Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ, БЛИЗКИХ К СИСТЕМАМ ЛЯПУНОВА

И. Г. Малкин

(Свердловск)

Введение

С точки зрения математической одной из основных задач теории нелинейных колебаний является отыскание периодических решений системы нелинейных дифференциальных уравнений. В настоящей работе мы исследуем методами Ляпунова-Пуанкаре периодические решения системы нелинейных дифференциальных уравнений вида (0.1)

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X(x, y) + \mu f(t, x, y, \mu), \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda x + Y(x, y) + \mu F(t, x, y, \mu)$$

Здесь λ — положительная постоянная, X и Y — аналитические функции от x и y в окрестности точки $x = y = 0$, разложения которых начинаются членами не ниже второго порядка, μ — малый параметр, f и F — аналитические функции x, y и μ в окрестности точки $x = y = \mu = 0$. Разложения f и F содержат, вообще говоря, и линейные и свободные члены, причем коэффициенты этих разложений являются непрерывными периодическими функциями времени периода 2π, разлагающимися в ряды Фурье.

Будем предполагать, кроме того, что

$$X = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad Y = \frac{\partial H}{\partial x} \tag{0.2}$$

где H — аналитическая функция x, y, разложение которой начинается членами не ниже третьего порядка.

Согласно Пуанкаре[1] отыскание периодических решений системы (1) приводится к решению трех следующих задач.

1. Отысканию *порождающих* решений, т. е. периодических решений системы (1) при $\mu = 0$.

2. Выяснению условий, при которых порождающим решениям отвечают периодические решения системы (отбор порождающих решений).

3. Вычислению для отобранных порождающих решений соответствующих (т. е. обращающихся при $\mu = 0$ в порождающие) периодических решений системы (0.1).

Каждая из поставленных задач весьма трудна и может быть практически разрешена только при некоторых ограничительных условиях, наложенных на системы (0.1).

Наиболее простым будет, очевидно, тот случай, когда функции X и Y будут равны нулю, т. е. когда система (0.1) мало отличается от линейной. Такого рода «квазилинейные» системы в настоящее время очень хорошо и полно изучены.

Однако многие физические задачи не могут быть успешно решены при помощи такой квазилинейной трактовки даже в тех случаях, когда уравнение колебаний действительно мало отличается от линейного.

Рассмотрим для пояснения так называемую задачу Дюффинга, а именно, рассмотрим вынужденные колебания системы, определяемые дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x - \gamma x^3 = a \cos nt \tag{0.3}$$

где n — целое число и $\gamma > 0$. Физически эта задача имеет ту характерную особенность, что при $k^2 < n^2 + \alpha$, где α — некоторое положительное число, в системе устанавливается вполне определенный режим вынужденных колебаний, а при $k^2 > n^2 + \alpha$ в системе одновременно возможны несколько режимов вынужденных колебаний. Следовательно, уравнение (0.3) должно допускать при $k^2 > n^2 + \alpha$ несколько периодических решений. Однако, если уравнение (0.3) трактовать как квазилинейное, то получим только одно периодическое решение.

В самом деле, считая γ малой величиной, положим $\gamma = \mu\gamma'$ и рассмотрим квазилинейное уравнение

$$\frac{dx^2}{dt^2} + k^2x - a \cos nt = \mu\gamma' x^3 \tag{0.4}$$

Здесь приходится различать два случая.

1. *Нерезонансный случай*, т. е. случай, когда $k^2 - n^2$ не слишком мало. В этом случае, применяя хорошо известные методы, получим единственное периодическое решение уравнения (0.3):

$$x = \frac{a}{k^2 - n^2} \cos nt + \mu \left\{ \frac{3\gamma' a^3}{4(k^2 - n^2)^4} \cos nt + \frac{\gamma' a^3}{4(k^2 - n^2)^3 (k^2 - 9n^2)} \cos 3nt \right\} + \cdots$$

2. *Резонансный случай*, т. е. случай, когда $k^2 - n^2$ очень мало. В этом случае, полагая $n^2 - k^2 = \mu\lambda$, $a = \mu a'$, представим (0.4) в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \mu (\gamma' x^3 + \lambda x + a' \cos nt) \tag{0.5}$$

и затем, применяя соответствующие правила, находим

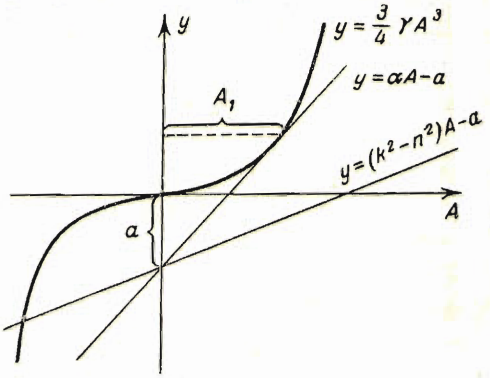
$$x = A \cos nt + \mu \left\{ \frac{3\gamma'^2 A^5}{238 n^2 (^9/_4 \gamma' A^2 + \lambda)} \cos nt - \frac{\gamma' A^3}{32 n^2} \cos 3nt \right\} \tag{0.6}$$

где A — корень уравнения $^3/_4 \gamma' A^3 + \gamma A + a' = 0$, или в первоначальных обозначениях

$$\frac{3}{4} \gamma A^3 + (n^2 - k^2) A + a = 0 \tag{0.7}$$

Корни этого уравнения получаются графически как абсциссы точек пересечения прямой $y = (k^2 - n^2) A - a$ и кубической параболы $y = {^3/_4} \gamma A^3$.

Из чертежа (фиг. 1) видно, что, когда разность $k^2 - n^2$ достаточно мала, а именно, не превосходит величины α, уравнение (0.7) имеет только один вещественный корень, которому соответствует только одно периодическое решение. Правда, при $k^2 > n^2 + \alpha$ уравнение (0.7) будет иметь три корня, что как будто бы находится в соответствии с физической картиной колебаний. Однако не следует забывать, что уравнение (0.5) написано в предположении, что величина $k^2 - n^2$ достаточно мала. Только при таком предположении можно быть уверенным, что ряд (0.6) сходится и представляет действительное, а не формальное решение уравнения колебаний. И действительно, легко видеть, что когда k^2 достигает значения $n^2 + \alpha$, ряд (6) теряет для корня A_1 всякий смысл, так как для него, как для двойного корня, будет ${}^9/_4\,\gamma' A^2 + \lambda = 0$.



Фиг. 1.

Таким образом, для уравнения (0.3) при квазилинейной трактовке как вблизи резонанса, так и вдали от него получается только одно периодическое решение, что находится в противоречии с физической картиной колебаний. Чтобы получить правильное описание колебания, следует уравнение (3) представлять в форме

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x - \gamma x^3 = \mu a' \cos nt$$

т. е. трактовать его не как квазилинейное.

Ниже в разделе 4 исследуется задача Дюффинга при учете влияния сопротивления в предположении, что внешняя сила содержит не одну, а две гармоники. В качестве второго примера неудовлетворительности квазилинейной трактовки рассматривается резонансный случай

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x + \beta x^2 = a \cos nt \tag{0.8}$$

Если к этому уравнению применить обычные правила исследования резонанса для квазилинейных уравнений и представить его в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = \mu\,(a' \cos nt - \beta' x^2)$$

то при этом окажется, что уравнение (0.8) не имеет периодического решения, что неверно. Уравнение (0.8) рассматривается в разделе II.

Однако задача колебаний может быть эффективно разрешена для систем значительно более общих. А именно, вместо квазилинейности можно предполагать, что при $\mu = 0$ система обращается в *систему Ляпунова*. Так мы называем нелинейные системы, для которых существует аналитический первый интеграл определенного вида (соответствующий в механической задаче интегралу энергии) и для которых характеристическое уравнение линейной части имеет по крайней мере одну пару чисто мнимых корней. Периодические решения такого рода систем подробно изучены Ляпуновым [2].

Так как для одной степени свободы условие существования первого интеграла незначительно шире условия консервативности, то для упрощения вычислений предполагается, что при $\mu = 0$ система консервативна и, следовательно, уравнения колебаний имеют вид (0.1).

В разделе I уравнения (0.1) исследуются вдали от резонанса. Раздел II посвящается теории резонанса. В разделе III даются критерии устойчивости по Ляпунову периодических решений, полученных в разделах I и II. Раздел IV, как уже указывалось, посвящен задаче Дюффинга.

Система (0.1) в случае, когда f и F не содержит явно времени, была исследована Л. Понтрягиным [3], который ограничился только установлением правила для отбора порождающих решений.

I. Неавтономные системы вдали от резонанса

§ 1. Порождающие решения. n° 1. Допустим, что колебания системы с одной степенью свободы описываются уравнениями (0.1).

Рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_0}{dt} = -\lambda y_0 + X(x_0, y_0), \qquad \frac{dy_0}{dt} = \lambda x_0 + Y(x_0, y_0) \tag{1.1}$$

в которые обращаются уравнения (0.1) при $\mu = 0$. Эти уравнения будем называть *порождающими*. Так как для уравнений (1.1) существует аналитический первый интеграл

$$\frac{1}{2}\lambda(x_0^2 + y_0^2) + H(x_0, y_0) = \text{const}$$

содержащий член второго порядка, то, как показал Ляпунов, общее решение этих уравнений при достаточно малых начальных значениях β_1 и β_2 величин x_0 и y_0 будет периодическим с периодом, зависящим аналитически от β_1 и β_2. А именно, для периода T имеем

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}[1 + H_{2s}C^{2s} + H_{2s+2}C^{2s+2} + \ldots] \quad \left(C^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \frac{2}{\lambda}H(\beta_1, \beta_2)\right) \tag{1.2}$$

где $H_{2s}, H_{2s+2}, \ldots$ — постоянные и разложение правой части содержит только четные степени C.

Для практического вычисления периода T и функций x_0 и y_0 Ляпунов предложил несколько методов. Приведем вкратце один из них, наиболее удобный для нашей цели.

Будем искать решение уравнений (1.1) с начальными условиями

$$\beta_1 = x_0(0) = c, \qquad \beta_2 = y_0(0) = 0 \tag{1.3}$$

где c — произвольная, достаточно малая постоянная.

Подставляя в выражение периода T значения β_1 и β_2 и разлагая в ряд по степеням c, будем иметь

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_l c^l + \ldots)$$

Этот ряд будет, вообще говоря, содержать также и нечетные степени c, но младшая степень c будет четной, так как $l = 2s$, $h_l = H_{2s}$.

В общем случае число l будет равно 2. Заменим теперь в уравнениях (1.1) время t переменной τ при помощи подстановки

$$t = \frac{\tau}{\lambda}(1 + h_2c^2 + \ldots)$$

постоянные h_2, h_3, ... пока не определены. Для полученных уравнений

$$\frac{dx_0}{d\tau} = \left(-y_0 + \frac{1}{\lambda}X\right)(1 + h_2c^2 + \ldots), \qquad \frac{dy_0}{d\tau} = \left(x_0 + \frac{1}{\lambda}Y\right)(1 + h_2c^2 + \ldots)$$

решение с начальными условиями (1.3) будет обязательно периодическим с периодом 2π. Это решение в силу хорошо известных теорем о зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра и начальных условий может быть представлено в виде рядов

$$x_0(\tau) = cx_{01}(\tau) + c^2x_{02}(\tau) + \ldots, \qquad y_0(\tau) = cy_{01}(\tau) + c^2y_{02}(\tau) + \ldots$$

сходящихся при достаточно малых значениях $|c|$. Так как период функций $x_{0i}(\tau)$ и $y_{0i}(\tau)$, равный 2π, не зависит от c, то все функции $x_{0i}(\tau)$ и $y_{0i}(\tau)$ должны быть также периодическими с периодом 2π.

Это условие вместе с начальными условиями

$$x_{01}(0) = 1, \qquad y_{01}(0) = 0; \qquad x_{0s}(0) = y_{0s}(0) = 0 \qquad (s > 1)$$

однозначно определяет как функции x_{0s}, y_{0s}, так и постоянные h_s.

В самом деле, для x_{01} и y_{01}, очевидно, имеем $x_{01} = \cos\tau$, $y_{01} = \sin\tau$. Допустим, что все x_{0s}, y_{0s}, а также h_{s-1}, для которых $s < k$, уже вычислены и получились вполне определенными. Тогда для нахождения x_{0k} и y_{0k} имеем уравнения

$$\frac{dx_{0k}}{d\tau} = -y_{0k} - h_{k-1}\sin\tau + X_k(\tau), \qquad \frac{dy_{0k}}{d\tau} = x_{0k} + h_{k-1}\cos\tau + Y_k(\tau) \qquad (1.4)$$

где $X_k(\tau)$ и $Y_k(\tau)$ будут известными рациональными функциями от $x_1, \ldots, x_{k-1}$, $y_1, \ldots, y_{k-1}$, $h_2, \ldots, h_{k-2}$ и, следовательно, известными периодическими функциями от τ периода 2π.

