Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА

Н. П. Еругин

(Ленинград)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0 \tag{1}$$

где $p(t) \geqslant 0$[1] — функция, периодическая с периодом ω.

Ляпунов показал, что если выполнено неравенство

$$\omega \int_0^\omega p\,dt \leqslant 4 \tag{2}$$

то уравнение (1) имеет общее ограниченное незатухающее решение.

Ниже приводится другое доказательство этого условия, которое позволяет получить более общее условие существования ограниченного незатухающего общего решения уравнения (1).

Будем предполагать $\omega = 1$; это не уменьшит общности задачи. Уравнению (1) соответствует система уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -px_1 \tag{3}$$

Пусть $f(t)$ и $\varphi(t)$ — два частных решения уравнения (1) при начальных условиях

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$$

Определяя их по Ляпунову способом последовательных приближений, имеем

$$\begin{gathered} f(t) = 1 + \varepsilon f_1(t) + \varepsilon^2 f_2(t) + \ldots \\ \varphi(t) = t + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t) + \ldots \end{gathered} \tag{4}$$

где

$$f_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t pf_{n-1}(t)\,dt, \qquad \varphi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p\varphi_{n-1}(t)\,dt \tag{5}$$

$$f_0(t) = 1, \qquad \varphi_0(t) = t \qquad \varepsilon = -1$$

Система функций (4) дает два линейно независимых решения $f(t)$, $f'(t)$ и $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ системы (3).

Характеристическое уравнение системы (3), соответствующее периоду $\omega = 1$, можно записать, как известно[1], в виде

$$\begin{vmatrix} f(1)-\rho & f'(1) \\ \varphi(1) & \varphi'(1)-\rho \end{vmatrix} = \rho^2 - [f(1)+\varphi'(1)]\rho + 1 = 0 \tag{6}$$

Пусть корни этого уравнения будут ρ_1 и ρ_2. Очевидно, что $\rho_1\rho_2 = 1$. Здесь могут быть два случая.

1. Корни ρ_1 и ρ_2 вещественные различные; тогда один из них по модулю больше единицы и другой меньше единицы.

2. Корни ρ_1 и ρ_2 комплексные или равные единице; тогда $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$. При исследовании устойчивости в смысле Ляпунова надо знать, какой из этих двух случаев имеет место.

По признаку Ляпунова, если p такое, что

$$\int_0^1 p\,dt \leqslant 4 \tag{7}$$

то мы имеем второй случай. Однако уже при постоянном $p > 4$ неравенство (6) не выполнено, хотя непосредственно видно, что в этом случае имеет место именно второй случай.

Рассмотрим подробнее условия, при которых будет первый или второй случай. Представив $f(1)$ и $\varphi'(1)$ в виде

$$f(1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k f_k(1), \qquad \varphi'(1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \varphi_k'(1)$$

---

[1] Если

$$X(t) = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}$$

матрица фундаментальных решений системы (3), то

$$X(t+1) = AX(t) \qquad (X(1) = A \text{ при } t = 0)$$

где A — постоянная матрица второго порядка. Уравнение

$$D(A-\lambda) = 0$$

где D — знак определителя, называется характеристическим уравнением системы (3).

Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_1$ — корни уравнения $D(A-\lambda) = 0$ и

$$A = S \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} S^{-1}$$

Тогда

$$X(t+n) = A^n X(t) = S \begin{vmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{vmatrix} S^{-1} X(t) \qquad (n \text{ — целое})$$

Если λ_1 и λ_2 комплексные и $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, то $X(t)$ ограниченное незатухающее. При $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ решение периодическое с периодом $\omega = 2$.

из уравнения (6) получим

$$2\rho = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) \pm \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1) \psi_k(1) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) + 4 \right) \right]^{1/2} \tag{8}$$

Здесь введено обозначение

$$\psi_k(t) = f_k(t) + \varphi_k'(t)$$

Заметим, что в силу $p \geqslant 0$ и $f_k(t) > 0$, $\varphi_k'(t) > 0$ имеем $\psi_k(t) > 0$ при $t > 0$.

