Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В СЛУЧАЕ, КОГДА УРАВНЕНИЯ И ИХ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ИЗВЕСТНЫ ЛИШЬ ПРИБЛИЖЕННО

И. М. Волк
(Свердловск)

1. Пусть уравнения

$$\frac{dx_\nu}{dt} = \mu^{k_\nu} X_\nu(x_1, \ldots, x_n; t) \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

представляют собой приближенное выражение некоторой основной системы дифференциальных уравнений движения.

Систему (1.1) будем называть упрощенной. Упрощенная система является приближенной в том смысле, что правая часть каждого из уравнений (1.1) представляет член наинизшего порядка относительно μ в разложении правой части соответствующего уравнения основной системы в ряд по целым степеням этого параметра.

Относительно правых частей уравнений основной системы предполагается, что они являются аналитическими функциями переменных $x_1, \ldots, x_n$ и мероморфными функциями параметра μ в какой-либо области $G(a_i \leqslant x_i \leqslant b_i)$ и $|\mu| \leqslant \rho$, преичм a_i, b_i, ρ не зависят от t, и что если среди них имеются явно зависящие от t, то они являются периодическими функциями относительно этой независимой переменной с не зависящим от μ периодом T. Относительно основной системы предполагается еще, что она допускает периодическое решение, приближенным выражением которого является периодическое решение упрощенной системы, приближенным в том смысле, что разность амплитуд, а также разность частот периодических решений той и другой системы при достаточно малых $|\mu|$ сколь угодно малы[1].

При указанных допущениях ставится задача: *зная дифференциальные уравнения упрощенной системы и периодическое решение их, исследовать устойчивость по Ляпунову соответствующего точного периодического решения точных дифференциальных уравнений основной системы.*

2. Периодическое решение упрощенной системы обозначим через $x_\nu^\circ(\mu, \omega t)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, где ω — частота (ω может зависеть от μ, причем мероморфно; в случае неавтономности основной системы $\omega = 2\pi / mT$, где m — какое-либо целое число) и будем предполагать, что это решение при всех вещественных значениях ωt и достаточно малых $|\mu|$ не выходит из области G. Точное периодическое решение точных урав-

---

[1] Критерии существования таких периодических решений у основной системы установлены в работах автора[1].

пений основной системы обозначим через $x_\nu^*(\mu, \tau)$, где $\tau = \omega[1 + \theta(\mu)]t$ (коэффициент при t — частота). Если бы точные дифференциальные уравнения основной системы и величины $x_\nu^*(\mu, \tau)$, $\theta(\mu)$ были известны, то, сделав в этих уравнениях подстановку

$$y_\nu = x_\nu - x_\nu^*(\mu, \tau), \qquad \tau = \omega(1 + \theta)t \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

где $y_1, \ldots, y_n, \tau$ — новые переменные, мы получили бы уравнения соответствующего возмущенного движения; отбросив в разложениях правых частей этих уравнений по целым положительным степеням величин $y_1, \ldots, y_n$ члены выше первого порядка, мы получили бы затем соответствующие уравнения в вариациях или по Ляпунову уравнения возмущенного движения в первом приближении.

Из принятых допущений относительно правых частей уравнений основной системы и исследуемого периодического решения последней следует, что уравнения в вариациях имеют вид:

$$\frac{dy_\nu}{d\tau} = \mu^{\varkappa_\nu}[(p_{\nu 1} + \mu q_{\nu 1})y_1 + \cdots + (p_{\nu n} + \mu q_{\nu n})y_n] \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \qquad (2.1)$$

Здесь

$$\varkappa_\nu = k_\nu + N, \qquad p_{\nu\sigma} = \omega_0\left(\frac{\partial X_\nu}{\partial x_\sigma}\right)_*$$