Обозначим соответственно через A_1 и A_2; B_1 и B_2 коэффициенты при $\cos\tau$ и $\sin\tau$ в разложениях Фурье функций $X_k(\tau)$ и $Y_k(\tau)$. Тогда, как нетрудно видеть, для того чтобы уравнения (1.4) допускали периодические решения, необходимо и достаточно, чтобы

$$A_1 + B_2 = 0, \qquad h_{k-1} = \tfrac{1}{2}(A_2 - B_1)$$

Как показал Ляпунов, первое из этих условий при нашем предположении о существовании первого интеграла всегда выполняется. Что же касается второго условия, то оно однозначно и определяет h_{k-1}.

При таком выборе постоянной h_{k-1} все решения уравнений (1.4) будут периодическими и будут иметь вид:

$$x_{0k} = A\cos\tau + B\sin\tau + x_k^*(\tau), \qquad y_{0k} = A\sin\tau - B\cos\tau + y_k^*(\tau)$$

где $x_k^*(\tau)$, $y_k^*(\tau)$ — определенные периодические функции τ, а A и B — произвольные постоянные. Эти постоянные однозначно определяются из начальных условий.

Таким образом, все функции x_{0k}, y_{0k} и все постоянные h_k последовательно определяются при помощи весьма простых вычислений. Легко видеть, что при этом функции x_{0k} и y_{0k} будут получаться в виде конечных рядов синусов и косинусов целых кратностей τ.

Мы получили способ определения частного решения уравнений (1.1), содержащего одну произвольную постоянную. Чтобы получить общее решение этих уравнений, как легко видеть, достаточно заменить t на $t-\alpha$, где α — произвольная постоянная. Таким образом, общее решение уравнений (1.1) определяется формулами

$$\begin{aligned} x_0(t-\alpha) &= c\cos\tau + c^2 x_{02}(\tau) + \cdots \\ y_0(t-\alpha) &= c\sin\tau + c^2 y_{02}(\tau) + \cdots \end{aligned} \qquad \left(\tau = \frac{\lambda(t-\alpha)}{1+h_2c^2+\cdots}\right) \tag{1.5}$$

где периодические, периода 2π, функции $x_{0k}(\tau)$, $y_{0k}(\tau)$ и постоянные h_k определяются вышеуказанным способом, а c и α — произвольные постоянные. Для периода T имеем

$$T = \frac{2\pi}{\lambda}(1 + h_2 c^2 + \cdots)$$

Все ряды, входящие в эти формулы, сходятся при достаточно малых значениях $|c|$ и при произвольном α.

Эти формулы дают возможность вычислить решение и период с какой угодно степенью точности. Все вычисления настолько просты, что этими формулами целесообразно пользоваться даже тогда, когда уравнения (1.1) могут быть проинтегрированы в замкнутой форме при помощи хорошо изученных функций, например, эллиптических.

n° 2. Согласно методу Пуанкаре для нахождения периодических решений полной системы уравнений (0.1) необходимо прежде всего найти все решения уравнений (1.1), имеющие период 2π или целую часть его. На основании вышеизложенного для нахождения этих решений мы должны, оставляя величину α произвольной, величину c определить из соотношения

$$T = \frac{2\pi}{n} \tag{1.6}$$

где n — произвольное целое число. Полученное, таким образом, значение c будем обозначать через c_n. Соответствующее $c = c_n$ решение уравнений (1.1) условимся обозначать через $\{x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha)\}$. На основании (1.5) имеем

$$\begin{aligned} x_0^{(n)}(t-\alpha) &= c_n\cos\tau + c_n^2 x_{02}(\tau) + \cdots \\ y_0^{(n)}(t-\alpha) &= c_n\sin\tau + c_n^2 y_{02}(\tau) + \cdots \end{aligned} \qquad \left(\tau = n(t-\alpha)\right) \tag{1.7}$$

Все эти решения будем называть *порождающими*. Искомые периодические решения полной системы (0.1) будут стремиться при уменьшении $|\mu|$ к соответствующему порождающему решению. Следует, однако, иметь в виду, что не для каждого порождающего решения существует периодическое решение полной системы. В рассматриваемом случае, так как порождающие решения $\{x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha)\}$ зависят от произвольного параметра α, периодические решения полной системы будут существовать, как это увидим ниже и как это вытекает из общей теории Пуанкаре, только при определенных значениях параметра α.

Кроме $\{x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha)\}$, порождающим решением будет также являться тривиальное решение $x_0 = y_0 = 0$ системы (1.1), которое, очевидно, можно рассматривать как периодическое, периода 2π.

Рассмотрим подробнее уравнение, определяющее c_n. Пусть h_{2s} — первая из постоянных $h_2, h_3, \ldots$, не обращающаяся в нуль. Уравнение (1.6) имеет вид:

$$h_{2s} c_n^{2s} + h_{2s+1} c_n^{2s+1} + \ldots = \frac{\lambda - n}{n} \tag{1.8}$$

Это уравнение всегда имеет $2s$ решений, обращающихся в нуль при $\lambda - n = 0$. Если $h_{2s}(\lambda - n) < 0$, то все эти решения будут комплексными. Если $h_{2s}(\lambda - n) > 0$, то два и только два решения будут вещественными и при этом одно из них будет положительным, а другое отрицательным. Следовательно, при $h_{2s} > 0$ числу n можно приписывать любые целые значения, меньшие λ, а при $h_{2s} < 0$ любые целые значения, большие λ.

Выбирая таким способом число n, получим для каждого n два порождающих решения $\{x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha)\}$.

§ 2. Условия существования периодических решений $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$.

n° 1. Обозначим через $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t)\}$ периодическое решение полной системы уравнений (0.1), обращающееся в $\{x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha)\}$ при $\mu = 0$. Пусть

$$x_0^{(n)}(0) + \beta_1, \qquad y_0^{(n)}(0) + \beta_2 \tag{2.1}$$

будут начальные значения искомого решения, где за начальный момент времени принято $t = \alpha$. Величины β_1 и β_2 будут неизвестными функциями μ, обращающимися в нуль при $\mu = 0$. Легко составить уравнения, которым должны удовлетворять эти функции. Обозначим через $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ и $y(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ решение уравнений (0.1) с начальными условиями (2.1). Для того чтобы это решение было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы при всех значениях t выполнялись условия (2.2)

$$x(t+2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) = x(t, \beta_1, \beta_2, \mu), \qquad y(t+2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) = y(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$$

Так как уравнения (0.1) периодичны относительно t с периодом 2π, то, как нетрудно видеть, условия (2.2) будут выполняться при всех значениях t, если они выполняются хотя бы для одного значения t. Примем в качестве такого значения t величину α. Тогда необходимыми и достаточными условиями периодичности рассматриваемого решения будут служить уравнения (2.3)

$$x(2\pi+\alpha, \beta_1, \beta_2, \mu) - x_0^{(n)}(0) - \beta_1 = 0 \qquad y(2\pi+\alpha, \beta_1, \beta_2, \mu) - y_0^{(n)}(0) - \beta_2 = 0$$

которые и определяют неизвестные функции $\beta_1(\mu)$ и $\beta_2(\mu)$.

Исследуем подробнее эти уравнения. На основании известных теорем функции $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ и $y(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ разлагаются в ряды по степеням

β_1, β_2 и μ, сходящиеся при достаточно малых значениях модулей этих величин. Пусть (2.4)

$$x = x_0^{(n)}(t-\alpha) + A_1\beta_1 + B_1\beta_2 + C_1\mu + D_1\beta_1\mu + E_1\beta_2\mu + \\ + F_1\beta_1\beta_2 + G_1\beta_1^2 + H_1\beta_2^2 + K_1\mu^2 + \dots$$

$$y = y_0^{(n)}(t-\alpha) + A_2\beta_1 + B_2\beta_2 + C_2\mu + D_2\beta_1\mu + E_2\beta_2\mu + \\ + F_2\beta_1\beta_2 + G_2\beta_1^2 + H_2\beta_2^2 + K_2\mu^2 + \dots$$

Введем обозначение $[\varphi(t)] = \varphi(2\pi+\alpha) - \varphi(\alpha)$. Тогда уравнения (2.3) примут вид:

$$[A_\nu]\beta_1 + [B_\nu]\beta_2 + [C_\nu]\mu + [D_\nu]\beta_1\mu + [E_\nu]\beta_2\mu + [F_\nu]\beta_1\beta_2 + \\ + [G_\nu]\beta_1^2 + [H_\nu]\beta_2^2 + [K_\nu]\mu^2 + \dots = 0 \quad (\nu = 1, 2) \tag{2.5}$$

Для нахождения коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2, ... подставим ряды (2.4) в уравнения (0.1) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях β_1, β_2, μ. Тогда как для A_1, A_2, так и для B_1, B_2 получим одну и ту же систему уравнений:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = p_{11}\xi_1 + p_{12}\xi_2, \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = p_{21}\xi_1 + p_{22}\xi_2 \tag{2.6}$$

Здесь

$$p_{11} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right), \quad p_{12} = -\lambda + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right), \quad p_{21} = \lambda + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right), \quad p_{22} = \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \tag{2.7}$$

причем скобки обозначают, что после дифференцирования величины x и y заменены их значениями в порождающем решении, т. е. величинами $x_0^{(n)}(t-\alpha)$ и $y_0^{(n)}(t-\alpha)$. Коэффициенты p_{ik} являются, очевидно, периодическими функциями t с периодом 2π.

Для A_1, A_2 и B_1, B_2 начальные условия соответственно будут

$$A_1(\alpha) = 1, \quad A_2(\alpha) = 0; \qquad B_1(\alpha) = 0, \quad B_2(\alpha) = 1 \tag{2.8}$$

Для коэффициентов C_1 и C_2 имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= p_{11}C_1 + p_{12}C_2 + f[t, x_0^{(n)}(t-\alpha), y_0^{(n)}(t-\alpha), 0] \\ \frac{dC_2}{dt} &= p_{21}C_1 + p_{22}C_2 + F[t, x_0^{(n)}(t-\alpha), y_0^{(n)}(t-\alpha), 0] \end{aligned} \tag{2.9}$$

Уравнения, которым удовлетворяют остальные коэффициенты, отличаются от уравнений для C_1 и C_2 только неоднородной частью. Эти уравнения будут приводиться по мере надобности. Начальные условия для всех этих коэффициентов, так же как и для C_1 и C_2, имеют вид:

$$C_1(\alpha) = C_2(\alpha) = D_1(\alpha) = D_2(\alpha) = \dots = 0 \tag{2.10}$$

n° 2. Таким образом, для нахождения интересующих нас коэффициентов, необходимо, прежде всего, проинтегрировать систему линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (2.6). Эти уравнения, как нетрудно видеть, представляют собой *систему уравнений в вариациях* для порождающей системы (1.1), если в качестве невозмущенного движения будет принято порождающее решение $\{x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha)\}$.

Так как для уравнений (1.1) известно общее решение (1.5), зависящее от двух произвольных постоянных c и α, то на основании известных свойств уравнений в вариациях, функции

$$\xi_1=\left(\frac{dx_0}{d\alpha}\right)_{c=c_n} \qquad \xi_2=\left(\frac{dy_0}{d\alpha}\right)_{c=c_n} \tag{2.11}$$

$$\xi_1=\left(\frac{dx_0}{dc}\right)_{c=c_n} \qquad \xi_2=\left(\frac{dy_0}{dc}\right)_{c=c_n} \tag{2.12}$$

представляют два частных решения уравнений (2.6). В этом можно также убедиться дифференцированием уравнений (2.6) по c и α.