Если теперь множители под знаком корня в выражении (7) будут одного знака, то имеет место первый случай, и если они разных знаков, то будет второй случай.

Предположим, что выполняются неравенства

$$\psi_k(1) - \psi_{k+1}(1) \geqslant 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{9}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) < 0 \tag{10}$$

так как этот ряд знакопеременный и первое слагаемое меньше нуля.

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \psi_k(1) + 4 > 0 \tag{11}$$

то имеет место второй случай.

Но неравенство (11) будет выполнено, если выполнено

$$-\psi_1(1) + 4 \geqslant 0 \quad \text{или} \quad \int_0^1 dt \int_0^t p\,dt + \int_0^1 tp\,dt \leqslant 4 \tag{12}$$

так как сумма отброшенных слагаемых в силу (9) только усиливает неравенство (12).

Отметим, что неравенство (12) равносильно неравенству Ляпунова (7). Действительно, интегрируя по частям, получим

$$\int_0^1 tp\,dt = \int_0^1 p\,dt - \int_0^1 dt \int_0^t p\,dt$$

и неравенство (12) переходит в неравенство (7).

Ляпунов показал, что для всех t и $p \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$t\,[f_{n-1}(t) + \varphi_{n-1}'(t)] \int_0^t p\,dt - 2n\,[f_n(t) + \varphi_n'(t)] > 0 \tag{13}$$

или в принятых выше обозначениях

$$t\psi_{n-1}(t) \int_0^t p\,dt - 2n\psi_n(t) > 0 \tag{14}$$

При $t=1$ имеем

$$\psi_{n-1}(1)\int_0^1 p\,dt-2n\psi_n(1)>0 \qquad (n=2,\,3,\,\ldots) \tag{15}$$

Таким образом, это неравенство выполнено всегда при $p\geqslant 0$.

Если (7) выполнено, то из (15) следует (9), поэтому из (7) или (12) следует (10) и (11) и имеет место случай второй.

Но неравенства (9) могут иметь место, когда неравенство (6) и не выполняется. В этом случае, если

$$-\psi_1(t)+\psi_2(t)+4\leqslant 0 \tag{16}$$

то и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(1)+4<0 \tag{17}$$

т. е. имеем случай первый, когда ограниченного общего решения нет. Если (16) не выполнено, но имеется неравенство

$$-\psi_1(1)+\psi_2(1)-\varphi_3(1)+4\geqslant 0 \tag{18}$$

то имеем случай второй.

Вообще в случае выполнения неравенств (9) при

$$\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^k\varphi_k(1)+4\geqslant 0 \tag{19}$$

имеет место второй случай и при

$$\sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\psi_k(1)+4\leqslant 0 \tag{20}$$

имеет место первый случай.

Покажем теперь, что неравенства (9) могут выполняться и тогда когда не выполняется условие (7). Покажем сначала, что если

$$f_n(t)-f_{n+1}(t)\geqslant 0,$$

то

$$f_k(t)-f_{k+1}(t)\geqslant 0 \qquad (k\geqslant n)$$

Действительно,

$$f_{n+1}(t)-f_{n+2}(t)=\int_0^t\int_0^t pf_n(t)\,dt\,dt-\int_0^t\int_0^t pf_{n+1}(t)\,dt\,dt=$$

$$=\int_0^t\int_0^t p\,[f_n(t)-f_{n+1}(t)]\,dt\,dt\geqslant 0$$

и утверждение доказано.

