Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНЫХ СИСТЕМ

Н. Г. Четаев
(Москва)

В сочинении *Общая задача об устойчивости движений* [1] в примечании к n° 12 и 13 Ляпунов высказал важное предложение об устойчивости по первому приближению для неправильных систем. Ниже доказательство этого утверждения и предложения о неустойчивости для таких систем [2] проводится прямым методом.

1. Задана система уравнений возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где коэффициенты первого приближения p_{sr} и коэффициенты голоморфных относительно $x_1, \ldots, x_n$ функций X_s представляют вещественные, непрерывные, ограниченные функции времени t. Функции X_s начинаются в своих разложениях по переменным $x_1, \ldots, x_n$ с членов не ниже второго измерения.

Рассмотрим нормальную систему вещественных независимых решений для уравнений первого приближения

$$x_{1r}, \ldots, x_{nr} \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

Пусть $\Delta = \| x_{sr} \|$ обозначает определитель, составленный из функций этой нормальной системы, а Δ_{sr} обозначает минор определителя Δ, отвечающий элементу x_{sr}. Пусть λ_r есть характеристическое число r-го решения нормальной системы.

Если система дифференциальных уравнений первого приближения не есть правильная, то, обозначая сумму всех характеристичных чисел нормальной системы ее решений через

$$S = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$$

а через μ характеристичное число функции $\frac{1}{\Delta}$, будем иметь

$$S + \mu = -\sigma$$

где σ — некоторое положительное число.

В этом случае характеристичное число функций

$$y_{sr} = \frac{\Delta_{sr}}{\Delta}$$

будет не меньше $-\lambda_r - \sigma$. Мы будем для определенности предполагать, что функции y_{sr} удовлетворяют условию

$$\sum_s y_{sr}^2(0) = 1$$

2. *Теорема Ляпунова.* Если система дифференциальных уравнений первого приближения не есть правильная и если все ее характеристичные числа больше σ, то невозмущенное движение устойчиво.

Доказательство. Введем новые переменные

$$z_r = \sum_s x_s y_{sr} e^{-(\lambda_r - \varepsilon)t}$$

где ε обозначает некоторое положительное число, меньше любого из характеристичных чисел λ_r и большее σ. Если наименьшее из характеристичных чисел обозначить через λ_1, то

$$\lambda_1 > \varepsilon > \sigma$$

Формулами обратного преобразования будут

$$x_\alpha = \sum_r z_r x_{\alpha r} e^{(\lambda_r - \varepsilon)t}$$

Коэффициенты стоящих в правых частях линейных форм от переменных z_r будут исчезающими функциями времени с характеристичными числами не меньше ε. Из последних формул следует

$$\text{хар. число } \{x_\alpha\} \geqslant \text{хар. число } \{z_r\} + \varepsilon$$

Здесь символ $\{x_\alpha\}$ обозначает систему функций x_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$.

Рассмотрим определенно положительную квадратичную форму переменных $z_1, \ldots, z_n$:

$$2V = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

Полная производная по времени t в силу заданных дифференциальных уравнений возмущенного движения есть

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_r (\lambda_r - \varepsilon) z_r^2 + R$$

где

$$R = \sum_{rs} z_r X_s y_{sr} e^{-(\lambda_r - \varepsilon)t}$$

Функция $R = R(t, z_1, \ldots, z_n)$ как функция новых переменных имеет в своем разложении по целым положительным степеням переменных $z_1, \ldots, z_n$ коэффициентами некоторые исчезающие функции t с характеристичными числами не меньше положительного числа $\varepsilon - \sigma$.

Для всякого положительного η, сколь бы мало оно ни было, в силу свойств функции $R(t, z_1, \ldots, z_n)$ как функции с исчезающими коэффициентами и начинающейся в своем разложении с членов по крайней мере третьего измерения относительно z_s, можно найти область достаточно малых численных значений $z_1, \ldots, z_n$ и такое число T, чтобы внутри этой области и для всех значений t, больших T, имело место неравенство

$$|R(t, z_1, \ldots, z_n)| < \eta (z_1^2 + \cdots + z_n^2)$$

Если η выбрано согласно неравенству $\lambda_1 - \varepsilon > \eta$ при указанных условиях, во все время $t > T$, пока значения переменных $z_1, \ldots, z_n$ не покинули указанную область, имеем

$$\frac{d}{dt}\sum_r z_r^2 \leqslant -2(\lambda_1 - \varepsilon - \eta)\sum_r z_r^2$$