Введем обозначения

$$\varphi_1(t-\alpha)=\left(\frac{\partial x_0}{\partial\tau}\right)_{c=c_n}=\left(-c\sin\tau+c^2\frac{dx_{02}(\tau)}{d\tau}+\cdots\right)_{c=c_n} \tag{2.13}$$

$$\varphi_2(t-\alpha)=\left(\frac{\partial y_0}{\partial\tau}\right)_{c=c_n}=\left(\quad c\cos\tau+c^2\frac{dy_{02}(\tau)}{d\tau}+\cdots\right)_{c=c_n} \tag{2.14}$$

Принимая во внимание уравнение (1.8), определяющее c_n, имеем

$$\varphi_1(t-\alpha)=\frac{1}{n}\,\frac{dx_0^{(n)}(t-\alpha)}{dt}, \qquad \varphi_2(t-\alpha)=\frac{1}{n}\,\frac{dy_0^{(n)}(t-\alpha)}{dt} \tag{2.15}$$

Обозначим далее

$$\begin{aligned}\psi_1(t-\alpha)&=\left(\frac{\partial x_0}{\partial c}\right)_{c=c_n}=\cos n(t-\alpha)+2c_nx_{02}[n(t-\alpha)]+\cdots\\ \psi_2(t-\alpha)&=\left(\frac{\partial y_0}{\partial c}\right)_{c=c_n}=\sin n(t-\alpha)+2c_ny_{02}[n(t-\alpha)]+\cdots\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}N&=\left(\frac{d}{dt}\,\frac{\lambda}{1+h_2c^2+\ldots}\right)_{c=c_n}=-\frac{n^2}{\lambda}\,(2h_2c_n+3h_3c_n^2+\cdots)\\ M&=\frac{1}{n}\,(\lambda c_n+Y(c_n,0)\end{aligned} \tag{2.17}$$

Тогда на основании (1.5) для уравнений (2.6) будем иметь два частных решения:

$$\xi_{11}=\varphi_1(t-\alpha), \qquad \xi_{21}=\varphi_2(t-\alpha) \tag{2.18}$$
$$\xi_{12}=\psi_1(t-\alpha)+(t-\alpha)N\varphi_1(t-\alpha), \qquad \xi_{22}=\psi_2(t-\alpha)+(t-\alpha)N\varphi_2(t-\alpha)$$

Второе из решений (2.18) совпадает с (2.12), а первое лишь множителем $-1/n$ отличается от (2.11).

Функции φ_1, φ_2, ψ_1. ψ_2 играют большую роль в дальнейшем исследовании. Отметим их основные свойства.

1. Все эти функции — периодические с периодом $2\pi/n$ и, следовательно, также с периодом 2π.

2. Функции φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнениям (2.6) и начальным условиям (при $t=\alpha$):

$$\varphi_1(0)=\frac{1}{n}\,X(c_n,0), \qquad \varphi_2(0)=\frac{1}{n}\,[\lambda c_n+Y(c_n,0)]=M \tag{2.19}$$

Эти начальные условия для φ_1 и φ_2 непосредственно получаются из того обстоятельства, что $x_0^{(n)}(t-\alpha)$ и $y_0^{(n)}(t-\alpha)$ удовлетворяют уравнениям (1.1) и начальным условиям $x_0^{(n)}(0)=c_n$, $y_0^{(n)}(0)=0$.

3. Функции ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d\psi_1}{dt}=p_{11}\psi_1+p_{12}\psi_2-N\varphi_1, \qquad \frac{d\psi_2}{dt}=p_{21}\psi_1+p_{22}\psi_2-N\varphi_2 \tag{2.20}$$

(так как ξ_{12} и ξ_{22} удовлетворяют уравнениям (2.6)) и начальным условиям

$$\psi_1(0)=1, \qquad \psi_2(0)=0 \tag{2.21}$$

(так как $x_{02}(0)=y_{02}(0)=\ldots=0$)

4. Для функций φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 справедливо тождество

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix}=M=\text{const} \tag{2.22}$$

В самом деле, применяя теорему Лиувилля к детерминанту Вронского из решений (2.18) и принимая во внимание, что согласно (2.7) $p_{11}+p_{22}=0$, так как $X=-\partial H/\partial y$, $Y=\partial H/\partial x$, имеем

$$\begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \psi_1+N(t-\alpha)\varphi_1 & \psi_2+N(t-\alpha)\varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix}=\text{const}=\begin{vmatrix} \psi_1(0) & \psi_2(0) \\ \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \end{vmatrix}=M$$

Таким образом, мы нашли фундаментальную систему решений (2.18) для однородных уравнений (2.6)

Рассмотрим теперь неоднородную систему

$$\frac{d\xi_1}{dt}=p_{11}\xi_1+p_{12}\xi_2+p(t), \qquad \frac{d\xi_2}{dt}=p_{21}\xi_1+p_{22}\xi_2+q(t) \tag{2.23}$$

где $p(t)$ и $q(t)$ — произвольные функции времени. Легко убедиться, что общее решение этих уравнений определяется формулами

$$\xi_1=u\psi_1(t-\alpha)+v\varphi_1(t-\alpha), \qquad \xi_2=u\psi_2(t-\alpha)+v\varphi_2(t-\alpha) \tag{2.24}$$

где

$$u=\frac{1}{M}\int_a^t[\varphi_2(t-\alpha)p(t)-\varphi_1(t-\alpha)q(t)]\,dt$$

$$v=\frac{1}{M}\int_b^t[NMu-\psi_2(t-\alpha)p(t)+\psi_1(t-\alpha)q(t)]\,dt \tag{2.25}$$

и a, b — произвольные постоянные.

n° 3. Вернемся к исследованию уравнений (2.5) для β_1 и β_2. Так как коэффициенты A_1 и A_2, B_1 и B_2 удовлетворяют уравнениям (2.6) и начальным условиям (2.8), то на основании (2.18), (2.19) и (2.21) имеем

$$\begin{aligned} A_1(t)&=\psi_1+(t-\alpha)\varphi_1 N, \qquad B_1(t)=\frac{1}{M}\left\{\varphi_1-\frac{1}{n}X(c_n,0)A_1(t)\right\} \\ A_2(t)&=\psi_2+(t-\alpha)\varphi_2 N, \qquad B_2(t)=\frac{1}{M}\left\{\varphi_2-\frac{1}{n}X(c_n,0)A_2(t)\right\} \end{aligned} \tag{2.26}$$

где φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 вычисляются для аргумента $t-\alpha$.

Поэтому уравнения (2.5) принимают вид:

$$\begin{aligned}&\frac{2\pi N}{n}X(c_n,0)\beta_1-\frac{2\pi N}{n^2M}X^2(c_n,0)\beta_2+[C_1]\mu+\cdots=0\\&2\pi NM\beta_1-\frac{2\pi N}{n}X(c_n,0)\beta_2+[C_2]\mu+\cdots=0\end{aligned}\tag{2.27}$$

Так как N и M отличны от нуля, то второе из этих уравнений разрешимо относительно β_1 и дает

$$\beta_1=\frac{X(c_n,0)}{nM}\beta_2-\frac{[C_2]}{2\pi NM}\mu+\cdots$$

Подставляя β_1 в первое уравнение (2.27), получим одно уравнение для нахождения β_2. Исследуем это уравнение.

Пусть f_1 и f_2 — две произвольные функции t. Введем обозначение

$$\{f\}=nM[f_1]-X(c_n,0)[f_2]\tag{2.28}$$

Тогда, как нетрудно видеть, уравнение для β_2 имеет вид:

$$\mu[P(\alpha)+Q(\alpha)\beta_2+R(\alpha)\mu+\ldots]+S(\beta_2)=0\tag{2.29}$$

где

$$\begin{aligned}&nMP(\alpha)=\{C\}\\&nMQ=\frac{X(c_n,0)}{nM}\{D\}+\{E\}-\frac{[C_2]}{2\pi NM}\{F\}-\frac{X(c_n,0)[C_2]}{\pi NnM^2}\{G\}\end{aligned}\tag{2.30}$$

а $S(\beta_2)$ — функция только β_2.

Покажем прежде всего, что $S(\beta_2)=0$. В самом деле, $S(\beta_2)$ есть результат исключения β_1 из уравнений (2.27), если в последних μ положить равным нулю. Но уравнения (2.27) при $\mu=0$ дают необходимые и достаточные условия для того, чтобы решение уравнений (1.1) с начальными условиями (2.1) было периодическим, периода 2π. Эти условия будут, очевидно, удовлетворены, если положить $\beta_1=\beta_2=0$, а величину α (начальный момент времени) оставить произвольной. Поэтому уравнения (2.27) при $\mu=0$ допускают бесчисленное множество решений, зависящих от произвольного параметра. Следовательно, эти уравнения не могут быть независимыми и функция $S(\beta_2)$ необходимо обращается в нуль. Это заключение находится в полном соответствии с общей теорией Пуанкаре. Таким образом, уравнение (2.29), определяющее β_2, принимает вид:

$$P(\alpha)+Q(\alpha)\beta_2+R(\alpha)\mu+\ldots=0\tag{2.31}$$

Для того чтобы это уравнение допускало решение для β_2, обращающееся в нуль при $\mu=0$, необходимо прежде всего величину α выбрать так, чтобы $P(\alpha)=0$.

Если при этом величина $Q(\alpha)$ будет отлична от нуля, то уравнение (2.31) будет действительно допускать решение для β_2 нужного вида и это решение будет единственным и будет являться аналитической функцией параметра μ. Но тогда мы получим также единственное и притом аналитическое решение для β_1 и, подставляя найденные таким образом β_1 и β_2 в (2.4), получим единственное периодическое решение уравнений (0.1), обращающееся при $\mu=0$ в порождающее решение $\{x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha)\}$. Это решение будет аналитическим относительно μ и, очевидно, вещественным, если α вещественно.

Таким образом, для *каждого корня уравнения* $P(\alpha)=0$, *для которого* $Q(\alpha)\neq 0$, *существует одно и только одно периодическое решение уравнений* (0.1), *обращающееся в* $\{x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha)\}$ *при* $\mu=0$. *Это решение является аналитическим относительно параметра* μ *и будет вещественным, если* α *вещественно.*

n° 4. Из вышесказанного следует, что для нашей задачи особый интерес представляют функции $P(\alpha)$ и $Q(\alpha)$. Вычислим эти функции.

Коэффициенты $C_1(t)$ и $C_2(t)$ удовлетворяют, как мы видели, уравнениям (2.9). Эти уравнения имеют вид уравнений (2.23), общий интеграл которых определяется формулами (2.24). Принимая во внимание начальные условия $C_1(\alpha)=C_2(\alpha)=0$, будем иметь (2.32)

$$C_1=\frac{\psi_1}{M}\int_\alpha^t(\varphi_2 f_0-\varphi_1 F_0)\,dt+\frac{\varphi_1 N}{M}\int_\alpha^t dt\int_\alpha^t(\varphi_2 f_0-\varphi_1 F_0)\,dt-\frac{\varphi_1}{M}\int_\alpha^t(\psi_2 f_0-\psi_1 F_0)\,dt$$

$$C_2=\frac{\psi_2}{M}\int_\alpha^t(\varphi_2 f_0-\varphi_1 F_0)\,dt+\frac{\varphi_2 N}{M}\int_\alpha^t dt\int_\alpha^t(\varphi_2 f_0-\varphi_1 F_0)\,dt-\frac{\varphi_2}{M}\int_\alpha^t(\psi_2 f_0-\psi_1 F_0)\,dt$$

где функции $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \psi_1,\ \psi_2$ вычисляются для аргумента $t-\alpha$ и для краткости положено (2.33)

$$f_0=f\,[t,\ x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha),\ 0],\quad F_0=F\,[t,\ x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha), 0]$$

Отсюда легко находим

$$\{C\}=n\int_\alpha^{2\pi+\alpha}(\varphi_2 f_0-\varphi_1 F_0)\,dt \tag{2.34}$$

и, следовательно, принимая во внимание (2.30) и периодичность функций $\varphi_1,\ \varphi_2,\ f_0$ и F_0, имеем

$$P(\alpha)=\frac{1}{M}\int_0^{2\pi}(\varphi_2 f_0-\varphi_1 F_0)\,dt \tag{2.35}$$

Переходим к вычислению $Q(\alpha)$. Коэффициенты D_1 и D_2 удовлетворяют начальным условиям (2.10) и дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{dD_1}{dt}&=p_{11}D_1+p_{12}D_2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)A_1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)A_2+U(A,\ C)\\ \frac{dD_2}{dt}&=p_{21}D_1+p_{22}D_2+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)A_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)A_2+V(A,\ C)\end{aligned} \tag{2.36}$$

Здесь $U(A,\ C)$ и $V(A,\ C)$ обозначают операторы (2.37)

$$U(A,\ C)=\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)A_1C_1+\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y}\right)(A_1C_2+A_2C_1)+\left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)A_2C_2$$

$$V(A,\ C)=\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)A_1C_1+\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y}\right)(A_1C_2+A_2C_1)+\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)A_2C_2$$

и круглые скобки, в которых заключены производные, показывают, что после дифференцирования величины x и y заменены через $x_0^{(n)}(t-\alpha)$ и $y_0^{(n)}(t-\alpha)$, а величина μ (в функциях f и F) положена равной нулю.