Так же доказывается, что если

$$\varphi_n'(t)-\varphi_{n+1}'(t)\geqslant 0,$$

то

$$\varphi_k'(t)-\varphi_{k+1}'(t)\geqslant 0 \qquad (k\geqslant n)$$

Отсюда следует, что если

$$f_n(t)-f_{n+1}(t)\geqslant 0, \qquad \varphi_n'(t)-\varphi_{n+1}'(t)\geqslant 0 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1) \tag{21}$$

то

$$\psi_k(t)-\psi_{k+1}(t)\geqslant 0, \qquad (k\geqslant n,\ 0\leqslant t\leqslant 1) \tag{22}$$

Таким образом, если имеют место неравенства (21), то имеют место и неравенства (9) при $k\geqslant n$.

Покажем теперь, что неравенства

$$f_1(t)-f_2(t)\geqslant 0, \quad \varphi_1'(t)-\varphi_2'(t)\geqslant 0 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1) \tag{23}$$

могут выполняться и тогда, когда не выполняется условие (7).

Возьмем постоянное p так, чтобы было $4<p\leqslant 10$. Тогда условие (7) не выполняется:

$$\int_0^1 p\,dt=p>4$$

Но

$$f_1(t)-f_2(t)=\varphi_1'(t)-\varphi_2(t)=\frac{p}{2}t^2\left(1-\frac{pt^2}{12}\right)>0 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1)$$

Если возьмем $p=a+\varphi(t)$, то при периодической функции $\varphi(t)$, достаточно малой, условие (7) также не будет выполняться, а неравенства (23) будут выполнены, а следовательно, получим и (9). Например, это будет при $p=10+\sin 2\pi t$.

Предположим теперь, что и условие (7), а следовательно, неравенства (12) и неравенства (23) не выполнены, но имеем или

$$\int_0^1 p\,dt\leqslant 6 \tag{24}$$

или

$$f_2(t)-f_3(t)\geqslant 0, \qquad \varphi_2'(t)-\varphi_3'(t)\geqslant 0 \tag{25}$$

Тогда согласно (14) в случае (24) и согласно (21), (22) в случае (25) имеем

$$\psi_n(t)-\psi_{n+1}(t)\geqslant 0 \qquad (n\geqslant 2) \tag{26}$$

Если теперь выполняется условие

$$-\psi_1(1)+\psi_2(1)\leqslant 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\psi_k(t)\leqslant 0 \tag{27}$$

то будет

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(1)<0$$

Тогда при условии (19) снова имеем случай второй, и когда (27) не выполняется ни при каком m, но имеем

$$-\psi_1(1)+\psi_2(1)-\psi_3(1)\geqslant 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^k\psi_k(t)\geqslant 0 \tag{28}$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\psi_k(1)>0$$

и неравенства (19) само собой выполнены. При этом, очевидно, имеем случай первый.

Если имеет место первое из неравенств (28), то ни одно из неравенств (27) не имеет места.

Если не выполняется (24) или (25), но имеет место

$$\int_0^1 p\,dt\leqslant 8 \qquad \text{или} \qquad f_3(t)-f_4(t)\geqslant 0, \quad \varphi_3'(t)-\varphi_4'(t)\geqslant 0$$

то можно провести аналогичные рассуждения. Подобным образом можно поступать и далее.

Так как p ограничено, то число шагов будет конечно.

Предположим теперь, что неравенства (9) выполняются при $k\geqslant n$, но при любом m будет

$$\sum_{k=1}^{2m+1}(-1)^k\varphi_k(1)+4<0, \qquad \sum_{k=1}^{2m}(-1)^k\varphi_k(1)+4>0$$

Тогда вопрос остается открытым. В этом случае, очевидно, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\varphi_k(1)+4=0$$

и формула (8) дает

$$\rho_1=-1, \qquad \rho_2=-1$$

Отсюда легко получаем следующее: если $\varphi(1)=f'(1)=0$, то общее решение будет периодическим с периодом $\omega=2$.

При $\varphi(1)=0$ или $f'(1)\neq 0$ оно не будет ограниченным.

Поступила в редакцию
6 XII 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
2. Ляпунов А. М. Записки Императорской Академии Наук. 1902.