

## О ПОВЕДЕНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ МАЛЫХ НАРУШЕНИЯХ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАУСА-ГУРВИЦА

Н. Н. Баути н

(Горький)

При рассмотрении прикладных задач в области электротехники, радиотехники, механики, теории регулирования и других приходится рассматривать вопрос об устойчивости состояний равновесия<sup>1</sup>, причем устойчивость обычно понимается в смысле Ляпунова [4]. В этих задачах в противоположность консервативным задачам механики обычно предполагаются так называемые грубые состояния равновесия; поэтому при анализе устойчивости по Ляпунову можно ограничиться случаем, когда все корни характеристического уравнения имеют отличные от нуля действительные части и вопрос об устойчивости может быть решен отбрасыванием всех нелинейных членов и исследованием корней характеристического уравнения для полученных, таким образом, уравнений первого приближения.

Анализ корней характеристического уравнения приводит к условиям Рауса-Гурвица, которые выделяют те области значений параметров системы, которые соответствуют устойчивости рассматриваемого состояния равновесия. Так как условия Рауса-Гурвица [2,3], в особенности для систем со многими степенями свободы, приводят к очень громоздким неравенствам, то иногда на практике вместо условий Рауса-Гурвица пользуются так называемым критерием Найквиста, который позволяет, часто сравнительно простым образом, решить вопрос об устойчивости или неустойчивости состояний равновесия и о том, в каком направлении влияют на эту устойчивость изменения интересующих нас параметров.

Однако, само собой разумеется, границы областей устойчивости в пространстве параметров<sup>2</sup> получаются одними и теми же, пользуемся ли мы для определения этих границ условиями Рауса-Гурвица или кривыми Найквиста.

Основной интерес для приложений имеют системы, в которых состояния равновесия имеют корни характеристического уравнения с отличными от нуля действительными частями, т. е. обычно интересуются теми значениями параметров, которые соответствуют точкам, лежащим внутри области, выделяемой условиями Рауса-Гурвица. Однако в некоторых вопросах приходится изучать поведение системы, когда точка, изображающая ее, лежит на границе области, выделяемой условиями Рауса-Гурвица, или, что физически эквивалентно, достаточно близко к этой границе. Дело в том, что иногда одновременное удовлетворение требований устойчивости и работы устройства наилучшим образом достигается выбором параметров, соответствующих точкам, лежащим в сравнительной близости к границам области, дозволенной условиями Рауса-Гурвица. Отсюда возникает вопрос о поведении динамических систем при малых нарушениях условий Рауса-Гурвица, так как, с одной стороны, выбирая значения параметров,

<sup>1</sup> Состояния равновесия понимаются здесь в обобщенном смысле: например, режимы, связанные с наличием постоянной скорости, постоянного тока и т. д., рассматриваются как равновесные режимы, так как соответствующие координаты, характеризующие режим, постоянны.

<sup>2</sup> Пространством параметров обычно называют пространство, по декартовым осям которого мы откладываем интересующие нас параметры, входящие в уравнения движения системы.

близкие к границе, мы никогда не можем быть уверены, что случайное отклонение этих параметров в реальной системе не выведет точку, представляющую систему в пространстве коэффициентов, за границу области Рауса-Гурвица<sup>1</sup>, и так как, с другой стороны, поведение динамической системы при малых нарушениях условий устойчивости Рауса-Гурвица определяет также и существенные черты поведения систем, для которых условия Рауса-Гурвица выполняются, но которые лежат в достаточной близости к границам области устойчивости.

Вопрос о поведении системы, если точка, изображающая ее в пространстве параметров, переходит через границу области Рауса-Гурвица, возникает также в теории генерации автоколебаний. Ответ на этот вопрос позволяет установить, будет ли самовозбуждение «мягким», или изображающая точка уйдет от состояния равновесия и будет иметь место либо «жесткое» самовозбуждение, либо переход к новому состоянию равновесия.

С этой задачей о поведении системы вблизи границ области устойчивости тесно связаны исследования Ляпунова, относящиеся к тому случаю, когда среди корней характеристического уравнения есть корни с равной нулю действительной частью. Именно Ляпуновым были развиты специальные методы исследования, сводившие задачу к определению знаков или к необращению в нуль некоторых постоянных величин, для вычисления которых Ляпунов дал определенные рецепты и которые получили впоследствии название ляпуновских величин или ляпуновских коэффициентов.

В настоящей работе рассматривается поведение динамических систем в двух основных предположениях: во-первых, отклонения параметров от их граничных значений достаточно малы<sup>2</sup>; во-вторых, для точек пространства коэффициентов, соответствующих самой границе, рассматриваемое негрубое состояние равновесия является простейшим из возможных негрубых состояний равновесия, т. е. является состоянием равновесия, для которого первый ляпуновский коэффициент, характеризующий устойчивость, не равен нулю. Иными словами, рассматриваются такие системы, для которых вопрос об устойчивости состояния равновесия решается исследованием нелинейных уравнений, получающихся из основных уравнений для точки границы, соответствующей двум чисто мнимым корням, путем отбрасывания всех членов порядка выше третьего, а для точки границы, соответствующей одному нулевому корню, путем отбрасывания всех членов порядка выше второго. Оказывается, что при этих предположениях границы Рауса-Гурвица могут быть двойной природы.

*Безопасные границы.*—достаточно малое нарушение которых повлечет за собой лишь весьма малые (сколь угодно малые при достаточно малых нарушениях) изменения состояния системы. Можно показать, что в этом случае координаты системы будут претерпевать лишь весьма малые периодические изменения, накладывающиеся на равновесное (теперь неустойчивое) положение системы.

<sup>1</sup> Это предположение, конечно, значительно ограничивает прикладную ценность проводимой ниже классификации границ Рауса-Гурвица на «опасные» и «безопасные», так как, конечно, мы не всегда можем распорядиться малостью случайных изменений параметров. Однако замечание такого же характера можно сделать вообще по отношению к реальной физической значимости устойчивости по Ляпунову.

В реальных системах случайные отклонения координат и скоростей не могут быть сделаны по нашему требованию достаточно малыми и состояние равновесия, устойчивое по Ляпунову, может быть в действительности неустойчивым. По существу исследование реальной устойчивости состояния равновесия требует знания области устойчивости «в большом» и знания статистического характера возможных толчков. Однако даже нахождение области устойчивости «в большом» для состояния равновесия представляет собой задачу исключительно большой трудности.

<sup>2</sup> Областью Рауса-Гурвица, относящейся к данному состоянию равновесия, будем называть совокупность значений параметров, при которых для рассматриваемого состояния равновесия имеют место отрицательные действительные части всех корней характеристического уравнения.

*Опасные границы*,—сколько угодно малое нарушение которых повлечет за собой переход системы в новое состояние, которое нельзя приблизить к исходному выбором достаточно малых нарушений границы.

Иначе говоря, может оказаться, что состояние равновесия измененной системы (сколь угодно мало измененной) будет *неустойчиво* по уравнениям первого приближения, но практически система будет вести себя как *устойчивая*, так как изображающая точка, взятая из некоторой окрестности состояния равновесия, будет для всех  $t$ , начиная с некоторого  $t = t_1$ , оставаться в малой окрестности состояния равновесия (сколь угодно малой при достаточно малых изменениях системы) и, наоборот, может оказаться, что измененная система, *устойчивая* по уравнениям первого приближения, практически будет *неустойчива*, так как изображающую точку, взятую вне малой окрестности состояния равновесия (сколь угодно малой при достаточно малых изменениях системы), нельзя заставить оставаться вблизи состояния равновесия.

Эта классификация границ области Рауса-Гурвица на опасные и безопасные имеет значение для исследования рабочих режимов, которые являются состояниями равновесия, и для исследования характера возникновения автоколебаний; она имеет значение также при качественном исследовании разбиения фазового пространства на траектории в зависимости от параметра и при исследовании бифуркаций. Проведение намеченного анализа в противоположность обычным методам исследования фазового пространства не требует никаких предположений о близости рассматриваемых движений к синусоидальным или консервативным (требований малости  $\mu$ ).

Сравнение результатов, даваемых теорией малого  $\mu$ , с результатами, полученными путем анализа границ области Рауса-Гурвица, позволяет во многих случаях установить пределы использования теории малого  $\mu$ , если даже идет речь только о качественных высказываниях. Таким образом, вопрос о характере границ (опасные или безопасные границы) имеет значение для приложений и представляется важным иметь некоторые вычислительные приемы для нахождения первой ляпуновской величины, характеризующей устойчивость точек, относящихся к границам, в тех предположениях, которые были выше сформулированы.