Следовательно, если начальные значения z_s° выбраны так, что при изменении t от t_0 до T значения переменных z_r находятся в указанной области, то при любом $t > t_0$ будем иметь

$$\sum_r z_r^2 \leqslant Ce^{-2(\lambda-\varepsilon-\eta)t}$$

Отсюда

$$\text{хар. число } \{z_r\} \geqslant \lambda_1 - \varepsilon - \eta$$

и, следовательно,

$$\text{хар. число } \{x_s\} \geqslant \lambda_1 - \eta > 0$$

Этим доказывается устойчивость невозмущенного движения по отношению к переменным $x_1, \ldots, x_n$ и то, что всякое достаточно близкое возмущенное движение стремится к нему асимптотически.

3. *Теорема.* Если система дифференциальных уравнений первого приближения не есть правильная и если ее наименьшее характеристичное число меньше $-\sigma$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Доказательство. Наименьшее характеристичное число уравнений первого приближения обозначим через λ_1; по условию теоремы

$$\lambda_1 + \sigma < 0$$

Рассмотрим переменные

$$z_r = \sum x_s y_{sr} e^{-(\lambda_r+\sigma)t}$$

Отсюда

$$\text{хар. число } \{z_r\} \geqslant \text{хар. число } \{x_s\}$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dz_1}{dt} = -(\lambda_1 + \sigma) z_1 + \sum_s X_s y_{s1} e^{-(\lambda_1+\sigma)t}$$

Доказательство теоремы будем вести от противного. Допустим, что невозмущенное движение при этих условиях устойчиво. Тогда для заданного произвольно малого числа A будет существовать такое положительное число a, что при начальных возмущениях $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$, удовлетворяющих неравенству

$$x_1^{\circ 2} + \cdots + x_n^{\circ 2} \leqslant a$$

для всякого t, большего t_0, будет выполняться неравенство

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 < A$$

Из дифференциального уравнения для z_1 следует

$$z_1 = ce^{-(\lambda_1+\sigma)t} + e^{-(\lambda_1+\sigma)t}\int_\infty^t \sum_s X_s y_{s1}\, dt$$

где c — некоторая постоянная.

Если невозмущенное движение устойчиво и A выбрано меньше радиуса области голоморфности функций X_s, то функции X_s при выборе начальных возмущений согласно неравенству

$$x_1^{\circ 2} + \cdots + x_s^{\circ 2} \leqslant a$$

будут ограниченными для всех значений $t > t_0$.

Характеристичное число системы функций y_{s1} не меньше $-(\lambda_1 + \sigma) > 0$ поэтому в интеграле пределы выбраны в согласии с известными теоремами Ляпунова о характеристичном числе интеграла. Если за начальный момент времени примем $t_0 = 0$, что не уменьшает общности, то будем иметь соотношение

$$\sum x_s^\circ y_{s1}(0) = c - \int_0^\infty \sum X_s y_{s1}\, dt$$

Отсюда видим по свойству голоморфных функций X_s, начинающихся в своем разложении по целым возрастающим степеням $x_1, \ldots, x_n$ с членов по меньшей мере второго порядка малости, и по свойству функций y_{s1}, исчезающих с положительным характеристичным числом, не меньшим $-(\lambda_1 + \sigma)$, что при численно достаточно малом A и при наибольшем значении a для заданного A левая часть последнего равенства будет величиной первого порядка, а интеграл величиной порядка не меньше второго и, следовательно, постоянная c будет отличной от нуля.

Обстоятельство это возможно также просто заметить, если в предыдущем равенстве переменные x_i выразить через $t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$ в предположении, что невозмущенное движение устойчиво; интеграл в этом случае будет начинаться с членов второго порядка относительно x_s° с ограниченными коэффициентами и, следовательно, при достаточно малом a найдутся такие значения x_s°, для которых c должно быть отличным от нуля.

Из формулы для z_1 выводим

$$\text{хар. число } z_1 = \lambda_1 + \sigma < 0$$

и, следовательно,

$$\text{хар. число } \{x_n\} \leqslant \lambda_1 + \sigma < 0$$

что противоречит предположению об устойчивости невозмущенного движения. А это обстоятельство и доказывает теорему.

Поступила в редакцию
5 V 1948

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
2. Четаев Н. Г. Теорема о неустойчивости для правильных систем. ПММ. 1944. Т. VIII.