Уравнения (2.36) отличаются от уравнений (2.9) только неоднородной частью. Поэтому, так же как и для $\{C\}$, находим

$$\{D\}=n\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}[\varphi_2 U(A, C)-\varphi_1 V(A, C)]\,dt+ \tag{2.38}$$

$$+n\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left\{\varphi_2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)A_1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)A_2\right]-\varphi_1\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)A_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)A_2\right]\right\}dt$$

Коэффициенты E_1 и E_2 удовлетворяют начальным условиям (2.10) и уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{dE_1}{dt}&=p_{11}E_1+p_{12}E_2+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)B_1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)B_2+U(B, C)\\ \frac{dE_2}{dt}&=p_{21}E_1+p_{22}E_2+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)B_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)B_2+V(B, C)\end{aligned} \tag{2.39}$$

Следовательно,

$$\{E\}=n\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}[\varphi_2 U(B, C)-\varphi_1 V(B, C)]\,dt+ \tag{2.40}$$

$$+n\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left\{\varphi_2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)B_1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)B_2\right]-\varphi_1\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)B_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)B_2\right]\right\}dt$$

Принимая во внимание, что на основании (2.26)

$$\frac{X(c_n, 0)}{nM}A_1+B_1=\frac{1}{M}\varphi_1, \qquad \frac{X(c_n, 0)}{nM}A_2+B_2=\frac{1}{M}\varphi_2$$

будем иметь

$$\frac{X(c_n, 0)}{nM}\{D\}+\{E\}=J_1+J_2 \tag{2.41}$$

где

$$J_1=\frac{1}{M}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}[\varphi_2 U(n\varphi, C)-\varphi_1 V(n\varphi, C)]\,dt$$

$$J_2=\frac{1}{M}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left\{\varphi_2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)n\varphi_1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)n\varphi_2\right]-\varphi_1\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)n\varphi_1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)n\varphi_2\right]\right\}dt$$

Но по определению

$$n\varphi_1=\frac{dx_0^{(n)}(t-\alpha)}{dt}=-\frac{dx_0^{(n)}(t-\alpha)}{d\alpha}, \qquad n\varphi_2=\frac{dy_0^{(n)}(t-\alpha)}{dt}=-\frac{dy_0^{(n)}(t-\alpha)}{d\alpha}$$

и, следовательно, имеем

$$J_2=-\frac{1}{M}\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left(\varphi_2\frac{df_0}{d\alpha}-\varphi_1\frac{dF_0}{d\alpha}\right)dt=-\frac{1}{M}\int_{0}^{2\pi}\left(\varphi_2\frac{df_0}{d\alpha}-\varphi_1\frac{dF_0}{d\alpha}\right)dt \tag{2.42}$$

Преобразуем член J_1 выражения (2.41). Если принять во внимание равенства (2.7), определяющие коэффициенты p_{ik}, то

$$J_1=\frac{1}{M}\int\limits_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left\{\varphi_2\left(\frac{dp_{11}}{dt}C_1+\frac{dp_{12}}{dt}C_2\right)-\varphi_1\left(\frac{dp_{21}}{dt}C_1+\frac{dp_{22}}{dt}C_2\right)\right\}dt \tag{2.43}$$

Интегрируя по частям и учитывая (2.9) будем иметь

$$J_1=\frac{1}{M}\left[\varphi_2\left(\frac{dC_1}{dt}-f_0\right)-\varphi_1\left(\frac{dC_2}{dt}-F_0\right)\right]_{\alpha}^{2\pi+\alpha}-$$
$$-\frac{1}{M}\int\limits_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left[\varphi_2\left(p_{11}\frac{dC_1}{dt}+p_{12}\frac{dC_2}{dt}\right)-\varphi_1\left(p_{21}\frac{dC_1}{dt}+p_{22}\frac{dC_2}{dt}\right)\right]dt-$$
$$-\frac{1}{M}\int\limits_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}\frac{dC_1}{dt}-\frac{d\varphi_1}{dt}\frac{dC_2}{dt}\right)dt+\frac{1}{M}\int\limits_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left(\frac{d\varphi_2}{dt}f_0-\frac{d\varphi_1}{dt}F_0\right)dt$$

Отбросим в проинтегрированной части этого выражения члены, содержащие f_0 и F_0, так как в силу периодичности

$$(\varphi_2 f_0-\varphi_1 F_0)\Big|_0^{2\pi+\alpha}=0$$

Во втором интеграле выражения для J_1 заменим $d\varphi_1/dt$ и $d\varphi_2/dt$ их значениями из уравнений (2.6), а в третьем интеграле $d\varphi_1/dt$ и $d\varphi_2/dt$ заменим равными им величинами $-d\varphi_1/d\alpha$ и $-d\varphi_2/d\alpha$. Тогда, принимая во внимание, что на основании (2.7) $p_{11}+p_{22}=0$, легко найдем

$$J_1=\frac{1}{M}\left[\varphi_2\frac{dC_1}{dt}-\varphi_1\frac{dC_2}{dt}\right]_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\frac{1}{M}\int\limits_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha}f_0-\frac{d\varphi_1}{d\alpha}F_0\right)dt=$$
$$=\frac{1}{M}\left[\varphi_2\frac{dC_1}{dt}-\varphi_1\frac{dC_2}{dt}\right]_{\alpha}^{2\pi+\alpha}\frac{1}{M}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha}f_0-\frac{d\varphi_1}{d\alpha}F_0\right)dt$$

Заменяя здесь C_1 и C_2 их значениями по формулам (2.32), после несложных вычислений получим

$$J_1=\frac{1}{M^2}\left(\varphi_1\frac{d\psi_1}{dt}-\varphi_1\frac{d\psi_2}{dt}\right)_{t=2\pi+\alpha}\int\limits_0^{2\pi}(\varphi_2 f_0-\varphi_1 F_0)\,dt+$$
$$+\frac{[C_2]}{M^2}\left(\varphi_2\frac{d\varphi_1}{dt}-\varphi_1\frac{d\varphi_2}{dt}\right)_{t=2\pi+\alpha}-\frac{1}{M}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha}f_0-\frac{d\varphi_1}{d\alpha}F_0\right)dt$$

или на основании (2.35)

$$J_1=\frac{P(\alpha)}{M}\left(\varphi_2\frac{d\psi_1}{dt}-\varphi_1\frac{d\psi_2}{dt}\right)_{t=2\pi+\alpha}+\frac{[C_2]}{M^2}\left(\varphi_2\frac{d\varphi_1}{dt}-\varphi_1\frac{d\varphi_2}{dt}\right)_{t=2\pi+\alpha}-$$
$$-\frac{1}{M}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha}f_0-\frac{d\varphi_1}{d\alpha}F_0\right)dt \tag{2.44}$$

Подставляя (2.44) и (2.42) в (2.41), найдем окончательно

$$\frac{X(c_n,0)}{nM}\{D\}+\{E\}= \tag{2.45}$$
$$=-\frac{dP(\alpha)}{d\alpha}+\frac{P(\alpha)}{M}\left(\varphi_2\frac{d\psi_1}{dt}-\varphi_1\frac{d\psi_2}{dt}\right)_{t=2\pi+\alpha}+\frac{[C_2]}{M^2}\left(\varphi_2\frac{d\varphi_1}{dt}-\varphi_1\frac{d\varphi_2}{dt}\right)_{t=2\pi+\alpha}$$

Для коэффициентов F_1 и F_2, G_1 и G_2 имеем начальные условия (2.10) и уравнения

$$\frac{dF_1}{dt}=p_{11}F_1+p_{12}F_2+U(A, B), \qquad \frac{dG_1}{dt}=p_{11}G_1+p_{12}G_2+\frac{U(A, A)}{2}$$
$$\frac{dF_2}{dt}=p_{21}F_1+p_{22}F_2+V(A, B), \qquad \frac{dG_2}{dt}=p_{21}G_1+p_{22}G_2+\frac{V(A, A)}{2}$$

Поэтому

$$\frac{2X(c_n, 0)}{nM}\{G\}+\{F\}=\frac{1}{M}\int\limits_{\alpha}^{2\pi+\alpha}[\varphi_2 U(n\varphi, A)-\varphi_1 V(n\varphi, A)]\,dt$$

Повторяя для правой части этого равенства те же выкладки, что и при вычислении J_1, получим

$$\frac{2X(c_n, 0)}{nM}\{G\}+\{F\}=\frac{1}{M}\left[\varphi_2\frac{dA_1}{dt}-\varphi_1\frac{dA_2}{dt}\right]_{\alpha}^{2\pi+\alpha}$$

Заменяя A_1 и A_2 их значениями (2.26), будем иметь

$$\frac{2X(c_n, 0)}{nM}\{G\}+\{F\}=\frac{2\pi N}{M}\left[\varphi_2\frac{d\varphi_1}{dt}-\varphi_1\frac{d\varphi_2}{dt}\right]_{t=2\pi+\alpha} \tag{2.46}$$

Подставляя (2.45) и (2.46) в выражение (2.30) для $Q(\alpha)$, найдем

$$Q(\alpha)=-\frac{1}{nM}\frac{dP(\alpha)}{d\alpha}+\frac{P(\alpha)}{nM^2}\left[\varphi_2\frac{d\varphi_1}{dt}-\varphi_1\frac{d\varphi_2}{dt}\right]_{t=2\pi+\alpha} \tag{2.47}$$

n°5. В n°4 мы показали, что для каждого $\alpha=\alpha^*$, удовлетворяющего уравнению $P(\alpha^*)=0$, для которого Q отлично от нуля, существует одно и только одно периодическое решение уравнений (0.1), обращающееся в $\{x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha)\}$ при $\mu=0$. Но на основании (2.47)

$$Q(\alpha^*)=-\frac{1}{nM}\frac{dP(\alpha^*)}{d\alpha}$$

Следовательно, принимая во внимание выражение (2.35) для $P(\alpha)$ и явный вид функций φ_1 и φ_2, можно результаты, полученные в n 4°, выразить в виде теоремы.

Теорема. Для того чтобы существовало периодическое решение $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t)\}$, *необходимо, чтобы* α *было корнем уравнения*

$$\int\limits_0^{2\pi}\left\{f_0\frac{dy_0^{(n)}(t-\alpha)}{dt}-F_0\frac{dx_0^{(n)}(t-\alpha)}{dt}\right\}dt=0 \tag{2.48}$$

где

$$\begin{aligned} f_0&=f[t,\ x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha),\ 0]\\ F_0&=F[t,\ x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha),\ 0]\end{aligned} \tag{2.49}$$

Для каждого некратного корня уравнения (2.48) *существует одно и только одно периодическое решение* $\{x^{(n)}(t)\ \ y^{(n)}(t)\}$ *и это решение будет аналитическим относительно* μ.

§ 3. Практический способ вычисления периодического решения $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$. n°1. Для вычисления периодического решения нет необходимости выполнять все вычисления, при помощи которых было доказано существование этого решения. Этой цели можно достигнуть более простым способом.

Пусть α — простой корень уравнения (2.48). Тогда, по доказанному, существует одно и только одно периодическое решение $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$, и это решение является аналитическим относительно μ. Следовательно, если попытаться удовлетворить уравнениям (0.1) формальными рядами

$$x^{(n)}(t) = x_0^{(n)}(t-\alpha) + \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots$$
$$y^{(n)}(t) = y_0^{(n)}(t-\alpha) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \ldots \qquad (3.1)$$

где $x_k(t)$,, $y_k(t)$ — периодические функции t с периодом 2π, то такое разложение будет, несомненно, существовать. Если при этом окажется, что существует только одно такое разложение, то ряды (3.1) будут сходиться и действительно представят искомое решение.

Подставляя (3.1) в (0.1), для $x_k(t)$ и $y_k(t)$ получим уравнения

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{11}x_k + p_{12}y_k + f_k, \qquad \frac{dy_k}{dt} = p_{21}x_k + p_{22}y_k + F_k \qquad (3.2)$$

где коэффициенты p_{ij} имеют те же значения, что и раньше, а f_k и F_k суть целые рациональные функции с периодическими коэффициентами от $x_0^{(n)}(t-\alpha)$, $y_0^{(n)}(t-\alpha)$ и тех x_s и y_s, для которых $s \leqslant k-1$. В частности, для функций f_1 и F_1 имеем

$$f_1 = f[t, x^{(n)}(t-\alpha),\ y^{(n)}(t-\alpha),\ 0] = f_0$$
$$F_1 = F[t, x^n(t-\alpha),\ y^n(t-\alpha),\ 0] = F_0 \qquad (3.3)$$

Уравнения (3.2) дают возможность последовательно определять функции $x_k(t)$ и $y_k(t)$. Общее решение этих уравнений на основании (2.24) может быть представлено в виде

$$x_k = \psi_1(t-\alpha)\,u_k + \varphi_1(t-\alpha)\,v_k, \quad y_k = \psi_2(t-\alpha)\,u_k + \varphi_2(t-\alpha)\,v_k \qquad (3.4)$$

где

$$u_k = \frac{1}{M}\{\varphi_2(t-\alpha)\,f_k - \varphi_1(t-\alpha)\,F_k\}\,dt + \beta_k$$
$$v_k = \frac{1}{M}\int\{NMu_k - \psi_2(t-\alpha)\,f_k + \psi_1(t-\alpha)\,F_k\}\,dt + \alpha_k \qquad (3.5)$$

и α_k, β_k — произвольные постоянные.