В настоящей работе получены для  $n = 2$  в замкнутой форме ляпуновские величины  $L(\lambda)$ ,  $l(\lambda)$ , позволяющие различать опасные и безопасные границы области Рауса-Гурвица. Соответствующие выражения даны в двух видах, один из которых основывается на предварительном приведении системы к каноническому виду и на дальнейшем непосредственном применении способа, указанного Ляпуновым. Другой способ не требует предварительного приведения системы к каноническому виду и основывается на использовании некоторой вспомогательной консервативной системы.

Эти расчеты проведены для случаев  $n = 2$  и подобным же образом их можно провести для  $n = 3$ ,  $n = 4$ . Для  $n > 4$  появляются дополнительные трудности, связанные с решением линейной системы (необходимость получить явное выражение для корней алгебраического уравнения степени выше второй) и, кроме того, сами ляпуновские величины становятся весьма сложными. Однако, если нелинейные члены не содержат членов второго измерения (этот случай часто возникает, когда характеристики устройств аппроксимируются нечетными функциями), то в предположении, что решена соответствующая линейная задача, все же можно дать простое выражение для ляпуновской величины, характеризующей устойчивость.

Рассуждения, связанные с поведением динамических систем при малых нарушениях условий Рауса-Гурвица, раскрывают физический смысл исследований устойчивости в тех особых случаях, когда рассматриваемое состояние равновесия является негрубым и требует учета членов высших порядков.

В приложениях наряду с грубыми системами, где вопрос об устойчивости состояния равновесия решается условиями Рауса-Гурвица, вообще говоря, имеют значение лишь системы, где первая ляпуновская величина, характеризующая устойчивость, не будет равна нулю.

Дальнейшие вырождения встречаются крайне редко, и весьма часто исследование дальнейших вырождений не представляет никакого прикладного интереса, а связано лишь с неправильной идеализацией задачи.

### 1. Поведение траекторий в окрестности состояния равновесия при малых нарушениях условий Рауса-Гурвица

Рассмотрим динамическую систему, определяемую  $n$  уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, \dots, x_n) \quad (1.1)$$

где  $X_j(x_1, \dots, x_n)$  — аналитические функции для всех  $x_j$ .

Координаты состояний равновесия системы определяются из уравнений

$$X_j(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (j=1, \dots, n)$$

В дальнейшем предполагаем  $X_j(0, \dots, 0) = 0$ , т. е. считаем, что начало координат перенесено в состояние равновесия системы (1.1)

Пусть характеристическое уравнение для рассматриваемого состояния равновесия имеет вид:

$$z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n = 0$$

Условия Рауса-Гурвица выражаются в виде неравенств

$$D_1 = p_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix} > 0, \dots$$

$$D_n = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{2n-1} & p_{2n-2} & p_{2n-3} & \dots & p_n \end{vmatrix} > 0 \quad (p_j^* = 0 \text{ если } j > n)$$

Если рассматривать пространство коэффициентов  $p_j$ , то можно показать, что границами области устойчивости в этом пространстве служат только две поверхности:

1) „плоскость“  $p_n = 0$ , для точек которой характеристическое уравнение имеет равный нулю корень;

2) часть „поверхности“  $R \equiv D_{n-1} = 0$ , проходящая внутри области, выделяемой условиями  $D_j > 0$  ( $j=1, \dots, n-2, n$ ), для точек которой характеристическое уравнение имеет по крайней мере одну пару чисто мнимых корней.

Исключим из рассмотрения те части границ  $p_n = 0$  и  $R = 0$ , где характеристическое уравнение имеет более одного нулевого корня или более одной пары чисто мнимых корней, а также ограничимся рассмотрением только тех случаев, когда первый ляпуновский коэффициент  $L(\lambda_0)$  отличен от нуля. Этим мы ограничиваемся рассмотрением простейших из возможных негрубых состояний равновесия.

Для дальнейшего удобно считать один из параметров переменным. Пусть при изменении такого параметра  $\lambda$  коэффициенты  $p_j$  меняются так, что точка  $(p_j)$  описывает в пространстве коэффициентов кривую, пересекающую при бифуркационном значении  $\lambda = \lambda_0$  границу области устойчивости.

При сделанных предположениях возможны два случая нарушения устойчивости.

1. Величина  $R \equiv D_{n-1}$  меняет знак, когда параметр  $\lambda$  проходит через бифуркационное значение  $\lambda = \lambda_0$  (характеристическое уравнение для  $\lambda = \lambda_0$  имеет одну пару чисто мнимых корней).

2. Величина  $r = p_n$  меняет знак, когда параметр  $\lambda$  проходит через бифуркационное значение  $\lambda = \lambda_0$  (характеристическое уравнение для  $\lambda = \lambda_0$  имеет один равный нулю корень).

Поведение системы вблизи границы  $R = 0$  или  $r = 0$  при изменении параметра  $\lambda$  определяется тремя теоремами, представляющими непосредственное следствие из теорем Ляпунова [1] (стр. 125 и 169).

Будем рассматривать изменение параметра  $\lambda$  на некотором достаточно малом интервале  $\lambda_0 - \eta \leq \lambda \leq \lambda_0 + \eta$ , где  $\lambda_0$  определяется из условия  $R(\lambda_0) = 0$ , и пусть  $L(\lambda_0)$  — первая ляпуновская величина, характеризующая устойчивость при  $\lambda = \lambda_0$ .

*Теорема 1.* Пусть  $L(\lambda_0) < 0$ ,  $(dR/d\lambda)_{\lambda=\lambda_0} < 0$  и пусть  $\lambda^*$  — фиксированное значение параметра такое, что  $\lambda_0 - \eta \leq \lambda^* \leq \lambda_0 + \eta$ ; тогда можно указать такое  $\varepsilon_0$  (не зависящее от  $\lambda^*$ ), что для всякого сколь угодно малого положительного  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  можно найти такое положительное  $\eta_0 < \eta$ , что для любой траектории  $x_j(t)$ , начальные значения которой удовлетворяют неравенству  $|x_j(t)| < \varepsilon_0$ , для всех  $t$ , начиная с некоторого  $t > t_1$ , будет выполняться неравенство  $|x_j(t)| < \varepsilon_1$ , если только будет  $|\lambda^* - \lambda| < \eta_0$ .

Таким образом, при возрастании параметра состояние равновесия из устойчивого становится неустойчивым, однако изображающая точка остается в малой ( $\varepsilon_1$ ) окрестности состояния равновесия. При обратном изменении параметра, когда состояние равновесия опять становится устойчивым, изображающая точка снова возвращается к состоянию равновесия. Система ведет себя обратимо.

*Доказательство.* Так как  $L(\lambda_0) < 0$ , то, как показал Ляпунов, состояние равновесия для  $\lambda = \lambda_0$  будет устойчивым в том смысле, что траектории, попадающие в достаточно малую окрестность состояния равновесия, будут приближаться к нему асимптотически. Существует при  $\lambda \leq \lambda_0$  система замкнутых поверхностей без контакта  $V(x_1, \dots, x_n) = h$ , стягивающаяся к состоянию равновесия (построение такой системы поверхностей без контакта в малой окрестности состояния равновесия было осуществлено Ляпуновым [1]) (n° 34 стр. 133 и n° 37 стр. 147).

Выделим из системы поверхностей  $V = h$  две поверхности  $V = h_0$  и  $V = h_0'$  таких, что  $V = h_0'$  лежит внутри  $V = h_0$ , и таким образом, чтобы поверхность  $|x_j| = \varepsilon_0$  лежала целиком между поверхностями  $V = h_0$  и  $V = h_0'$ , и будем столь мало менять параметр  $\lambda$ , чтобы при  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_0 + \eta$  совокупность поверхностей  $V = h$ , заключенных между поверхностями  $V = h_0$  и  $V = h_0'$ , оставалась совокупностью поверхностей без контакта.

В силу условия  $R_{\lambda'} < 0$  величина  $R$  станет отрицательной, а состояние равновесия неустойчивым.

Пусть  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  и пусть поверхность  $|x_j| = \varepsilon_1$  лежит целиком между поверхностями  $V = h_1$  и  $V = h_1'$ . Так как при  $\lambda = \lambda_0$  вся совокупность поверхностей  $V = h$ , расположенных между поверхностями  $V = h_0$  и  $V = h_0'$ , является совокупностью поверхностей без контакта (как бы ни была мала окрестность состояния равновесия  $\varepsilon_1$ ), то можно указать столь малый интервал значений  $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_2$ , где  $\lambda_2 = \lambda_0 + \eta_0 < \lambda_0 + \eta$ , чтобы для любого  $\lambda = \lambda^*$  из этого интервала эта совокупность поверхностей оставалась совокупностью поверхностей без контакта.

