$$

при помощи несингулярной матрицы G. По условиям теоремы матрица

$$E = \{J_{\rho_1}(\mu_1), \ \ldots, \ J_{\rho_k}(\mu_k)\} \qquad (\rho_1 + \cdots + \rho_n = n)$$

где

$$J_{\rho_\nu}(\mu) = \begin{pmatrix} \mu_\nu & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \mu_\nu & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \mu_\nu & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \mu_\nu \end{pmatrix} \qquad (\mu_h \neq \mu_\nu, \text{ если } h \neq \nu)$$

Подставляя (3) в (2), имеем

$$P(t)GEG^{-1} + GEG^{-1}P(t)G = 0$$

или

$$G^{-1}P(t)GE + EG^{-1}P(t)G = 0$$

т. е.

$$Q(t)E + EQ(-t) = 0 \tag{4}$$

где матрица

$$Q(t) = G^{-1}P(t)G \tag{5}$$

периодическая вследствие постоянства G.

Приравнивая нулю элементы матрицы (4), получим четыре вида функциональных соотношений между элементами $q_{s\sigma}(t)$ матрицы $Q(t)$:

$$\begin{aligned}
&\mu_\nu q_{s\sigma}(t) + \mu_j q_{s\sigma}(-t) = 0 && (s = s_{j=1}+1,\ \sigma = s_\nu)\\
&\mu_\nu q_{s\sigma}(t) + \mu_j q_{s\sigma}(-t) + q_{s-1,\sigma}(-t) = 0 && (s_{j-1}+1 < s \leqslant s_j,\ \sigma = s_\nu)\\
&\mu_\nu q_{s\sigma}(t) + \mu_j q_{s\sigma}(-t) + q_{s,\sigma+1}(t) = 0 && (s = s_{j-1}+1,\ s_{\nu-1}+1 \leqslant \sigma < s_\nu)\\
&\mu_\nu q_{s\sigma}(t) + \mu_j q_{s\sigma}(-t) + q_{s,\sigma+1}(t) + \\
&\qquad\qquad + q_{s-1,\sigma}(-t) = 0 && (s_{j-1}+1 < s \leqslant s_j,\ s_{\nu-1}+1 \leqslant \sigma < s_\nu)
\end{aligned}$$

$$(s_\nu = \rho_1 + \cdots + \rho_\nu)$$

Рассматривая последовательно эти соотношения при $j \neq \nu$, убедимся в том, что матрица псевдодиагональная.

При $j = \nu$ те же соотношения показывают, что в каждом из примыкающих к диагонали квадратов матрицы все диагональные элементы и элементы, расположенные по каждой из прямых, параллельных диагонали, слева от нее, равны между собой и являются нечетными функциями, остальные же элементы—нули Таким образом,

$$Q(t) = \{K_{\rho_1}(t), \ldots K_{\rho_k}(t)\}$$

где

$$K_{\rho_r} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \ldots & 0 \\ q_2 & q_1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{\rho_r} & q_{\rho_r - 1} & \ldots & q_1 \end{pmatrix}$$

и все функции q_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$—периодические нечетные.

Подставляя $P(t) = GQ(t)G^{-1}$ согласно (5) в (1), получим

$$\frac{dX}{dt} = XGQ(t)G^{-1}, \quad \text{или} \quad \frac{dY}{dt} = YQ(t) \tag{6}$$

где

$$Y = XG \tag{7}$$

Рассмотрим

$$R(t) = \int_0^t Q(t)\,dt$$

Непосредственной проверкой можно установить, что матрицы $R(t)$ и $Q(t)$ коммутируют, следовательно, нормальная при $t=0$ интегральная матрица системы (6) будет $Y = \exp R(t)$, а общий интеграл системы (1) представится в виде

$$X = Ce^{R(t)}G^{-1}$$

где C—произвольный вектор.

Таким образом, решение системы (1) приводится к n квадратурам, необходимым для отыскания матрицы $R(t)$, все элементы которой получаются в результате интегрирования нечетных периодических функций и сами являются поэтому периодическими, что полностью доказывает теорему.

Поступила в редакцию
9 1 1946

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
2. Лаппо-Данилевский А. И. Теория функций от матриц и системы линейных дифференциальных уравнений. ОНТИ. 1934.