Нас интересует, однако, не общее решение уравнений (3.2), а такое частное, которое является периодическим периода 2π. Для этого необходимо произвольные постоянные α, α_k и β_k подобрать таким образом, чтобы функции u_k и v_k были периодическими. Рассмотрим сначала функции u_1 и v_1. Так как выражение $\varphi_2(t-\alpha)\,f_0 - \varphi_1(t-\alpha)\,F_0$, стоящее под интегралом в функции u_1, является периодическим, то, для того чтобы эта функция вышла периодической, необходимо и достаточно, чтобы разложение Фурье указанного выражения не содержало свободного члена, т. е. чтобы α было корнем уравнения

$$\int_0^{2\pi} \{\varphi_2(t-\alpha) f_0 - \varphi_1(t-\alpha) F_0\} \, dt = 0 \tag{3.6}$$

Мы снова пришли, таким образом, к уравнению (2.48). Пусть α — корень этого уравнения. Тогда функция u_1 получится периодической. Эта функция содержит произвольную постоянную β_1. Этой постоянной можно распорядиться таким образом, чтобы функция v_1 получилась также периодической. Для этого, очевидно, нужно положить

$$\beta_1 = -\frac{1}{2\pi NM} \int_0^{2\pi} [\psi_2(t-\alpha) f_1 - \psi_1(t-\alpha) F_1] \, dt \tag{(3.7)}$$

если в качестве неопределенного интеграла, которым выражается u_1, принять ту первообразную функцию, разложение Фурье которой не содержит свободного члена.

Допустим, что β_1 действительно выбрано по формуле (3.7). Тогда функции x_1 и y_1 получатся периодическими и будут содержать произвольную постоянную α_1. Через эти функции постоянная α_1 войдет также и в функции $f_2(t)$ и $F_2(t)$. Это дает возможность сделать периодической функцию u_2. Для этого необходимо постоянную α_1 выбрать так, чтобы обратить в нуль свободный член разложения Фурье подинтегрального выражения величины u_2.

После этого постоянная β_2 однозначно определится из условия периодичности v_2. Продолжая аналогичным образом дальше, мы видим, что если неопределенные интегралы в формулах (3.5) определять так, чтобы разложения Фурье первообразных функций не содержали свободных членов, постоянные β_k вычислять по формулам

$$\beta_k = -\frac{1}{2\pi NM} \int_0^{2\pi} [\psi_2(t-\alpha) f_k - \psi_1(t-\alpha) F_k] \, dt \qquad (k = 1, 2 \ldots) \tag{3.8}$$

постоянные α_k определять из уравнений

$$\int_0^{2\pi} [\varphi_2(t-\alpha) f_{k+1} - \varphi_1(t-\alpha) F_{k+1}] \, dt = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.9}$$

то для каждого корня α уравнения (2.48) ряды (3.1) будут формально удовлетворять уравнениям (0.1) и их члены, определяемые формулами (3.4), будут периодическими функциями t с периодом 2π.

n° 2. Рассмотрим уравнения (3.9), определяющие величины α_k. Покажем, что эти уравнения линейны и, если α — простой корень, всегда разрешимы. Допустим для этого, что все величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ уже вычислены, и, следовательно, функции $x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k$ получились периодическими. Пусть

$$x_k = x_k^* + \alpha_k \varphi_1, \qquad y_k = y_k^* + \alpha_k \varphi_2 \tag{3.10}$$

где x_k^*, y_k^* — вполне определенные периодические функции **времени**, вычисленные по формулам (3.4), в предположении, что α_k **принято** равным нулю. Пользуясь обозначениеми § 2 n°4, будем иметь

$$
\begin{aligned}
f_2 &= R_2(t) + \alpha_1 \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\varphi_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\varphi_2 \right\} + \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)(x_1^* + \alpha_1\varphi_1)^2 + \right. \\
&\left. + 2\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y}\right)(x_1^* + \alpha_1\varphi_1)(y_1^* + \alpha_1\varphi_2) + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)(y_1^* + \alpha_1\varphi_2)^2 \right\} \\
F_2 &= S_2(t) + \alpha_1 \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\varphi_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\varphi_2 \right\} + \frac{1}{2}\left\{ \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)(x_1^* + \alpha_1\varphi_1)^2 + \right. \\
&\left. + 2\left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y}\right)(x_1^* + \alpha_1\varphi_1)(y_1^* + \alpha_1\varphi_2) + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)(y_1^* + \alpha_2\varphi_2)^2 \right\}
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
f_{k+1} &= R_{k+1}(t) + \alpha_k \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\varphi_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\varphi_2 \right\} + \qquad (k = 2, 3, \ldots) \\
&+ \alpha_k \left\{ \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)x_1\varphi_1 + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x\,\partial y}\right)(x_1\varphi_2 + y_1\varphi_1) + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}\right)y_1\varphi_2 \right\} \\
F_{k+1} &= S_{k+1}(t) + \alpha_k \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\varphi_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\varphi_2 \right\} + \\
&+ \alpha_k \left\{ \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}\right)x_1\varphi_1 + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial x\,\partial y}\right)(x_1\varphi_2 + y_1\varphi_1) + \left(\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}\right)y_1\varphi_2 \right\}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

где S_2, R_2, S_{k+1}, R_{k+1} — определенные периодические функции времени.

Введем обозначение

$$
W(\xi, \eta) = \int_0^{2\pi} \left\{ \varphi_2 \left(\frac{dp_{11}}{dt}\xi + \frac{dp_{12}}{dt}\eta \right) - \varphi_1 \left(\frac{dp_{21}}{dt}\xi + \frac{dp_{22}}{dt}\eta \right) \right\} dt \tag{3.13}
$$

Уравнения (3.9) на основании (3.11) и (3.12) имеют вид:

$$
P_k\alpha_k^2 + Q_k\alpha_k + L_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{3.14}
$$

где L_k — некоторые постоянные и $(j = 2, 3, \ldots)$, (3.15)

$$
P_1 = \frac{1}{2\pi} W(\varphi_1, \varphi_2), \quad Q_1 = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\varphi_2 \frac{df_0}{dt} - \varphi_1 \frac{dF_0}{dt} \right) dt + \frac{1}{\pi} W(x_1^*, y_1^*)
$$

$$
P_j = 0, \qquad Q_j = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\varphi_2 \frac{df_0}{dt} - \varphi_1 \frac{dF_0}{dt} \right) dt + \frac{1}{\pi} W(x_1, y_1)
$$

Допустим, что ξ и η удовлетворяют уравнениям

$$
\frac{d\xi}{dt} = p_{11}\xi + p_{12}\eta + p(t), \qquad \frac{d\eta}{dt} = p_{21}\xi + p_{22}\eta + q(t)
$$

где $p(t)$ и $q(t)$ — произвольные непрерывные функции времени. Тогда, интегрируя по частям и повторяя выкладки § 2 n°4, имеем

$$
W(\xi, \eta) = \left[\varphi_2 \left(\frac{d\xi}{dt} - p \right) - \varphi_1 \left(\frac{d\eta}{dt} - q \right) \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \left[\frac{d\varphi_2}{dt} p - \frac{d\varphi_1}{dt} q \right] dt
$$

Подставляя в это выражение вместо ξ и η функции x_1^* и y_1^*, x_1 и y_1

и замечая, что на основании (3.3) и (3.10) p и q для этих функций равны f_0 и F_0, и учитывая периодичность всех этих функций, имеем

$$W(x_1^*, y_1^*) = W(x_1, y_1) = -\int_0^{2\pi} \left(\frac{d\varphi_2}{d\alpha} f_0 - \frac{d\varphi_1}{d\alpha} F_0 \right) dt$$

Для φ_1 и φ_2 будет $W(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Таким образом, в силу (3.15)

$$P_k = 0, \qquad Q_k = -\frac{1}{n}\frac{d}{d\alpha}\int_0^{2\pi} (\varphi_2 f_0 - \varphi_1 F_0)\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

и уравнения (3.9) принимают вид:

$$\left\{ \frac{d}{d\alpha}\int_0^{2\pi} (\varphi_2 f_0 - \varphi_1 F_0)\, dt \right\} \alpha_k = nL_k$$

Таким образом, уравнения (3.9) линейны относительно α_k, и если α — простой корень уравнения (2.48), то все α_k получаются вполне определенными. В этом случае существует только одна система рядов (3.1) с периодическими коэффициентами, формально удовлетворяющих уравнениям (0.1). Эти ряды, как сказано выше, сходятся при достаточно малых $|\mu|$ и действительно представляют искомое периодическое решение.

n° 3. Итак, допустим, что α — простой корень уравнения (2.48). Тогда существует одно и только одно периодическое решение $\{x^{(n)}(t), y^{(n)}(t)\}$ уравнений (0.1) и это решение определяется формулами (3.1), (3.3), (3.5) и (3.8). При этом постоянные α_k в формулах (3.5) определяются линейными уравнениями (3.9); функции f_k и F_k в формулах (3.5) и (3.8) — неоднородные части линейных дифференциальных уравнений (3.2), которым удовлетворяют функции x_k и y_k; постоянные N и M определяются формулами (2.17); наконец, неопределенные интегралы в формулах (3.5) для u_k и v_k определяются так, что разложения Фурье первообразных функций не содержат свободных членов.

§ 4. Периодическое решение $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$. Переходим к рассмотрению периодического решения $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$, т. е. решения, обращающегося в нуль при $\mu = 0$. Пусть β_1 и β_2 — начальные значения x и y в этом решении. Имеем

$$x^{(0)} = A_1\beta_1 + B_1\beta_2 + C_1\mu + \ldots, \qquad y^{(0)} = A_2\beta_1 + B_2\beta_2 + C_2\mu + \ldots$$

Здесь

$$\frac{dA_1}{dt} = -\lambda A_2, \quad \frac{dA_2}{dt} = \lambda A_1; \qquad \frac{dB_1}{dt} = -\lambda B_2, \quad \frac{dB_2}{dt} = \lambda B_1$$

$$A_1(0) = 1, \quad A_2(0) = 0; \qquad B_1(0) = 0, \quad B_2(0) = 1$$

Следовательно,

$$A_1 = \cos\lambda t, \quad A_2 = \sin\lambda t; \qquad B_1 = -\sin\lambda t, \quad B_2 = \cos\lambda t$$

Для того чтобы решение было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы β_1 и β_2 удовлетворяли уравнениям

$$\begin{aligned} [x^{(0)}] &= (\cos 2\pi\lambda - 1)\beta_1 + \sin 2\pi\lambda\, \beta_2 + [C_1]\mu + \ldots = 0 \\ [y^{(0)}] &= -\sin 2\pi\lambda\, \beta_1 + (\cos 2\pi\lambda - 1)\beta_2 + [C_2]\mu + \ldots = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Функциональный определитель Δ этих уравнений относительно величин β_1 и β_2 при $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$ будет

$$\Delta = (\cos 2\pi\lambda - 1)^2 + \sin^2 2\pi\lambda = 2(1 - \cos 2\pi\lambda)$$

Этот определитель, если λ не равно целому числу, отличен от нуля и, следовательно, в этом случае существует одна и только одна система функций $\beta_1(\mu)$, $\beta_2(\mu)$, удовлетворяющих уравнениям (4.1) и обращающихся в нуль при $\mu = 0$. При этом эти функции будут аналитическими относительно μ.

Таким образом, если λ отлично от целого числа, то уравнения (0.1) допускают одно и только одно периодическое решение $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$, обращающееся в нуль при $\mu = 0$. Это решение аналитично относительно μ.

Для практического вычисления этого решения ищем ряды

$$x^{(0)} = \mu x_1(t) + \mu^2 x_2(t) + \ldots, \qquad y^{(0)} = \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \ldots$$

Для коэффициентов этих рядов получаем линейные уравнения с постоянными коэффициентами уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = -\lambda y_1 + f(t, 0, 0, 0), \qquad \frac{dy_1}{dt} = \lambda x_1 + F(t, 0, 0, 0) \tag{4.2}$$

$$\frac{dx_k}{dt} = -\lambda y_k + f_k(t), \qquad \frac{dy_k}{dt} = \lambda x_k + F_k(t) \qquad (k = 2, 3 \ldots) \tag{4.3}$$

где $f_k(t)$, $F_k(t)$ — целые рациональные функции от x_s, y_s $(s \leqslant k-1)$ с периодическими коэффициентами. Так как λ отлично от целого числа, то уравнения (4.2) имеют одно и только одно периодическое решение, которое легко вычисляется обычными элементарными способами. Точно так же из уравнений (4.3) последовательно вычисляются все остальные коэффициенты x_k и y_k.

Полученные формальные ряды, очевидно, сходятся и действительно представляют искомое периодическое решение уравнений (0.1).