Таким образом, для  $\lambda = \lambda^*$ , где  $|\lambda_0 - \lambda^*| < \eta_0$  — траектория, проходящая через точку  $x(t_0)$  внутри  $\varepsilon_0$  окрестности состояния равновесия, через конечный промежуток времени (для  $t = t_1$ ) пересечет границу  $\varepsilon_1$  окрестности и останется там для всех  $t > t_1$ .

*Теорема 2.* Пусть  $L(\lambda_0) > 0$ ,  $(dR/d\lambda)_{\lambda=\lambda_0} < 0$  и пусть  $\lambda^*$  — фиксированное значение параметра  $\lambda_0 - \eta \leq \lambda^* \leq \lambda_0 + \eta$ , тогда можно указать такое  $\varepsilon_0$  (не зависящее от  $\lambda^*$ ), что для всякого сколь угодно малого положительного  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  можно найти такое положительное  $\eta_0 < \eta$ , такие  $t_0$  и  $t_1$  ( $t_1 > t_0$ ) и такие траектории  $x_j(t, \lambda)$ , что из неравенства  $|\lambda^* - \lambda| < \eta$ , для каждой из этих траекторий будут следовать неравенства  $|x_j(t_0, \lambda^*)| < \varepsilon_1$ ,  $|x_j(t_1, \lambda^*)| > \varepsilon_0$  ( $t_0$  и  $t_1$  могут быть различны для разных траекторий).

Таким образом, при возрастании параметра состояние равновесия при  $\lambda = \lambda_0$  из устойчивого становится неустойчивым. Изображающая точка срывается с состояния равновесия и отбрасывается на достаточно далекое расстояние.

При обратном изменении параметра изображающая точка не возвращается на состояние равновесия, когда оно опять становится устойчивым. Система ведет себя необратимо.

*Доказательство.* Так как  $L(\lambda_0) > 0$ , то, как показал Ляпунов, для  $\lambda = \lambda_0$  состояние равновесия будет неустойчиво в том смысле, что существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что, каково бы ни было положительное  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ , всегда можно выделить внутри  $\varepsilon_1$  окрестности состояния равновесия такую поверхность без контакта, что все траектории  $x_j(t, \lambda)$ , пересекающие ее, через конечный промежуток времени покидают  $\varepsilon_0$  — окрестность состояния равновесия. Существует для  $\lambda \geq \lambda_0$  континуум поверхностей  $V(x_1, \dots, x_n) = h$ , являющихся для траекторий  $x_j(t, \lambda)$  системой поверхностей без контакта.

Эффективное построение такой системы поверхностей без контакта было осуществлено Ляпуновым<sup>[1]</sup> (п°34 и 37).

Выделим из системы поверхностей  $V = h$  две близкие поверхности  $V = h_0$  и  $V = h_0'$  и рассмотрим столь малые куски их  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_0'$ , чтобы границы области  $|x_j| = \varepsilon_0$  не пересекали их и оставляли одну внутри области  $|x_j| = \varepsilon_0$ , другую снаружи.

Будем теперь так мало менять параметр  $\lambda$ , чтобы при  $\lambda_0 - \eta \leq \lambda \leq \lambda_0$  совокупность поверхностей  $V = h$  между поверхностями  $V = h_0$  и  $V = h_0'$  оставалась совокупностью поверхностей без контакта для траекторий, пересекающих  $\varepsilon_0$  и  $\varepsilon_0'$  (всегда можно считать, что все траектории,

пересекающие  $\sigma_0$ , пересекают и  $\sigma_0'$ ). В силу условия  $(dR/d\lambda)_{\lambda=\lambda_0} < 0$  величина  $R$  станет положительной, а состояние равновесия устойчивым.

Пусть  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  и пусть поверхность  $|x_j| = \varepsilon_1$  оставляет внутри себя малый кусок  $\sigma_1$  поверхности без контакта  $V = h_1$ , который отображается траекториями, пересекающими его, на кусок  $\sigma_{0*} \subset \sigma_0$  поверхности  $V = h$ . Так как  $\sigma_1$  при  $\lambda = \lambda_0$  может быть заключено в сколь угодно малой  $\varepsilon_1$  окрестности начала и при этом совокупность поверхностей  $V = h$  между поверхностями  $V = h_1$  и  $V = h_0$  будет совокупностью поверхностей без контакта для траекторий, пересекающих  $\sigma_1$ , всегда можно указать интервал значений  $\lambda$ , столь малый,  $\lambda_2 \leq \lambda \leq \lambda_0$  (где  $\lambda_2 = \lambda_0 - \eta_0$ ), чтобы для любого  $\lambda = \lambda^*$  из этого интервала эта совокупность поверхностей оставалась совокупностью поверхностей без контакта.

Таким образом, для  $\lambda = \lambda^*$ , где  $|\lambda_0 - \lambda^*| < \eta_0$ , траектории, пересекающие для значения  $t = t_0$  (причем  $t_0$  различно для различных траекторий) кусок  $\sigma_1$  поверхности без контакта, содержащийся в окрестности  $\varepsilon_1$  состояния равновесия, для соответствующего конечного значения  $t$ ,  $t_0 < t < t_1$  (где  $t_1$  различно для разных траекторий), пересекут границу окрестности  $\varepsilon_0$ .

Будем теперь рассматривать изменение параметра  $\lambda$  на малом интервале  $\lambda_0 - \eta \leq \lambda \leq \lambda_0 + \eta$ , где  $\lambda_0$  определяется из условия  $r(\lambda_0) = 0$ , и пусть  $l(\lambda_0)$  — первая ляпуновская величина, характеризующая в этом случае устойчивость при  $\lambda = \lambda_0$ .

*Теорема 3.* Пусть  $l(\lambda_0) \neq 0$  и  $(dr/d\lambda)_{\lambda=\lambda_0} < 0$  и пусть  $\lambda^*$  — фиксированное значение параметра такое, что  $\lambda_0 - \eta \leq \lambda^* \leq \lambda_0 + \eta$ , тогда можно указать такое  $\varepsilon_0$  (не зависящее от  $\lambda^*$ ), что для всякого сколь угодно малого положительного  $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$  можно найти такое положительное  $\eta_0 < \eta$ , такие  $t_0$  и  $t_1 > t_0$  и такие траектории  $x_j(t, \lambda)$ , что из неравенства  $|\lambda^* - \lambda| < \eta_0$  для каждой из этих траекторий будут следовать неравенства  $|x_j(t_0, \lambda^*)| < \varepsilon_1$ ,  $|x_j(t_1, \lambda^*)| > \varepsilon_0$  (при этом  $t_0$  и  $t_1$  могут быть различны для различных траекторий).

Таким образом, при возрастании параметра, когда при  $\lambda = \lambda_0$  состояние равновесия становится неустойчивым, изображающая точка срывается с состояния равновесия. Система ведет себя *необратимо*.

Доказательство повторяет доказательство теоремы II.

Приведенные теоремы, непосредственно следующие из теорем Ляпунова, позволяют сделать высказывания о поведении динамических систем при малых нарушениях условий Рауса-Гурвица и провести деление границ области устойчивости на *безопасные* и *опасные*.

Заметим, однако, что требования  $L(\lambda_0) \neq 0$ ,  $l(\lambda_0) \neq 0$  позволяют сделать более сильные качественные утверждения относительно разбиения на траектории малой окрестности состояния равновесия и относительно изменения этого разбиения при изменении параметра вблизи границы области устойчивости. Указанные требования позволяют, в частности, утверждать, что при  $L(\lambda_0) < 0$  при малом нарушении границы  $R = 0$  области устойчивости возникает устойчивый колебательный процесс достаточно малой амплитуды.

Здесь такого качественного исследования структуры окрестности состояния равновесия не проводится<sup>1</sup>. Чтобы дать наглядную картину поведения динамической системы вблизи опасных и безопасных границ области устойчивости, в работе дается качественное описание окрестности состояния равновесия в случае систем двух уравнений.