причем $\omega_0\mu^N$ — член наинизшего порядка N в разложении величины $1/\omega$ в ряд по целым степеням μ, символ $(\ldots)_*$ означает подстановку $x_i = x_i^\circ(0, \tau)$, а $q_{\nu\sigma}$ суть некоторые (вообще говоря, неизвестные) функции от μ и τ, непрерывные в какой-либо полосе[1] $d(\mu, \tau)$, периодические относительно τ. Если уравнения упрощенной системы и их периодическое решение заданы, то все $\varkappa_\nu$ и $p_{\nu\sigma}$ известны, а следовательно, заданной является и система уравнений

$$\frac{d\zeta_\nu}{d\tau} = \mu^{\varkappa_\nu}(p_{\nu 1}\zeta_2 + \ldots + p_\nu\zeta_n) \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

которую попрежнему [1] будем называть *определяющей*.

Укажем случаи, когда вопрос об устойчивости или неустойчивости решений $x_\nu^*(\mu, \tau)$ основной системы решается по определяющей системе:

а) *если при некотором численно достаточно малом $\mu = \mu'$ все характеристические показатели определяющей системы имеют отрицательные вещественные части, то при $\mu = \mu'$ периодическое решение основной системы устойчиво, притом асимптотически;*

б) *если при некотором численно достаточно малом $\mu = \mu'$ среди характеристических показателей определяющей системы имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то при $\mu = \mu'$ периодическое решение основной системы неустойчиво;*

в) *если основная система допускает периодическое решение*

$$x_\nu^*(\mu; h_1, \ldots, h_k; t, \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

---

[1] Область изменения μ и τ принимается в виде бесконечной прямоугольной полосы, параллельной оси τ плоскости $\mu\tau$, и обязательно включающей эту ось.

зависящее от k произвольных постоянных $h_1, \ldots, h_k$, не содержащихся в периоде этого решения, и если, кроме того, при $h_1 = \ldots = h_k = 0$ и некотором $\mu = \mu'$ среди характеристических показателей определяющей системы имеются $n-k$ с отрицательными вещественными частями, то движение $x_\nu^*(\mu'; 0, \ldots, 0; t)$ и движения $x_\nu^*(\mu'; h_1; \ldots; h_k; t)$ при достаточно малых $|h_1|, \ldots, |h_k|, |\mu'|$ устойчивы и всякое движение, достаточно близкое к движению $x_\nu^*(\mu_*; 0, \ldots, 0; t)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, при неограниченном возрастании t неограниченно приближается к одному из периодических движений $x_\nu^*(\mu^+; h_1, \ldots, h_k; t)$.

3. Учитывая теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости по первому приближению[2], а также соответствующую теорему Малкина[3] (для случая (b)), заключаем, что для доказательства сформулированных критериев достаточно доказать лишь следующее.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — все те из характеристических показателей определяющей системы, которые при $\mu = \mu'$ в отрезке изменения μ, где периодическое решение основной системы существует, имеют отличные от нуля вещественные части; тогда уравнения в вариациях (2.1) имеют по меньшей мере m характеристических показателей, например, $\rho_1, \ldots, \rho_m$, также обладающих при $\mu = \mu'$ отличными от нуля вещественными частями, если только $|\mu'|$ достаточно мало, причем для каждой из величин λ_i $(i = 1, \ldots, m)$ можно привести в соответствие величину ρ_i такую, чтобы при $\mu = \mu'$ вещественные части величин λ_i и ρ_i были одинакового знака.

Докажем это. Сделаем подстановку $\vartheta = \mu^k \tau$, где k равно либо наименьшему из чисел $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ в случае, когда среди этих чисел имеются отрицательные, либо $k = 0$ в противном случае. Определяющая система и уравнения в вариациях соответственно примут вид:

$$\frac{d\zeta_\nu}{d\vartheta} = \mu^{\varkappa_\nu + k} [(p_{\nu 1})^* \zeta_1 + \cdots + [(p_{\nu n})^* \zeta_n] \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

$$\frac{dy_\nu}{d\vartheta} = \mu^{\varkappa_\nu + k} \{[(p_{\nu 1})^* + \mu (q_{\nu 1})^*] y_1 + \cdots + [(p_{\nu_0})^* + \mu (q_{\nu n})^*] y_n\} \tag{3.2}$$

где среди чисел $\varkappa_\nu + k$ и $-k$ нет отрицательных, а символ $(\ldots)^*$ означает подстановку $\tau = \mu^{-k} \vartheta$.