§ 5. Резонансные и нерезонансные случаи. Рассмотрим подробнее уравнения (4.1), определяющие β_1 и β_2 в периодическом решении $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$. Решение этих уравнений имеет вид:

$$\beta_1 = \beta_1^{(1)}\mu + \beta_1^{(2)}\mu^2 + \ldots, \qquad \beta_2 = \beta_2^{(1)}\mu + \beta_2^{(2)}\mu^2 + \ldots \tag{5.1}$$

где $\beta_1^{(s)}, \beta_2^{(s)}$ определяются из линейных уравнений вида

$$(\cos 2\pi\lambda - 1)\beta_1^{(s)} + \sin 2\pi\lambda\beta_2^{(s)} = \gamma_1^{(s)}, \qquad \sin 2\pi\lambda\beta_1^{(s)} + (\cos 2\pi\lambda - 1)\beta_2^{(s)} = \gamma_2^{(s)}$$

Детерминант этих уравнений, равный $\Delta = 2(1 - \cos 2\pi\lambda)$, не зависит от индекса s и обращается в нуль при λ, равном целому числу. В этом случае ряды (5.1) теряют смысл. Если λ не равен целому числу, но мало от него отличается, то величина Δ будет мало отличаться от нуля и величины $\beta_1^{(s)}, \beta_2^{(s)}$, содержащие Δ в знаменателях, будут получаться численно очень большими. То же самое будет справедливо и для коэффициентов x_s, y_s рядов, определяющих $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, которые будут содержать в знаменателях Δ в степенях, возрастающих вместе с индексом s. Тем не менее ряды $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ будут сходиться при достаточно малых значениях $|\mu|$. Однако в каждой физической задаче величина μ хотя и мала, но имеет вполне определенное фиксированное значение, и как бы мало это значение ни было, всегда найдется для λ такая достаточно малая окрестность целого числа, что ряды $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ окажутся расходящимися.

Случаи, когда λ равно целому числу или отличается от него на величину порядка малости μ, называются *резонансными*. Из вышесказанного следует, что в резонансном случае полученные нами разложения для $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$ непригодны. Отсюда, однако, не следует, что в этом случае система (0.1) не допускает периодического решения, обращающегося в нуль при $\mu = 0$. Это решение может существовать и может даже быть аналитическим относительно μ, но оно будет выражаться другими рядами.

Сказанное относительно решения $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$ остается справедливым и для решения $\{x_0^{(n)}(t);\ y_0^{(n)}(t)\}$, если $|\lambda - n|$ очень мало.

В самом деле, при $\lambda \to n$ величина c_n, как это видно из (1.7), стремится к нулю, а эта величина, как это легко видеть из формул, определяющих $x_0^{(n)}(t)$ и $y_0^{(n)}(t)$, входит (через постоянные β_k) в знаменатели коэффициентов разложений этих функций.

Таким образом, полученное нами решение $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$ справедливо при λ, достаточно отличающемся от целого числа, а решение $\{x_0^{(n)}(t);\ y_0^{(0)}(t)\}$ при λ, достаточно отличающемся от целого числа n. Такие случаи будем называть нерезонансными. Резонансные случаи требуют особого исследования.

II. Теория резонанса

§ 6. Резонанс первого порядка. n°1. Рассмотрим систему (0.1) в предположении, что λ отличается от некоторого целого числа n на величину порядка малости μ. Тогда, полагая $\lambda = n + \mu a$ и относя члены $-ay$ и ax к функциям f и F, имеем

$$\frac{dx}{dt} = -ny + X(x, y) + \mu f(t, x, y, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = nx + Y(x, y) + \mu F(t, x, y, \mu) \tag{6.1}$$

Для этих уравнений построенные нами в предыдущей главе ряды для решения $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$ и совпадающего, очевидно, с ним решения $\{x^{(n)}(t);\ y^{(n)}(t)\}$ будут расходиться. Что же касается решений $\{x^{(m)}(t);\ y^{(m)}(t)\}$ $(m \neq n)$, то они, очевидно, сохраняются. Следовательно, необходимо исследовать вопрос о возможности нахождения для уравнений (6.1) периодического решения, обращающегося при $\mu = 0$ в тривиальное решение $x_0 = y_0 = 0$ порождающей системы. Это решение будем в дальнейшем обозначать через $\{x_*, y_*\}$.

Если попытаться удовлетворить уравнениям (6.1) формальными рядами

$$x = x_1(t)\mu + x_2(t)\mu^2 + \ldots, \qquad y = y_1(t)\mu + y_2(t)\mu^2 + \ldots$$

с периодическими коэффициентами, то уже для первого приближения получим уравнения

$$\frac{dx_1}{dt} = -ny_1 + f(t, 0, 0, 0) \qquad \frac{dy_1}{dt} = nx_1 + F(t, 0, 0, 0) \tag{6.2}$$

которые, вообще говоря, не допускают периодических решений.

В самом деле, функции $f(t, 0, 0, 0)$, $F(t, 0, 0, 0)$ могут быть представлены рядами Фурье

$$\begin{aligned} f(t, 0, 0, 0) &= a_{10} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{1m} \cos mt + b_{1m} \sin mt) \\ F(t, 0, 0, 0) &= a_{20} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{2m} \cos mt + b_{2m} \sin mt) \end{aligned} \tag{6.3}$$

и, как легко видеть, уравнения (6.2) допускают периодическое решение тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$b_{1n} - a_{2n} = 0, \qquad a_{1n} + b_{2n} = 0 \tag{6.4}$$

В этом параграфе рассматривается тот случай, когда хотя бы одна из величин (6.4) отлична от нуля, т. е. когда способ построения решения $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$, установленный в § 4, оказывается непригодным уже в первом приближении.

Будем говорить, что в этом случае имеет место *главный* резонанс, или резонанс первого порядка.

n° 2. Для резонанса первого порядка имеет место следующая *основная теорема: Пусть $2s$ — младшая степень величины c в разложении периода решения уравнений*

$$\frac{dx_0}{dt} = -ny_0 + X(x_0, y_0), \qquad \frac{dy_0}{dt} = nx_0 + Y(x_0, y_0) \tag{6.5}$$

с начальными условиями $x_0(0) = c$, $y_0(0) = 0$. Тогда в случае резонанса первого порядка существует одно и только одно вещественное периодическое решение $\{x_* \, y_*\}$ уравнений (6.1), для которого функции x_*, y_* обращаются в нуль при $\mu = 0$ и эти функции разлагаются в ряды по целым положительным степеням величины

$$\nu = \mu^{\omega} \qquad \left(\omega = \frac{1}{2s+1}\right)$$

сходящиеся при достаточно малых значениях μ.

Доказательство. Обозначим через $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ и $y(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ функции, удовлетворяющие уравнениям (6.1) и начальным условиям $x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = \beta_1$, $y(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = \beta_2$. Имеем

$$\begin{aligned} x(t, \beta_1, \beta_2, \mu) &= A_1\beta_1 + B_1\beta_2 + C_1\mu + \ldots \\ y(t, \beta_1, \beta_2, \mu) &= A_2\beta_1 + B_2\beta_2 + C_2\mu + \ldots \end{aligned} \tag{6.6}$$

причем ряды, стоящие в правых частях, сходятся при достаточно малых $|\beta_1|$, $|\beta_2|$, $|\mu|$. Чтобы рассматриваемое решение было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись уравнения

$$[x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)] = x(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - x(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = 0$$
$$[y(t, \beta_1, \beta_2, \mu)] = y(2\pi, \beta_1, \beta_2, \mu) - y(0, \beta_1, \beta_2, \mu) = 0$$

т. е. чтобы

$$[A_1]\beta_1 + [B_1]\beta_2 + [C_1]\mu + \ldots = 0$$
$$[A_2]\beta_1 + [B_2]\beta_2 + [C_2]\mu + \ldots = 0 \tag{6.7}$$

Покажем прежде всего, что в случае главного резонанса по крайней мере одна из величин $[C_1]$, $[C_2]$ отлична от нуля.

В самом деле, коэффициенты C_1 и C_2 удовлетворяют уравнениям (6.2) и начальным условиям $C_1(0) = C_2(0) = 0$. Поэтому, принимая во внимание (6.3), находим

$$C_1 = \frac{1}{2}(b_{1n} - a_{2n})\, t \sin nt + \frac{1}{2}(a_{1n} + b_{2n})\, t \cos nt + C_1^*(t)$$
$$C_2 = \frac{1}{2}(a_{1n} + b_{2n})\, t \sin nt - \frac{1}{2}(b_{1n} - a_{2n})\, t \cos nt + C_2^*(t)$$

где C_1^*, C_2^* — периодические функции периода 2π. Следовательно,

$$[C_1] = (a_{1n} + b_{2n})\pi, \quad [C_2] = -(b_{1n} - a_{2n})\pi \tag{6.8}$$

что и доказывает наше утверждение, так как при главном резонансе по крайней мере одно из условий (6.4) не выполняется.

Далее, имеем $A_1 = \cos nt$, $B_1 = \sin nt$, $A_2 = -\sin nt$, $B_2 = \cos nt$ и, следовательно, $[A_1] = [A_2] = [B_1] = [B_2] = 0$. Отсюда вытекает, что уравнения (6.7) могут быть представлены в виде

$$\varphi_1(\beta_1, \beta_2) + \mu\{[C_1] + \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \mu)\} = 0$$
$$\varphi_2(\beta_1, \beta_2) + \mu\{[C_2] + \Phi_2(\beta_1, \beta_2, \mu)\} = 0 \tag{6.9}$$

где Φ_1 и Φ_2 обращаются в нуль при $\beta_1 = \beta_2 = \mu = 0$, а не зависящие от μ функции φ_1 и φ_2 начинаются членами не ниже второго порядка.

Найдем младшие члены этих функций. Имеем, очевидно,

$$\varphi_1(\beta_1, \beta_2) = [x(t, \beta_1, \beta_2, 0)], \qquad \varphi_2(\beta_1, \beta_2) = [y(t, \beta_1, \beta_2, 0)] \tag{6.10}$$

где $x(t, \beta_1, \beta_2, 0)$, $y(t, \beta_1, \beta_2, 0)$ удовлетворяют уравнениям (6.5) и начальным условиям $x(0, \beta_1, \beta_2, 0) = \beta_1$, $y(0, \beta_1, \beta_2, 0) = \beta_2$

Но на основании результатов Ляпунова, изложенных в § 1 n°1, и условий теоремы величины $x(t, \beta_1, \beta_2, 0)$, $y(t, \beta_1, \beta_2, 0)$ суть периодические функции времени с периодом T, для которого, ограничиваясь только младшими членами, имеем формулу

$$T = \frac{2\pi}{n}[1 + h_{2s}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^s + \ldots]$$

Поэтому, полагая $h = -2\pi\{h_{2s}(\beta_1^2 + \beta_2^2)^s + \ldots\}$, получим

$$\varphi_1(\beta_1, \beta_2) = x(nT + h, \beta_1, \beta_2) - \beta_1, \quad \varphi_2(\beta_1, \beta_2) = y(nT + h, \beta_1, \beta_2) - \beta_2$$

Разлагая в ряд по h и принимая во внимание периодичность, имеем

$$\varphi_1(\beta_1, \beta_2) = h\left[\frac{dx(t, \beta_1, \beta_2, 0)}{dt}\right]_{t=nT} + \ldots = -nh\beta_2 + \ldots,$$
$$\varphi_2(\beta_1, \beta_2) = h\left[\frac{dy(t, \beta_1, \beta_2, 0)}{dt}\right]_{t=nT} + \ldots = \quad nh\beta_1 + \ldots$$

Следовательно, уравнения (6.9) имеют вид:

$$\begin{aligned} 2\pi nh_{2s}(\beta_1^2+\beta_2^2)^s\beta_2 + \ldots + \mu\{[C_1] + \Phi_1(\beta_1, \beta_2, \mu)\} = 0 \\ -2\pi nh_{2s}(\beta_1^2+\beta_2^2)^s\beta_1 + \cdots + \mu\{[C_2] + \Phi_2(\beta_1, \beta_2, \mu)\} = 0 \end{aligned} \qquad ((6.11)$$

Нам нужно найти корни β_1 и β_2 этих уравнений, обращающиеся в нуль при $\mu = 0$. С этой целью положим

$$\beta_1 = \nu\alpha_1, \qquad \beta_2 = \nu\alpha_2, \qquad \nu = \mu^\omega \qquad \left(\omega = \frac{1}{2s+1}\right)$$

Тогда, сокращая на ν^{2s+1}, получим

$$\begin{aligned} 2\pi nh_{2s}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^s\alpha_2 + [C_1] + \nu\Phi_1^*(\alpha_1, \alpha_2, \nu) = 0 \\ -2\pi nh_{2s}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^s\alpha_1 + [C_2] + \nu\Phi_2^*(\alpha_1, \alpha_2, \nu) = 0 \end{aligned} \qquad (6.12)$$

Эти уравнения при $\nu = 0$ имеют единственное вещественное решение

$$\alpha_1^{(0)} = \frac{[C_2]}{\Lambda}, \qquad \alpha_2^{(0)} = -\frac{[C_1]}{\Lambda}, \quad \Lambda = \sqrt[2s+1]{2n\pi h_{2s}\{[C_1]^2 + [C_2]^2\}} \quad (6.13)$$

Так как при этом соответствующий функциональный определитель, равный

$$4(1+2s)\pi^2 n^2 h_{2s}^2 (\alpha_1^{(0)2} + \alpha_2^{(0)2})^{2s}$$

отличен от нуля, то уравнения (6.12) допускают в окрестности $(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)})$ только одно вещественное решение, которое имеет вид:

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(0)} + \nu\alpha_1^{(1)} + \cdots, \qquad \alpha_2 = \alpha_2^{(0)} + \nu\alpha_2^{(1)} + \cdots$$

где правые части суть аналитические функции ν в окрестности $\nu = 0$.