## 2. Система двух уравнений первого порядка<sup>2</sup>

1°. *Выражение для  $L(i_0)$  через коэффициенты исходной системы.*  
Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + Q(x, y) \quad (2.1)$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad (-p = a + d, \quad q = ad - bc)$$

Условия Рауса-Гурвица сводятся к неравенствам

$$R \equiv p \equiv -(a + d) > 0, \quad r \equiv ad - bc > 0$$

Разложение  $P$  и  $Q$  по степеням  $x$  и  $y$  представим в виде

$$P(x, y) = P_2(x, y) + P_3(x, y) + \dots, \quad Q(x, y) = Q_2(x, y) + Q_3(x, y) + \dots$$

где

$$P_2 = a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2, \quad P_3 = a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3$$

$$Q_2 = b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2, \quad Q_3 = b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3$$

Для вычисления  $L(i_0)$ , следуя Ляпунову, приводим систему (2.1) подстановкой

$$\xi = x, \quad \omega\eta + ax + by = 0 \quad (\omega^2 = ad - bc)$$

к так называемому каноническому виду

$$\frac{d\xi}{dt} = -\omega\eta + P^\circ(\xi, \eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = \omega\xi + Q^\circ(\xi, \eta) \quad (2.2)$$

где

$$P^\circ = A_{20}\xi^2 + A_{11}\xi\eta + A_{02}\eta^2 + A_{30}\xi^3 + A_{21}\xi^2\eta + A_{12}\xi\eta^2 + A_{03}\eta^3 + \dots$$

$$Q^\circ = B_{20}\xi^2 + B_{11}\xi\eta + B_{02}\eta^2 + B_{30}\xi^3 + B_{21}\xi^2\eta + B_{12}\xi\eta^2 + B_{03}\eta^3 + \dots$$

<sup>1</sup> Исследование разбиения на траектории фазовой плоскости в зависимости от параметра для систем первой степени негрубости, определяемых двумя дифференциальными уравнениями первого порядка, содержится в работах А. Андронова и Е. Леонтович [4, 5]. Для системы трех уравнений А. Леонтьевым [6] выяснены условия появления из состояния равновесия единственного периодического решения и исследована его устойчивость. П. Кузьмин [7] в заметке «Замечания о смене устойчивости установившегося движения», также затронул эту проблему.

<sup>2</sup> В случае одного уравнения первого порядка наша задача становится совершенно элементарной. Если уравнения движения имеют вид  $dx/dt = \alpha x + \beta x^2 + \dots$ , то устойчивость определяется знаком  $\alpha$ , а границы устойчивости даются значением  $\alpha = 0$ . Про  $\beta \neq 0$  эта граница всегда *опасная*. Критерий исчезновения состояния равновесия при изменении параметра вокруг значения параметра  $\lambda = \lambda_0$  получается весьма просто из анализа зависимости координаты состояния равновесия уравнения  $\xi = f(\xi, \lambda)$  от параметра  $\lambda$ . Если  $f'(\xi(\lambda_0), \lambda_0) = 0$ , то при сколь угодно малом изменении параметра в подходящем направлении состояние равновесия исчезает.



Коэффициенты системы (2.2) связаны с коэффициентами системы (2.1) соотношениями

$$\begin{aligned} A_{20} &= \frac{1}{b^2} (b^2 a_{20} - aba_{11} + a^2 a_{02}), & A_{11} &= \frac{\omega}{b^2} (2aa_{02} - ba_{11}) \\ A_{02} &= \frac{\omega^2}{b^2} a_{02}, & A_{30} &= \frac{1}{b^3} (b^3 a_{30} - ab^2 a_{21} + a^2 ba_{12} - a^3 a_{03}) \\ A_{21} &= \frac{\omega}{b^3} (-b^3 a_{21} + 2aba_{12} - 3a^2 a_{03}), & A_{12} &= \frac{\omega^2}{b^2} (ba_{12} - 3aa_{03}) \\ A_{03} &= -\frac{\omega^3}{b^3} a_{03}, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{20} &= -\frac{1}{\omega b^2} (a^3 a_{02} - a^2 ba_{11} + ab^2 a_{20} + b^3 b_{20} - b^2 ab_{11} + a^2 bb_{02}) \\ B_{11} &= \frac{1}{b^2} (aba_{11} - 2a^2 a_{20} - 2abb_{02} + b^2 b_{11}), & B_{02} &= -\frac{\omega}{b^2} (aa_{02} + bb_{02}) \\ B_{30} &= \frac{1}{\omega b^3} (a^4 a_{03} - a^3 ba_{12} + a^2 b^2 a_{21} - ab^3 a_{30} - b^4 b_{30} + ab^3 b_{21} - a^2 b^2 b_{12} + a^3 bb_{03}) \\ B_{21} &= \frac{1}{b^3} (3a^3 a_{03} - 2a^2 ba_{12} + ab^2 a_{21} + b^3 b_{21} - 2ab^2 b_{12} + 3a^2 bb_{03}) \\ B_{12} &= \frac{\omega}{b^3} (3a^2 a_{03} - aba_{12} - b^2 b_{12} + 3abb_{03}), & B_{03} &= \frac{\omega^2}{b^3} (aa_{03} + bb_{03}), \dots \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам  $\xi = \rho \cos \varphi$ ,  $\eta = \rho \sin \varphi$  и исключая  $t$ , систему (2.2) приведем к уравнению

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{\rho [P^\circ (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \cos \varphi + Q^\circ (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sin \varphi]}{\omega \rho + Q^\circ \cos \varphi - P^\circ \sin \varphi} \quad (2.3)$$

Так как  $\omega \neq 0$ , правая часть (2.3) может быть развернута в окрестности начала в ряд по степеням  $\rho$ , сходящийся для всех достаточно малых  $\rho < \rho^*$  при любых фиксированных значениях параметров уравнения (2.3), удовлетворяющих условиям  $a + d = 0$  и  $ad - bc > 0$

Представим (2.3) в виде

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{P^\circ \cos \varphi + Q^\circ \sin \varphi}{\omega} \left[ 1 + \frac{P^\circ \sin \varphi - Q^\circ \cos \varphi}{\omega \rho} + \left( \frac{P^\circ \sin \varphi - Q^\circ \cos \varphi}{\omega \rho} \right)^2 + \dots \right]$$

и затем в виде

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = R_2(\varphi) \rho^2 + R_3(\varphi) \rho^3 + \dots \quad (2.4)$$

Будем искать решение уравнения (2.4) в виде ряда

$$\rho = \rho_0 u_1 + \rho_0^2 u_2 + \rho_0^3 u_3 + \dots$$

с начальными условиями  $u_1(0) = 1$  и  $u_k(0) = 0$  ( $k \neq 1$ ).

Функции  $u_1, u_2, u_3, \dots$  последовательно определяются из рекуррентных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_1}{dt} = 0, \quad \frac{du_2}{d\varphi} = R_2(\varphi), \quad \frac{du_3}{dt} = 2u_2 R_2 + R_3, \dots$$

Полагая затем  $\varphi = 2\pi$ , получим на отрезке  $\varphi = 0$  «функцию последования»

$$\rho = \rho_0 + \alpha_3 \rho_0^3 + \dots \quad (2.5)$$

Первый ляпуновский коэффициент  $L(\lambda_0)$  совпадает в простейшем случае с  $\alpha_2$ .

Вычисление дает для  $\alpha_3$  следующее выражение через коэффициенты преобразованной системы:

$$\alpha_3 = \int_0^{2\pi} (2u_2 R_2 + R_3) d\varphi = \frac{\pi}{4} \left[ 2(A_{02} B_{02} - A_{20} B_{20}) - B_{11}(B_{02} + B_{20}) + \right. \\ \left. + A_{11}(A_{20} + A_{02}) + 3\omega(A_{20} + B_{02}) + \omega(A_{12} + B_{21}) \right] \quad (\omega > 0)$$

Подставляя значение коэффициентов  $A_{ji}$  и  $B_{ji}$  в полученное выражение, находим [8] после упрощений

$$L(\lambda_0) = -\frac{\pi}{4b\omega^3} \{ [ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{20}) + \\ + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) - \\ - b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] - \\ - (a^2 + bc)[3(cb_{02} - ba_{20}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - b_{21}b)] \} \quad (2.6)$$

Коэффициенты членов  $P_4(x, y)$ ,  $Q_4(x, y)$  не входят в выражение  $L$ . Знак  $L(\lambda_0)$  согласно Ляпунову определяет устойчивость состояния равновесия для тех бифуркационных значений параметров системы, при которых система имеет чисто мнимые корни. Согласно теоремам 1 и 2, знак  $L(\lambda_0)$  определяет также и существенные черты поведения системы при отличных от нуля, но достаточно малых действительных частях корней характеристического уравнения (вблизи границы  $p=0$ ). Случай  $L=0$  не рассматривается.

2°. *Выражение для  $L(\lambda_0)$  в виде интеграла по кривым вспомогательной консервативной системы.* Рассмотрим вспомогательную систему

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + \mu P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy + \mu Q(x, y) \quad (2.7)$$

где  $\mu$  — малый параметр.

При  $\mu=1$  система (2.7) совпадает с (2.1). Будем также предполагать что  $ad - bc > 0$ ,  $a + d = 0$  и, кроме того,  $c > 0$ . (Последнее всегда может быть достигнуто заменой  $x$  через  $y$  и наоборот.)