Характеристические показатели $l_1, \ldots, l_n$ системы (3.1) и характеристические показатели $r_1, \ldots, r_n$ системы (3.2) связаны соответственно с величинами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $\rho_1, \ldots, \rho_n$ соотношениями

$$\lambda_\nu = \mu^k l_\nu, \qquad \rho_\nu = \mu^k r_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, m) \tag{3.3}$$

Заметим, что согласно теореме Ляпунова относительно характеристичного уравнения[3] коэффициенты характеристичного уравнения

$$\alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + \cdots + A_{n-1} \alpha + A_n = 0$$

системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_\nu}{d\vartheta} = \mu^{\varkappa_\nu + k} \{[(p_{\nu 1})^* + c (q_{\nu 1})^*] z_1 + \cdots + [(p_{\nu n})^* + c (q_{\nu n})^* z_n\}^* \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

[символ $\{f\}^*$ означает замену $f(\mu, \mu^{-k}\vartheta)$ на $f(c, \mu^{-k}\vartheta)$] в некоторой квадратной области L изменения μ и c с центром в точке $\mu = c = 0$ суть голоморфные функции c.

Отсюда согласно известному свойству алгебраических функций следует, что корни характеристичного уравнения системы (3.4) при всех значениях μ и c в области L разлагаются в ряды по целым положительным степеням c или $c^{1/M}$, где M — некоторое целое положительное число. Но при $c = 0$ корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ характеристичного уравнения системы (3.4) обращаются в корни $\beta_1, \ldots, \beta_n$ характеристичного уравнения системы (3.1); следовательно, между величинами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и величинами $\beta_1, \ldots, \beta_n$ существует зависимость

$$\alpha_\nu - \beta_\nu = \sum_{r=1}^{\infty} a_{\nu r}(\mu)\, c^{r/M} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

Здесь правые части представляют собой ряды, сходящиеся при всех μ и c в области L, и обращаются при $c = 0$ в нуль для любых μ (и для $\mu = 0$) в этой области.

Так как при $c = \mu$ величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ обращаются в корни $\delta_1, \ldots, \delta_n$ характеристеристичного уравнения системы (3.2), то величины $\delta_1, \ldots, \delta_n$ связаны с $\beta_1, \ldots, \beta_n$ соотношениями

$$\delta_\nu - \beta_\nu = \sum_{r=1}^{\infty} a_{\nu r}(\mu)\, \mu^{r/M} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \qquad (3.5)$$

где правые части при любых достаточно малых $|\mu|$ сходятся и обращаются в нуль при $\mu = 0$.

Учитывая, что корни характеристичного уравнения любой системы всегда отличны от нуля (и при $\mu = 0$) и что вещественные части характеристических показателей суть отношения натуральных логарифмов от модулей соответствующих корней характеристичного уравнения к периоду коэффициентов упомянутой системы, на основании вида соотношений (3.5) заключаем, что при всех достаточно малых $|\mu|$ каждой величине l_i с отличной от нуля вещественной частью будет соответствовать величина r_i, которая также имеет отличную от нуля вещественную часть, причем вещественные части l_i и r_i будут одинакового знака. Отсюда, учитывая соотношения (3.3), устанавливаем, наконец, что при условиях доказываемого предложения аналогичное будет иметь место и в отношении величин λ_i и ρ_i $(i = 1, \ldots, m)$ при $\mu = \mu'$, если только $|\mu'|$ достаточно мало.

Поступила в редакцию
25 X 1947

Уральский индустриальный
институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Волк И. М. ДАН. 1946. Т. LI, № 6; ПММ. 1946. Т. X. Вып. 5—6; ПММ. 1947. Т. XI, Вып. 4; ПММ. Т. XII. Вып. 1.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
3. Малкин И. Г. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 4.