Следовательно, уравнения (6.11) допускают вещественное решение

$$\beta_1 = \alpha_1^{(0)}\nu + \alpha_1^{(1)}\nu^2 + \cdots, \qquad \beta_2 = \alpha_2^{(0)}\nu + \alpha_2^{(1)}\nu^2 + \cdots \qquad (6.14)$$

Нетрудно видеть, что это единственное вещественное решение уравнений (6.11), для которого β_1 и β_2 обращаются в нуль при $\mu = 0$.

Действительно, для каждого такого решения, как это известно из теории уравнений типа (6.11), величины β_1 и β_2 являются аналитическими функциями от $\mu^{1/m}$, где m — целое число. Но, как это легко проверить, уравнениям (6.11) можно удовлетворить рядами, расположенными по $\mu^{1/m}$, только при условии $m = 2s+1$.

Подставляя найденные значения β_1 и β_2 в выражения (6.6), получим единственное вещественное периодическое решение уравнений (6.1) с порождающим решением $x = y = 0$, и это решение удовлетворяет всем условиям теоремы. Таким образом, теорема доказана.

§ 7. Практический способ вычисления периодического решения при главном резонансе. n° 1. Для действительного вычисления решения $\{x_*, y_*\}$ ищем вещественные ряды с периодическими коэффициентами

$$x_* = x_1(t)\mu^{\omega} + x_2(t)\mu^{2\omega} + \ldots \qquad \left(\omega = \frac{1}{2s+1}\right) \qquad (7.1)$$
$$y_* = y_1(t)\mu^{\omega} + y_2(t)\mu^{2\omega} + \ldots$$

формально удовлетворяющие уравнениям (6.1). На основании доказанной теоремы такие ряды всегда найдутся.

Для коэффициентов этих рядов будем иметь следующие уравнения:

$$\frac{dx_1}{dt} = -ny_1, \qquad \frac{dy_1}{dt} = nx_1$$
$$\frac{dx_k}{dt} = -ny_k + f_k; \qquad \frac{dy_k}{dt} = nx_k + F_k \qquad (k=2, 3, \ldots) \qquad (7.2)$$

где f_k и F_k — целые рациональные функции с периодическими коэффициентами от x_j, y_j, для которых $j < k$. Из этих уравнений находим

$$x_1 = A_1 \cos nt + B_1 \sin nt$$
$$y_1 = A_1 \sin nt - B_1 \cos nt$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные.

Так как ряды (7.1) обязательно существуют, то уравнения (7.2) обязательно допускают периодические решения. Допустим, что все x_s, y_s, для которых $s < k$, уже вычислены и получились периодическими. Тогда f_k и F_k будут периодическими функциями времени. Обозначим через $x_k^*(t)$, $y_k^*(t)$ какое-нибудь периодическое решение уравнений для x_k и y_k. Тогда и общее решение этих уравнений, выражаемое формулами

$$x_k = A_k \cos nt + B_k \sin nt + x_k^*$$
$$y_k = A_k \sin nt - B_k \cos nt + y_k^*$$

где A_k и B_k — произвольные постоянные, будет также периодическим.

Таким образом, каждое приближение вводит две произвольные постоянные. Эти постоянные необходимо определить так, чтобы уравнения для последующих приближений допускали периодические решения.

Если обозначить соответственно через $a_{1n}^{(k)}$ и $b_{1n}^{(k)}$ коэффициенты при $\cos nt$ и $\sin nt$ в разложении Фурье функции f_k, а через $a_{2n}^{(k)}$, $b_{2n}^{(k)}$ те же коэффициенты для функции F_k, то необходимые и достаточные условия периодичности функций x_k и y_k выражаются равенствами

$$a_{1n}^{(k)} + b_{2n}^{(k)} = 0, \qquad b_{1n}^{(k)} - a_{2n}^{(k)} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \qquad (7.3)$$

Эти уравнения и определяют произвольные постоянные A_j и B_j.

Если сравнить приведенный способ вычисления резонансного решения с тем, который получен при доказательстве теоремы существования, то можно установить следующие свойства уравнений (7.3).

1. Эти уравнения тождественно выполняются при $k < 2s+1$.

2. При $k = 2s+1$ эти уравнения содержат только постоянные A_1 и B_1 и будут нелинейными (но имеющими только одно вещественное решение).

3. При $k = 2s+j$ $(j > 1)$ эти уравнения содержат только A_j и B_j и будут линейными относительно этих величин.

Легко также видеть, что A_1 и B_1 равны соответственно $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$ и, следовательно, могут быть вычислены по формулам (6.13).

n° 2. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x + \beta x^2 = \mu a \cos nt$$

Если для вычисления периода свободных колебаний, определяемых уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x + \beta x^2 = 0$$

применить метод, изложенный в § 1, то обнаружится, что уже величина h_2 отлична от нуля. Поэтому, полагаем

$$x = x_1\mu^{1/3} + x_2\mu^{2/3} + \cdots$$

Для коэффициентов разложения имеем уравнения

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + n^2x_1 = 0, \qquad \frac{d^2x_3}{dt^2} + n^2x_3 = -2\beta x_1x_2 + a\cos nt$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + n^2x_2 = -\beta x_1^2, \qquad \frac{d^2x_4}{dt^2} + n^2x_4 = -\beta x_2^2 - 2\beta x_1x_3, \ \ldots$$

Так как рассматриваемое уравнение не содержит ни синусов, ни dx / dt, то разложение Фурье функции x будет, очевидно, содержать только косинусы. Поэтому

$$x_1 = A_1 \cos nt, \qquad x_2 = -\frac{\beta A_1^2}{2n^2} + \frac{\beta A_1^2}{6n^2}\cos 2nt + A_2\cos nt$$

Для того чтобы уравнение для x_3 допускало периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при $\cos nt$ в правой части этого уравнения обращался в нуль. Это дает

$$\frac{5}{6}\frac{\beta^2}{n^2}A_1^3 + a = 0, \qquad A_1 = -\sqrt[3]{\frac{6an^2}{5\beta^2}}$$

Следовательно,

$$x_3 = -\frac{\beta A_1A_2}{n^2} + \frac{\beta A_1A_2}{3n^2}\cos 2nt + \frac{\beta^2A_1^3}{48n^4}\cos 3nt + A_3\cos nt$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\cos nt$ в уравнении для x_4, находим $A_2 = 0$. Следовательно,

$$x = -\sqrt[3]{\frac{6an^2\mu}{5\beta^2}}\cos nt + \left(\sqrt[3]{\frac{6an^2\mu}{5\beta^2}}\right)^2\left(-\frac{\beta}{2n^2} + \frac{\beta}{6n^2}\cos 2nt\right) + \ldots$$

III. Исследование устойчивости колебаний

§ 8. Общие условия устойчивости. n° 1. Переходим к исследованию устойчивости (в смысле Ляпунова) периодических движений, установленных в предыдущих разделах.

Пусть $x = x^*(t)$, $y = y^*(t)$ — какое-нибудь периодическое решение уравнений (0.1). Следуя Ляпунову, примем рассматриваемое периодическое движение за невозмущенное и составим уравнения возмущенного движения. С этой целью положим в уравнениях (0.1)

$$x = x^* + u, \qquad y = y^* + v$$

где u и v — новые переменные, которые вводятся вместо x и y. Полученные уравнения и будут уравнениями возмущенного движения.

Если в этих уравнениях сохранить только линейные члены, то получатся так называемые уравнения в вариациях, или уравнения первого приближения

$$\frac{du}{dt} = q_{11}u + q_{12}v, \qquad \frac{dv}{dt} = q_{21}u + q_{22}v \tag{8.1}$$

где

$$q_{11} = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^* + \mu\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^*, \qquad q_{12} = \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^* + \mu\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^* - \lambda$$

$$q_{21} = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^* + \mu\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^* + \lambda, \qquad q_{22} = \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^* + \mu\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^* \tag{8.2}$$

Здесь символы $(\quad)^*$ обозначают, что после дифференцирования величины x и y заменяются их значениями в невозмущенном движении, т. е. величинами x^* и y^*. Коэффициенты q_{ij} будут, очевидно, периодическими функциями времени с периодом 2π.

Пусть $u_1 = u_1(t)$, $v_1 = v_1(t)$ и $u_2 = u_2(t)$, $v_2 = v_2(t)$ — два частных решения уравнений (8.1) с начальными условиями

$$u_1(0) = 1, \quad v_1(0) = 0; \qquad u_2(0) = 0, \; v_2(0) = 1 \tag{8.3}$$

Рассмотрим уравнение

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} u_1(2\pi) - \rho & u_2(2\pi) \\ v_1(2\pi) & v_2(2\pi) - \rho \end{vmatrix} = 0 \tag{8.4}$$

Это уравнение называется *характеристическим* уравнением системы (8.1). Имеют место основные предложения Ляпунова[2]:

1. Если оба корня характеристического уравнения имеют модули, меньшие единицы, то исследуемое периодическое движение устойчиво и всякое другое движение, достаточно близкое от периодического, стремится к нему асимптотически при $t \to \infty$.

2. Если модуль хотя бы одного из корней характеристического уравнения больше единицы, то периодическое движение неустойчиво.

3. Если характеристическое уравнение, не имея корней с модулями больше единицы, имеет корни с модулями, равными единице, то задача устойчивости решается членами высших порядков в уравнениях возмущенного движения.

Таким образом, если ρ_1 и ρ_2 корни уравнения (8.4), то для устойчивости необходимо, чтобы выполнялись условия

$$|\rho_1| \leqslant 1, \qquad |\rho_2| \leqslant 1 \tag{8.5}$$

и эти условия будут также достаточными, если они выполняются со знаком неравенства.

n° 2. Вычислим $|\rho_1|$ и $|\rho_2|$. Положим с этой целью

$$B = \begin{vmatrix} u_1(2\pi) & u_2(2\pi) \\ v_1(2\pi) & v_2(2\pi) \end{vmatrix} \qquad 2A = u_1(2\pi) + v_2(2\pi) \tag{8.6}$$

Тогда имеем $\rho^2 - 2A\rho + B = 0$ и, следовательно, $\rho_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - B}$.

Будем различать случаи $A^2 - B < 0$ и $A^2 - B \geqslant 0$. В первом случае оба корня комплексны, $|\rho_1|^2 = |\rho_2|^2 = B$ и условия устойчивости (8.5) принимают вид: $|B| \leqslant 1$.

Во втором случае оба корня вещественны и условия (8.5), будут

$$\begin{aligned} \Delta = 2A - B - 1 \leqslant 0 \\ -2A - B - 1 \leqslant 0 \end{aligned} \qquad |B| \leqslant 1 \tag{8.7}$$

Объединяя оба случая, можно сказать, что для устойчивости необходимо, чтобы выполнялись условия (8.7), и эти условия будут также достаточными, если они выполняются со знаками неравенства.

Таким образом, задача устойчивости приводится к вычислению величин A и B. Вторая из этих величин может быть определена сразу. В самом деле, применяя к детерминанту Вронского фундаментальной системы $u_1(t)$, $v_1(t)$, $u_2(t)$, $v_2(t)$ теорему Лиувилля, имеем

$$B = \begin{vmatrix} u_1(2\pi) & u_2(2\pi) \\ v_1(2\pi) & v_2(2\pi) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ v_1(0) & v_2(0) \end{vmatrix} \exp \int_0^{2\pi} (q_{11} + q_{22})\, dt = \exp \int_0^{2\pi} (q_{11} + q_{22})\, dt$$

Так как

$$(\partial X / \partial x)^* + (\partial Y / \partial y)^* \equiv 0,$$

то, учитывая (8.2), получим

$$B = \exp \left\{ \mu \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^* \right] dt \right\} \tag{8.8}$$

Второе условие (8.7) можно теперь представить в виде

$$\mu \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^* + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^* \right] dt \leqslant 0$$

Отсюда с точностью до величин первого порядка относительно μ имеем следующее условие устойчивости:

$$\mu \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \right] dt \leqslant 0 \tag{8.9}$$

где скобки ( ) обозначают, что после дифференцирования величины x и y заменяются их значениями в порождающем решении.