Чтобы найти требуемое выражение для  $L(\lambda_0)$ , воспользуемся методом Пуанкаре [9]. При наших предположениях систему (2.7) можно также записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = -H_y'(x, y) + \mu P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = H_x'(x, y) + \mu Q(x, y) \quad (2.8)$$

где

$$H(x, y) = \frac{cx^2}{2} - axy - \frac{by^2}{2} = \frac{h^2}{2}$$

Выделим внутри области сходимости (2.5) некоторую кривую  $C_{h_0}$  семейства  $H(x, y) = \frac{1}{2} h^2$  и введем вблизи  $C_{h_0}$  новую систему координат  $\rho, \xi$  с помощью уравнений

$$H(x, y) = \frac{1}{2} (h_0 + \xi)^2, \quad n(x, y; s) = 0 \quad (2.9)$$

где  $n(x, y; s) = 0$  для каждого  $s$  есть дуга без контакта, совпадающая при  $s = 0$  с отрезком  $\varphi = 0$ ; при этом  $s$  — циклическая координата такая, что  $ds/dt = 1$  на кривой  $C_{h_0}$ .

Из (2.9) имеем  $x = f_1(s, h)$ ,  $y = f_2(s, h)$ , причем  $x = f_1(s, h_0) = \varphi(s)$ ,  $y = f_2(s, h_0) = \psi(s)$  будут уравнениями кривой  $C_{h_0}$ .

Воспользовавшись тождествами

$$H[f_1(s, h), f_2(s, h)] = \frac{1}{2} h^2, \quad H_x' f_{1s}' + H_y' f_{2s}' = 0, \quad H_x' f_{1h}' + H_y' f_{2h}' = h.$$

получаем в новых координатах

$$\frac{d\delta}{ds} = \frac{\mu [P(f_1, f_2) f_{2s}' - Q(f_1, f_2) f_{1s}']}{h - \mu [P(f_1, f_2) f_{2h}' - Q(f_1, f_2) f_{1h}']} = R(\delta, s, \mu) \quad (2.10)$$

Следуя Пуанкаре [1], решение уравнения (2.10) будем искать в виде ряда по степеням малого параметра  $\mu$  и начального значения  $\delta_0 = \delta(0)$ :

$$\delta = c_{10}(s) \delta_0 + c_{01}(s) \mu + c_{20}(s) \delta_0^2 + c_{11}(s) \delta_0 \mu + c_{02}(s) \mu^2 + \dots \quad (2.11)$$

с начальными условиями  $c_{10}(0) = 1$ ,  $c_{ji}(0) = 0$  ( $j, i \neq 1, 0$ ).

Развертывая (2.10) в ряд по  $\delta$  и  $\mu$ , получаем

$$\frac{d\delta}{ds} = \mu R_{\mu}'(0, s, 0) + R_{\mu\delta}''(0, s, 0) \delta \mu + \frac{1}{2} R_{\mu\mu}''(0, s, 0) \mu^2 + \dots \quad (2.12)$$

где

$$R_{\mu}'(0, s, 0) = \frac{1}{h_0} [\dot{\psi} P(\varphi, \psi) - \dot{\varphi} Q(\varphi, \psi)]$$

$$R_{\mu\delta}''(0, s, 0) = \frac{1}{h_0} \left[ \frac{d}{ds} (P f_{2h}' - Q f_{1h}') + (f_{1h}' f_{2s}' - f_{2h}' f_{1s}') (P_x' + Q_y') - \frac{1}{h} (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi}) \right]$$

$$R_{\mu\mu}''(0, s, 0) = \frac{2}{h_0^2} (P f_{2h}' - Q f_{1h}') (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi})$$

Подставляя (2.11) в (2.12) и сравнивая коэффициенты при  $\delta_0$  и  $\mu$ , получаем рекуррентные дифференциальные уравнения

$$\dot{c}_{10} = 0, \quad \dot{c}_{01} = R_{\mu}', \quad \dot{c}_{11} = c_{10} R_{\mu\delta}'', \quad \dot{c}_{02} = c_{01} R_{\mu\mu}'' + \frac{1}{2} R_{\mu\mu}'', \dots \quad (2.13)$$

из которых, принимая во внимание начальные условия, находим

$$c_{10}(s) = 1, \quad c_{01}(s) = \frac{1}{h_0} \int_0^s (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi}) d\tau$$

$$c_{02}(s) = \int_0^s \left\{ \left[ \frac{1}{h_0} \int_0^{\xi} (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi}) dt \right] \left[ \frac{1}{h} \frac{d}{ds} (P f_{2h}' - Q f_{1h}') + \frac{1}{h_0} (P_x' + Q_y') (f_{1h}' f_{2s}' - f_{2h}' f_{1s}') - \frac{1}{h_0^2} (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi}) + \frac{1}{h_0^2} (P f_{2h}' - Q f_{1h}') (P \dot{\psi} - Q \dot{\varphi}) \right] \right\} d\tau$$

Последнее выражение можно представить в виде

$$c_{02}(s) = \int_0^s \frac{1}{h^2} \frac{d}{d\xi} \left[ (Pf_{2h}' - Qf_{1h}') \int_0^{\xi} (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) dt - \frac{1}{2h_0} \left( \int_0^{\xi} (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) dt \right)^2 \right] d\xi + \\ + \frac{1}{h_0^2} \int_0^s \left[ \int_0^{\xi} (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) dt \right] (P_x' + Q_y') (f_{1h}' f_{2s}' - f_{2h}' f_{1s}') d\xi$$

Заметим также, что

$$f_{1h}' f_{2s}' - f_{2h}' f_{1s}' = (f_{1h}' H_{x'} + f_{2h}' H_{y'}) \frac{dt}{ds} = h$$

Полагая в (2.11)  $s = \tau$ , где  $\tau = 2\pi/\omega$  — период на кривой  $C_{h_0}$ , получаем на отрезке  $s=0$ , или, что то же, на отрезке  $\varphi=0$ , функцию последования

$$\delta = \delta_0 + c_{01}(\tau) + c_{11}(\tau) \delta_0 \mu + c_{02}(\tau) \mu^2 + \dots \quad (2.14)$$

Нужные в дальнейшем выражения  $c_{01}(\tau)$  и  $c_{02}(\tau)$  примут вид:

$$c_{01}(\tau) = \frac{1}{h_0} \int_0^{\tau} (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) d\xi \quad \left( \tau = \frac{2\pi}{\omega} \right) \quad (2.15)$$

$$c_{02}(\tau) = \frac{1}{h_0} \int_0^{\tau} \left[ \int_0^{\xi} (P\dot{\psi} - Q\dot{\varphi}) ds \right] (P_x' + Q_y') d\xi$$

Очевидно, что все  $c_{k0}(\tau) = 0$  ( $k=2, 3, \dots$ ), так как при  $\mu=0$  уравнение (2.9) должно иметь решение  $\delta = \delta_0$ .

Построенная таким образом на отрезке  $s=0$  функция последования (2.11) для каждого  $\mu = \text{const}$  совпадает в окрестности точки пересечения отрезка  $s=0$  с кривой  $C_{h_0}$  с построенной функцией последования (2.5), т. е. представляет собой преобразование (2.5) к новым координатам.

Найдем связь между  $\rho - \rho_0$  и  $\delta - \delta_0$ . Из формул преобразования (1.4) находим, что  $\rho = \xi = x$  на отрезке  $\varphi=0$  ( $\eta=0$ ) и уравнение этого отрезка в координатах  $xy$  будет  $ax + by = 0$ .

Полагая в  $H(x, y) = \frac{1}{2}(h_0 + \delta)^2$

$$y = -\frac{a}{b}x = -\frac{a}{b}\rho$$

получим искомую связь между  $\rho$  и  $\delta$ :

$$\frac{\omega \rho}{\sqrt{-b}} = h_0 + \delta \quad (2.16)$$

Сотношение (2.16) позволяет установить связь между коэффициентами функций последования (2.5) и (2.11). Из (2.16) и (2.5) найдем

$$\delta - \delta_0 = \frac{\omega}{\sqrt{-b}} (\rho - \rho_0) = \frac{\omega}{\sqrt{-b}} \alpha_3 \rho_0^3 + \dots$$

Следовательно, согласно (2.11) имеем

$$\frac{\omega}{\sqrt{-b}} \alpha_3 \rho_0^3 + \dots = c_{01} \mu + c_{11} \delta_0 \mu + c_{02} \mu^2 + \dots \quad (2.17)$$

Представим теперь левую и правую части (2.17) в виде ряда по  $\mu$ ,  $h_0$  и  $\delta_0$ . При этом введение  $\mu$  в левую часть соответствует вычислению

функции последования (2.5) для системы (2.7), отличающейся от (2.1) множителем  $\mu$  в коэффициентах нелинейных членов. Из (2.6) видим, что  $\alpha_2$  примет тогда вид:

$$\alpha_2 = A_1 \mu + A_2 \mu^2 \tag{2.18}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\omega}{\sqrt{-b}} (A_1 \mu + A_2 \mu^2) \left[ \frac{\sqrt{-b}}{\omega} (h_0 + \delta_0) \right]^3 + \dots = \\ & = \mu \left[ (c_{01})_{h_0=0} + h_0 \left( \frac{dc_{01}}{dh_0} \right)_{h_0=0} + \frac{h_0^2}{2!} \left( \frac{d^2c_{01}}{dh_0^2} \right)_{h_0=0} + \frac{h_0^3}{3!} \left( \frac{d^3c_{01}}{dh_0^3} \right)_{h_0=0} + \dots \right] + \\ & + \mu^2 \left[ (c_{02})_{h_0=0} + h_0 \left( \frac{dc_{02}}{dh_0} \right)_{h_0=0} + \frac{h_0^2}{2!} \left( \frac{d^2c_{02}}{dh_0^2} \right)_{h_0=0} + \frac{h_0^3}{3!} \left( \frac{d^3c_{02}}{dh_0^3} \right)_{h_0=0} + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при членах, содержащих  $\mu h_0^3$  и  $\mu^2 h_0^3$ , находим  $A_1$  и  $A_2$  через  $c_{01}$  и  $c_{02}$ , получая тем самым искомое выражение  $\alpha_2$  в виде интеграла. Очевидно, что

$$A_1 = -\frac{\omega^2}{3! b} \left( \frac{d^3c_{01}}{dh_0^3} \right)_{h_0=0} \quad A_2 = -\frac{\omega^2}{3! b} \left( \frac{d^3c_{02}}{dh_0^3} \right)_{h_0=0}$$

т. е.

$$L(\lambda_0) = -\frac{\omega^2}{3! b} \left\{ \frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{2\pi/\omega} \left[ P\dot{\varphi} - Q\dot{\varphi} + (P_x' + Q_y') \int_0^{\xi} (P\dot{\varphi} - Q\dot{\varphi}) ds \right] d\xi \right\}_{h_0=0} \tag{2.19}$$

где

$$x = \varphi = \frac{h_0 \sqrt{-b}}{\omega} \cos \omega t, \quad y = \psi = \frac{h_0}{\omega \sqrt{-b}} (a \cos \omega t + \omega \sin \omega t)$$

*Примечание 1.* Заметим, что хотя последнее выражение для  $L(\lambda_0)$  и вычисляется при помощи специального приема, связанного с введением консервативной системы, однако оно не связано ни с какими предположениями о близости исходной системы к использованной консервативной и, следовательно, с какими бы то ни было требованиями малости в правых частях системы (2.1).

*Примечание 2.* Выражение (2.19) позволяет, в частности, выяснить соотношение между некоторыми результатами, получаемыми без предположения о малости нелинейных членов в правых частях системы (2.1), и такими же результатами, получаемыми по методу малого  $\mu$ .

Часто обнаруживается, что результаты, полученные по методу малого  $\mu$ , качественно совпадают с результатами эксперимента, хотя фактические уравнения движения не могут рассматриваться как относящиеся к случаю малого  $\mu$ .

Результаты настоящего параграфа позволяют точно установить в отношении вопроса появления устойчивого или неустойчивого предельного цикла, когда имеется такое совпадение результатов «теории малого  $\mu$ » и «теории большого  $\mu$ » (чудо малого  $\mu$ ) и когда такое совпадение может не иметь места.

Легко обнаружить, что первое слагаемое в выражении (2.19) для  $L(\lambda_0)$ :

$$A_1 = -\frac{\omega^2}{3! b} \left( \frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{2\pi/\omega} (P\dot{\varphi} - Q\dot{\varphi}) d\xi \right)_{h_0=0}$$

отлично от нуля для членов третьего порядка, входящих в разложения  $P$  и  $Q$  по степеням  $x$  и  $y$ , а второе

$$A_2 = -\frac{\omega^2}{3! b} \left( \frac{d^3}{dh_0^3} \frac{1}{h_0} \int_0^{2\pi/\omega} \left[ (P_x' + Q_y') \int_0^{\xi} (P\dot{\varphi} - Q\dot{\varphi}) ds \right] d\xi \right)_{h_0=0}$$

отлично от нуля только для членов второго порядка в разложениях  $P$  и  $Q$ .

Заметив теперь из выражения (2.18), что  $L(\lambda_0)$  для малого  $\mu$  дается первым слагаемым в (2.19), видим, что в том случае, когда среди нелинейных членов системы (2.7) не имеется членов второго порядка, действительно должно быть совпадение в результатах, полученных по методу малого  $\mu$  и по методу, не связанному с малой нелинейностью.

Очевидно также, что применение метода малого  $\mu$  к системам, содержащим квадратичные члены, не может быть использовано даже и для только качественного суждения о характере появляющихся периодических решений в системах, не близких к линейным консервативным.

В том случае, когда характеристики содержат квадратичные члены и не имеют членов третьего измерения, метод малого  $\mu$  дает для  $L(\lambda_0)$  выражение в виде второго слагаемого в формуле (2.19), при этом оно будет составлено из так называемых вторых приближений [10].

**3°. Выражение для  $l(\lambda_0)$  через коэффициенты исходной системы.** Пусть для системы (2.1) выполняются условия (для определенности пусть  $a \neq 0$ )

$$ad - bc = 0, \quad a + d < 0$$

Подстановка

$$z = cx - ay, \quad t = \frac{a}{a^2 + b^2} \tau$$

приводит систему (2.1) к виду

$$\frac{dx}{d\tau} = x - \frac{b}{a^2 + bc} z + \dots$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{a(a^2 + bc)} \{ (ca_{02} - ab_{02}) z^2 + [a(ab_{11} - ca_{11}) + 2c(ab_{02} - ca_{02})] zx + \\ + [(ca_{20} - ab_{20}) a^2 + ac(ca_{11} - ab_{11}) + c^2(ca_{02} - ab_{02})] x^2 \} + \dots$$

Отсюда, следуя Ляпунову, получаем

$$l(\lambda_0) = \frac{1}{a(a^2 + bc)} (ca_{02} - ab_{02}) + \frac{1}{a(a^2 + bc)^2} [ab(ab_{11} - ca_{11}) + 2bc(ab_{02} - ca_{02})] + \\ + \frac{1}{a(a^2 + bc)^3} [a^2 b^2 (ca_{20} - ab_{20}) + ab^2 c (ca_{11} - ab_{11}) + b^2 c^2 (ca_{02} - ab_{02})] \quad (2.20)$$

Необращение в нуль  $l(\lambda_0)$  согласно Ляпунову свидетельствует о неустойчивости состояния равновесия для тех бифуркационных значений параметров системы, при которых система (2.1) имеет один нулевой и один отрицательный корень.

Согласно теореме 3 необращение в нуль  $l(\lambda_0)$  на границе  $r=0$  определяет также и существенные особенности поведения системы вблизи границы  $r=0$  (если  $l(\lambda_0) \neq 0$ , то граница  $r=0$  будет «опасная»).

Заметим, что отсутствие срывов изображающей точки на границе  $r=0$  может осуществляться только при условии  $l(\lambda_0)=0$  и некотором дополнительном условии, т. е. «безопасность» при приближении к границе  $r=0$  требует выполнения по меньшей мере двух условий, наложенных на коэффициенты системы дополнительно к условию  $r=0$ , и в этом смысле труднее осуществима в сравнении с безопасностью на границе  $R=0$ , для осуществления которой необходимо только одно условие.

4°. Смена качественных структур разбиения на траектории окрестности состояния равновесия при переходе через границу области устойчивости. При изучении поведения динамической системы вблизи границ области устойчивости возможны следующие случаи [6].

1) Первый ляпуновский коэффициент  $L(\lambda_0)$  отрицателен (фиг. 1).

При переходе через границу  $R=0$  от положительных значений к отрицательным появляется единственный устойчивый предельный цикл. При обратном изменении параметра устойчивый предельный цикл стягивается в точку.

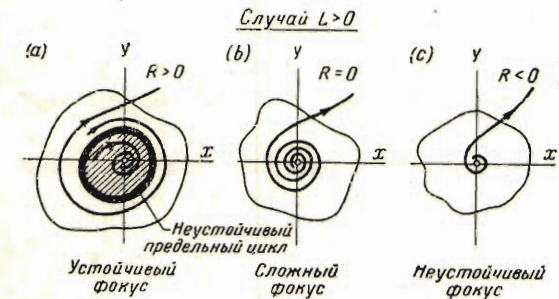
2) Первый ляпуновский коэффициент  $L(\lambda_0)$  положителен (фиг. 2).

При переходе через границу  $R=0$  от положительных значений к отрицательным к состоянию равновесия стягивается единственный неустойчивый предельный цикл; при обратном изменении параметра из состояния равновесия появляется неустойчивый предельный цикл.

На фиг. 1 и 2 штриховкой показана область устойчивости, для которой траектории представляют собой спирали, накручивающиеся на состояние равновесия, или устойчивый предельный цикл.

Область неустойчивости показана также на фиг. 1 и 2 и заполнена раскручивающимися спиралями.

Из схем, приведенных на фиг. 1 и 2, видно различие в поведении системы вблизи границы по отношению к случайным точкам. Сравнивая для  $R>0$  случаи  $L(\lambda_0) < 0$  и  $L(\lambda_0) > 0$ , видим, что во втором случае возможно выбивание случайной точкой из устойчивого состояния равновесия за границы области устойчивости (внутри рассматриваемой



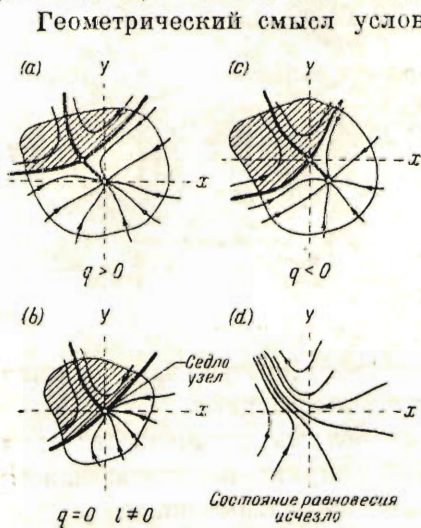
Фиг. 2.

окрестности состояния равновесия), тогда как в первом случае это выбивание невозможно.

Из схем видно также различие в поведении системы при нарушении условий устойчивости Рауса-Гурвица.

Переход через границу  $R=0$  в первом случае при  $L(\lambda_0) < 0$  соответствует возникновению области неустойчивости внутри устойчивого предельного цикла (фиг. 1), которая, однако, остается сколь угодно малой при достаточно малом нарушении условия устойчивости и стягивается в точку при обратном изменении параметра.

Изображающая точка при этом возвращается в состояние равновесия, система ведет себя обратимо. Во втором случае при  $L(\lambda_0) > 0$  переход через границу  $R=0$  соответствует исчезанию области устойчивости внутри неустойчивого предельного цикла, изображающая точка при этом срывается с состояния равновесия и уходит за пределы рассматриваемой окрестности состояния равновесия. При обратном изменении параметра изображающая точка не возвращается в состояние равновесия, т. е. система ведет себя необратимо.



Фиг. 3.

Для системы (2.1) при приближении к границе  $r=0$  возрастает опасность быть выброшенной случайным толчком из устойчивого состояния равновесия. При  $r < 0$  состояние равновесия вначале неустойчиво (фиг. 3, c). Заметим также, что при подходящем введении параметра двойная точка может исчезнуть при сколь угодно малом изменении параметров системы (фиг. 3, d).

Можно указать простой аналитический критерий для суждения о возможности исчезновения состояния равновесия при некотором определенном введении параметра. Рассмотрим систему

$$\frac{d\xi}{dt} = P^*(\xi, \eta; \lambda), \quad \frac{d\eta}{dt} = Q^*(\xi, \eta; \lambda) \quad (2.21)$$

где  $P^*$  и  $Q^*$  — аналитические функции  $\lambda$ , причем здесь не предполагается, что  $P^*(0, 0; \lambda) = Q^*(0, 0; \lambda) = 0$ .

Состояния равновесия системы определяются из условий

$$P^*(\xi, \eta; \lambda) = 0, \quad Q^*(\xi, \eta; \lambda) = 0,$$

определяющих в пространстве  $\xi\eta\lambda$  некоторую кривую. Эта кривая для бифуркационного значения параметра  $\lambda = \lambda_0$  (определяемого из условия  $r_2(\lambda_0) = 0$  при дополнительном условии  $l(\lambda_0) \neq 0$ ) имеет с плоскостью



$\lambda = \lambda_0$  двойную точку. В силу аналитической природы функций  $P^*$  и  $Q^*$  при этих условиях имеются только две возможности; либо плоскость  $\lambda = \lambda_0$  проходит через касательную к кривой  $P^* = 0$ ,  $Q^* = 0$ , либо пересекает кривую в кратной точке. В первом случае предельные значения  $d\zeta/d\lambda$  и  $d\eta/d\lambda$  имеют в точке  $\zeta_0$ ,  $\eta_0$ ,  $\lambda_0$  определенное значение, во втором это не имеет места.

Выражения для производных имеют вид:

$$\frac{d\zeta}{d\lambda} = \frac{\Delta_1}{r} \quad \frac{d\eta}{d\lambda} = \frac{\Delta_2}{r}$$

где

$$r = \frac{\partial P^*}{\partial \xi} \frac{\partial Q^*}{\partial \eta} - \frac{\partial Q^*}{\partial \xi} \frac{\partial P^*}{\partial \eta}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial P^*}{\partial \eta} \frac{\partial Q^*}{\partial \xi} - \frac{\partial Q^*}{\partial \eta} \frac{\partial P^*}{\partial \xi}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial P^*}{\partial \lambda} \frac{\partial Q^*}{\partial \eta} - \frac{\partial Q^*}{\partial \lambda} \frac{\partial P^*}{\partial \xi}$$

Заметим, что  $r = P_{\xi}^* Q_{\eta}^* - Q_{\xi}^* P_{\eta}^*$  для каждой пары значений  $\zeta_0$ ,  $\eta_0$ , определяемых из уравнений,  $P^* = 0$ ,  $Q^* = 0$ , совпадает с свободным членом характеристического уравнения для соответствующего состояния равновесия  $\zeta_0, \eta_0$ , так как переход от системы (2.21) к (2.1) соответствует преобразованию координат  $\xi = \zeta_0 + x$ ,  $\eta = \eta_0 + y$ , в силу которого

$$\begin{aligned} P_{\xi}^* (\zeta_0, \eta_0, \lambda) &= a, & Q_{\eta}^* (\zeta_0, \eta_0, \lambda) &= d \\ P_{\eta}^* (\zeta_0, \eta_0, \lambda) &= b, & Q_{\xi}^* (\zeta_0, \eta_0, \lambda) &= c \end{aligned}$$

В точке  $(\zeta_0, \eta_0, \lambda_0)$  будет  $r = 0$ , поэтому вопрос решается значением в этой точке определителей  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  (заметим, что они обращаются в нуль одновременно): если, например,  $\Delta_1(\zeta_0, \eta_0, \lambda_0)$  отлично от нуля, то при сколь угодно малом изменении параметра  $\lambda$  в подходящем направлении состояние равновесия исчезает, если же  $\Delta_1(\zeta_0, \eta_0, \lambda_0) = 0$ , то при достаточно малом изменении параметра в любом направлении состояние равновесия остается.

5° *Пример. Симметричный полет самолета в вертикальной плоскости с постоянным углом атаки.* Пусть продольная ось самолета совпадает с направлением силы тяги винта, тогда уравнения движения самолета можно написать в виде

$$\begin{aligned} \frac{G}{g} \frac{dV}{dt} &= S \cos \beta - G \sin \varphi - c_w F \frac{\rho V^2}{2} \\ \frac{G}{g} \frac{d\varphi}{dt} &= S \sin \beta - G \cos \varphi - c_a F \frac{\rho V^2}{2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

где  $S$  — сила тяги винта,  $V$  — скорость самолета,  $\varphi$  — угол между направлением скорости центра тяжести самолета и горизонтом,  $G$  — вес самолета,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\beta$  — угол между направлением скорости центра тяжести и направлением тяги винта,  $F$  — площадь несущей поверхности,  $\rho$  — удельный вес воздуха,  $c_a$  и  $c_w$  — некоторые коэффициенты, зависящие от лобового сопротивления и подъемной силы при постоянном угле атаки [11].

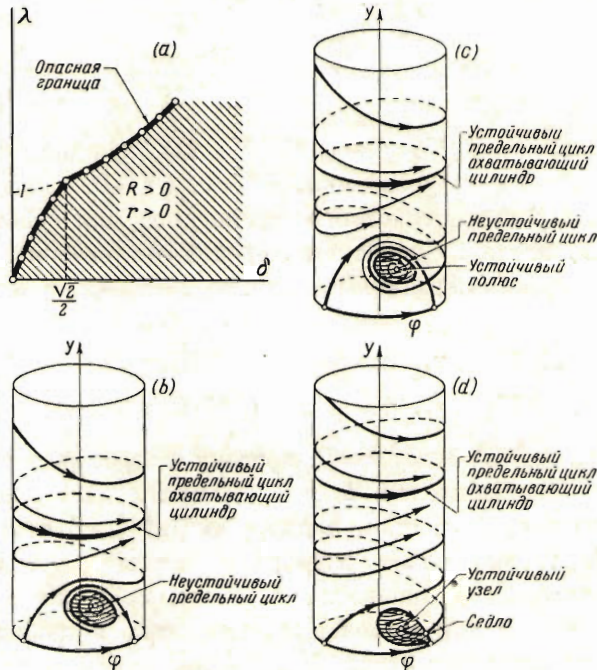
Считая угол  $\beta$  настолько малым, что без существенной погрешности можно положить  $S \cos \beta \approx S$  и  $\sin \beta \approx \beta$ , и вводя новые переменные  $\tau$  и  $y$  с помощью соотношений

$$y = V \sqrt{\frac{c_a \rho F}{2g}}, \quad \tau = gt \sqrt{\frac{c_w \rho F}{2g}}$$

приводим систему (2.22) к виду

$$\frac{dy}{d\tau} = \lambda - \delta y^2 - \sin \varphi, \quad y \frac{d\varphi}{d\tau} = y^2 - \cos \varphi \quad (2.23)$$

содержащему всего два параметра  $\lambda = S/G$  и  $\delta = c_w/c_a$ .



Фиг. 4.

Переносим начало координат в особую точку  $(\varphi_0, y_0)$ . Полагая  $\varphi = \varphi_0 + \psi, y = \sqrt{\cos \varphi_0} + \eta$ , получаем в новых координатах

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{d\tau} &= -y_0^2 \psi - 2\delta y_0 \eta + \frac{1}{2} \sin \varphi_0 \psi^2 - \delta \eta^2 + \frac{1}{6} y_0^2 \psi^3 + \dots \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \frac{\sin \varphi_0}{y_0} \psi + 2\eta + \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi_0}{y_0} \psi^2 - \frac{\sin \varphi_0}{y_0^2} \psi \eta - \frac{1}{y_0} \eta^2 - \frac{1}{6} \frac{\sin \varphi_0}{y_0} \psi^3 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \psi^2 \eta + \frac{\sin \varphi_0}{y_0^3} \psi \eta^2 + \frac{1}{y_0^2} \eta^3 + \dots \end{aligned}$$

Координаты особых точек легко определяются из уравнений

$$\lambda - \delta y^2 - \sin \varphi = 0, \quad y^2 - \cos \varphi = 0$$

Корни этой системы будут

$$y_0^2 = \cos \varphi_0 = \frac{\lambda \delta \pm \sqrt{1 + \delta^2 - \lambda^2}}{1 + \delta^2} \quad (2.24)$$

Положительному значению корня соответствует состояние равновесия типа фокус или узел, отрицательному — седло.

Условия Рауса-Гурвица дают для первой точки неравенства

$$p = -\left(\frac{\sin \varphi_0}{y_0} - 2\delta y_0\right) > 0, \quad q = 2y_0^2 - \frac{\sin \varphi_0}{y_0} 2\delta y_0 > 0$$

Если исключить с помощью (2.24) из последних неравенств координаты состояния равновесия, то эти условия сведутся соответственно к неравенствам

$$\lambda - 3\delta \left(\frac{\lambda\delta + \sqrt{1 + \delta^2 - \lambda^2}}{1 + \delta^2}\right) < 0, \quad 1 + \delta^2 - \lambda^2 > 0$$

Эти условия ограничивают область, изображенную на фиг. 4. Замечая, что для состояния равновесия на границе  $p = 0$  имеем

$$y_0^2 = \cos \varphi_0, \quad \sin \varphi_0 = \lambda - \delta \cos \varphi_0 = 3\delta \cos \varphi_0 - \delta \cos \varphi_0 = 2\delta \cos \varphi_0$$

для коэффициентов преобразованной системы получаем

$$\begin{aligned} a &= 2\delta \sqrt{\cos \varphi_0}, & b &= 2, & c &= -\cos \varphi_0, & d &= -2\delta \sqrt{\cos \varphi_0} \\ A_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\cos \varphi_0}, & A_{11} &= -2\delta, & A_{02} &= \frac{-1}{\sqrt{\cos \varphi_0}}, & A_{30} &= -\frac{1}{3} \delta \sqrt{\cos \varphi_0} \\ A_{21} &= -\frac{1}{2}, & A_{12} &= \frac{2\delta}{\sqrt{\cos \varphi_0}}, & A_{03} &= \frac{1}{\cos \varphi_0}, & B_{20} &= \delta \cos \varphi_0, \\ B_{02} &= -\delta, & B_{30} &= \frac{1}{6} \cos \varphi_0, & B_{11} &= B_{21} = B_{12} = B_{03} = 0 \end{aligned}$$

Подставляя значения коэффициентов в выражение (2.6) для  $L(\lambda_0)$ , получаем после упрощений

$$L(\lambda_0) = \frac{\pi\delta(4\delta^2 + 1)}{\sqrt{2(1 - 2\delta^2)}} > 0$$

Таким образом, граница  $p = 0$  будет опасной. Ясное представление о поведении системы дает рассмотрение разбиения фазового пространства на траектории.

Выбирая за фазовое пространство цилиндр, рассмотрим вблизи границы области устойчивости некоторые характерные случаи разбиения цилиндра на траектории (фиг. 4). Фиг. 4, *b* соответствует  $\lambda < 1$ , фиг. 4, *c* соответствует  $\lambda > 1$  (в обоих случаях не слишком далеко от границы  $p = 0$ ). Область устойчивости, для точек которой элементом притяжения является состояние равновесия (внутренность неустойчивого предельного цикла, не охватывающего цилиндр), стягивается при приближении к границе  $p = 0$  к состоянию равновесия.

При достаточной близости к границе  $p = 0$  система случайным толчком может быть выбита из состояния равновесия. Как показывают фиг. 4, *b* и 4, *c*, если случайный толчок был таков, что изображающая точка перепрыгнула через предельный цикл, то она уже не возвра-

щается обратно в состояние равновесия, а удаляется от состояния равновесия, наворачиваясь на цилиндр и приближаясь к устойчивому предельному циклу, охватывающему цилиндр. Не представляет труда убедиться, что на границе  $q=0$  выполняется условие  $l(\lambda_0) \neq 0$ . В самом деле, заметив, что на границе  $q=0$  имеют место соотношения

$$y_0^2 = \delta \sin \varphi_0 \quad (ad - bc = 0), \quad y_0^2 = \cos \varphi_0 = \frac{\lambda \delta}{1 + \delta^2}$$

получаем для коэффициентов преобразованной системы

$$a = \frac{y_0}{\delta}, \quad b = 2, \quad c = -y_0^2, \quad d = -2\delta y_0, \quad A_{20} = \frac{y_0}{2} \\ A_{11} = -\frac{1}{\delta}, \quad A_{02} = -\frac{1}{y_0}, \quad B_{20} = \frac{y_0^2}{2\delta}, \quad B_{11} = 0, \quad B_{02} = -\delta$$

Подставляя значение коэффициентов в выражение (2.20), получим

$$l(\lambda_0) = -\frac{3\delta^3(1+\delta^2)}{\lambda(1-2\delta^2)^2} \neq 0$$

(На границе  $q=0$  будет  $1-2\delta^2 < 0$ .) Таким образом, также и вблизи границы  $q=0$  может происходить выбивание системы из устойчивого состояния равновесия случайным толчком.

Схема разбиения цилиндра на траектории вблизи границы  $q=0$  представлена на фиг. 4.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
2. Routh. Stability of Motion. London. 1877.
3. Hurwitz. Math. Ann. 1895. Vol. 46. S. 273.
4. Андронов А. А. и Леонтович Е. А. К теории изменений качественной структуры разбиения плоскости на траектории. ДАН. 1938. Т. XIII. Вып. 9.
5. Андронов А. А. и Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра. Учен. зап. Горьковского гос. университета. 1939. № 6.
6. Леонтьев А. О рождении цикла в трехмерном пространстве. 1939. Студенч. работы Горьковского государственного университета.
7. Кузьмин П. А. Замечания о смене устойчивости установившегося движения. Сб. труд. Каз. авиац. ин-та. № 10.
8. Баутин Н. Н. О рождении предельного цикла из состояния равновесия типа фокус. ЖТФ. 1938. № 6.
9. Poincaré H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris. 1892. F. 1.
10. Баутин Н. Н. Об одном дифференциальном уравнении, имеющем предельный цикл. ЖТФ. 1939. Вып. 7.
11. Fuchs-Hopf, Seewald. Aerodynamik.