Для вычисления величины A необходимо проинтегрировать систему (8.1), что не может быть выполнено в замкнутой форме. Однако для нашей цели достаточно вычислить величину A приближенно. Мы воспользуемся для этого другой формой характеристического уравнения, установленной Пуанкаре.

С этой целью рассмотрим какое-нибудь периодическое решение уравнений (0.1) и обозначим через γ_1 и γ_2 начальные значения (при $t = t_0$) этого решения при $\mu = 0$, т. е. начальные значения соответствующего порождающего решения, а через $\gamma_1 + \beta_1(\mu)$, $\gamma_2 + \beta_2(\mu)$ — начальные значения этого решения при $\mu \neq 0$, т. е. периодического решения полной системы (0.1).

Рассматривая β_1 и β_2 как произвольные постоянные, обозначим через $x(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$, $y(t, \beta_1, \beta_2, \mu)$ решение уравнений (0.1) с начальными значениями $\gamma_1 + \beta_1$ и $\gamma_2 + \beta_2$. Пусть, наконец,

$$\psi_1(\beta_1, \beta_2, \mu) = x(2\pi + t_0, \beta_1, \beta_2, \mu) - x(t_0, \beta_1, \beta_2, \mu)$$
$$\psi_2(\beta_1, \beta_2, \mu) = y(2\pi + t_0, \beta_1, \beta_2, \mu) - y(t_0, \beta_1, \beta_2, \mu)$$

Тогда, как показал Пуанкаре, характеристическое уравнение системы в вариациях для рассматриваемого периодического решения имеет вид:

$$\begin{vmatrix} \partial\psi_1/\partial\beta_1 + 1 - \rho & \partial\psi_2/\partial\beta_1 \\ \partial\psi_1/\partial\beta_2 & \partial\psi_2/\partial\beta_2 + 1 - \rho \end{vmatrix} = 0$$

причем β_1 и β_2 заменяются после дифференцирования их значениями в периодическом решении, т. е. функциями $\beta_1(\mu)$ и $\beta_2(\mu)$. Отсюда имеем

$$2A = 2 + \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2}, \qquad B = \begin{vmatrix} \partial\psi_1/\partial\beta_1 & \partial\psi_2/\partial\beta_1 \\ \partial\psi_1/\partial\beta_2 & \partial\psi_2/\partial\beta_2 \end{vmatrix} + \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2} + 1$$

Первые условия устойчивости (8.7) принимают вид:

$$\Delta = -\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} \leqslant 0, \qquad -4 - 2\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2}\right) + \Delta \leqslant 0 \tag{8.10}$$

§ 9. Устойчивость периодических решений, рассмотренных в предыдущих разделах. n° 1. Исследуем сначала периодическое решение с порождающим решением $\{x_0^{(n)}(t-\alpha),\ y_0^{(n)}(t-\alpha)\}$. Здесь ψ_1 и ψ_2 суть соответственно левые части уравнений (2.5), или, что одно и то же, уравнений (2.27). Обозначим через $\psi_1^*(\beta_2, \mu)$ результат исключения β_1 из этих уравнений, т. е. левую часть (2.29). Как легко видеть:

$$-\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} = \frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_1}\frac{\partial\psi_1^*}{\partial\beta_2}$$

и, следовательно, с точностью до величин первого порядка относительно μ, на основании (2.47), имеем

$$-\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} = 2\pi NMQ(\alpha)\mu = -\frac{2\pi N}{n}\frac{dP(\alpha)}{d\alpha}\mu$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, условие (8.9) и первое условие (8.10) имеют вид:

$$\mu \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \right] dt \leqslant 0$$
$$N\mu \frac{dP(\alpha)}{d\alpha} \geqslant 0 \tag{9.1}$$

где в производных $(\partial f / \partial x)$ и $(\partial F / \partial y)$ величины x, y заменяются на $x_0^{(n)}(t-\alpha)$, $y_0^{(n)}(t-\alpha)$, а функция $P(\alpha)$ определяется формулой (2.35). Что же касается второго из условий (8.10), то оно при достаточно малом μ будет выполняться само по себе. Таким образом, для устойчивости необходимо, чтобы выполнялись условия (9.1). Эти условия будут, как указывалось выше, также и достаточными, если они выполняются со знаком неравенства.

n° 2. Рассмотрим теперь периодическое решение $\{x^{(0)}, y^{(0)}\}$. В рассматриваемом случае функции ψ_1 и ψ_2 суть соответственно левые части уравнений (4.1) и, следовательно,

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} = 2(1 - \cos 2\pi\lambda) + \ldots$$

где неприведенные члены обращаются в нуль при $\mu = 0$. Таким образом, при достаточно малом μ первое условие (8.10) всегда выполняется со знаком неравенства; точно так же выполняется со знаком неравенства и второе условие (8.10). Следовательно, для устойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие (8.9), которое в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$\mu \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right\}_{x=y=0} dt \leqslant 0 \tag{9.2}$$

Этого условия будет также и достаточно, если оно выполняется со знаком неравенства.

n° 3. Рассмотрим, наконец, резонансное решение. В рассматриваемом случае ψ_1 и ψ_2 суть левые части уравнений (6.7), которые, как мы показали, имеют вид (6.11). Поэтому, удерживая только младшие степени μ и принимая во внимание, что β_1 и β_2 определяются формулами (6.14), находим

$$\Delta = -\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(\beta_1, \beta_2)} = -4\pi^2 n^2 h_{2s}^2 (1+2s)(\beta_1^2 + \beta_2^2)^{2s} =$$
$$= -4\pi^2 n^2 h_{2s}^2 (1+2s)(\alpha_1^{(0)2} + \alpha_2^{(0)2})^{2s} \mu^{4s/(2s+1)} < 0$$

Таким образом, первое условие (8.10) здесь выполняется со знаком неравенства. Точно так же выполняется со знаком неравенства и второе условие (8.10). Следовательно, для устойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие (9.2), которое будет также и достаточным, если оно выполняется со знаком неравенства.

IV. Задача Дюффинга при полигармоническом возбуждении

§ 10. Периодические решения $\{x^{(p)}(t)\}$, $\{x^{(q)}(t)\}$. Применим результаты предыдущих разделов к исследованию вынужденных колебаний системы, описываемой уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x-\gamma x^3=\mu\left(a\cos pt+b\cos qt-2h\frac{dx}{dt}\right)\quad (\gamma>0,\ \mu>0,\ h>0) \qquad (10.1)$$

где p и q — целые числа. Уравнение (10.1) можно представить в виде системы:

$$\frac{dx}{dt}=-ky,\qquad \frac{dy}{dt}=kx-\frac{\gamma}{k}x^3-\frac{\mu}{k}(a\cos pt+b\cos qt+2hy) \qquad (10.2)$$

и, следовательно, в рассматриваемом случае

$$X=0,\quad Y=-\frac{\gamma}{k}x^3,\quad f=0,\quad F=-\frac{a}{k}\cos pt-\frac{b}{k}\cos qt-2hy \qquad (10.3)$$

Как легко видеть, система (10.2) является частным случаем системы (0.1) и, следовательно, к ней могут быть приложены результаты, полученные в предыдущих главах. В этом параграфе исследуются периодические решения $\{x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t)\}$ при $n=p$ и $n=q$.

Для краткости эти решения будем обозначать через $\{x^{(p)}(t)\}$ и $\{x^{(q)}(t)\}$ и ограничимся рассмотрением только решения $\{x^{(p)}(t)\}$, так как решение $\{x^{(q)}(t)\}$ получится простой перестановкой чисел p и q.

Пользуясь методом, изложенным в § 1 n° 1, легко найдем, что общее решение порождающего уравнения

$$\frac{d^2x_0}{dt^2}+k^2x_0-\gamma x_0^3=0$$

имеет вид:

$$x_0(c,\tau)=c\cos\tau+c^3x_{03}(\tau)+c^5x_{05}(\tau)+\dots$$

Здесь

$$\tau=\frac{kt}{(1+h_2c^2+h_4c^4+\dots)}\qquad\left(h_2=\frac{3}{8}\frac{\gamma}{k^2},\quad h_4=\frac{57}{256}\frac{\gamma^2}{k^4}\right)$$

$$x_{03}(\tau)=\frac{1}{32}\frac{\gamma}{k^2}\cos\tau-\frac{1}{32}\frac{\gamma}{k^2}\cos 3\tau$$

$$x_{05}(\tau)=\frac{23}{1024}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos\tau-\frac{3}{128}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos 3\tau+\frac{1}{1024}\frac{\gamma^2}{k^4}\cos 5\tau$$

Следовательно, на основании формул § 1

$$x_0^{(p)}(t-\alpha)=c_p\cos p(t-\alpha)+c_p^3x_3[p(t-\alpha)]+c_p^5x_5[p(t-\alpha)]+\cdots \qquad (10.4)$$

где c_p определяется из уравнения

$$\frac{3}{8}\frac{\gamma}{k^2}c_p^2+\frac{57}{256}\frac{\gamma^2}{k^4}c_p^4+\cdots=\frac{k-p}{p} \qquad (10.5)$$

Это уравнение при $k > p$ имеет два вещественных решения для c_p, и эти решения численно равны между собой и противоположны по знаку.

Для функций φ_1 **и** ψ_1 **имеем**

$$\varphi_1 = -c_p \sin p(t-\alpha) + c_p^3 \frac{dx_3(\tau)}{d\tau} + c_p^5 \frac{dx_5(\tau)}{d\tau} + \cdots \qquad (\tau = p(t-\alpha))$$

$$\psi_1 = \cos p(t-\alpha) + 3c_p^2 x_3(\tau) + 5c_p^4 x_5(\tau) + \cdots$$

Функция φ_2 и ψ_2 здесь не приводятся, так как они не войдут в выражение для $x^{(p)}$.

Для вычисления $x^{(p)}$ пользуемся правилами § 3 n° 3. Будем иметь

$$x^{(p)} = x_0^{(p)}(t-\alpha) + \mu x_1 + \cdots \tag{10.6}$$

Для практики вполне достаточно ограничиться только приведенными здесь членами. При этом при вычислении x_1 достаточно взять только первые члены в разложении φ_1 и ψ_1. При таком предположении имеем

$$\begin{aligned} x_1 = {} & \frac{a\cos p\alpha}{2kNM}\cos p(t-\alpha) + \left(\frac{hc_p}{2kM} - \frac{hNc_p^2}{8\nu_1 kM} - \alpha_1 c_p\right)\sin p(t-\alpha) + \\ & + \left(\frac{ac_p}{4kpM} - \frac{ac_p^2 N}{16kp^2 M}\right)\cos pt + \left(\frac{bc_p q}{k(p^2-q^2)M} - \frac{Nbc_p^2(p^2+q^2)}{2k(p-q)^2 M}\right)\cos qt + \\ & + \frac{ac_p^2 N}{16kp^2 M}\cos(3pt - 2pk) + \frac{bc_p^2 N}{4k(p-q)^2 M}\cos(2pt + qt - 2p\alpha) + \\ & + \frac{bc_p^2 N}{4k(p-q)^2 M}\cos(2pt - qt - 2p\alpha) + \frac{hc_{p1}^2 N}{8kpM}\sin 3p(t-\alpha) \end{aligned} \tag{10.7}$$

где на основании (2.17)

$$M = \frac{kc_p}{p}\left(1 - \frac{\gamma}{k^2}c_p^2\right), \qquad N = -\frac{p^2}{k}\left(\frac{3}{4}\frac{\gamma}{k^2}c_p + \frac{57}{64}\frac{\gamma^2}{k^4}c_p^3 + \cdots\right) \tag{10.8}$$

Величины α и α_1 определяются из уравнений

$$P(\alpha) = \int_0^{2\pi}\left\{\frac{a}{k}\cos pt + \frac{b}{k}\cos qt - \frac{2h}{k}\frac{dx_0^{(p)}(t-\alpha)}{dt}\right\}\frac{dx_0^{(p)}(t-\alpha)}{dt}\,dt = 0 \tag{10.9}$$

$$\frac{dP(\alpha)}{d\alpha}\alpha_1 = \left\{\int_0^{2\pi}\left(f_2\frac{dy_0^{(p)}(t-\alpha)}{dt} - F_2\frac{dx_0^{(p)}(t-\alpha)}{dt}\right)dt\right\}_{\alpha_1=0} \tag{10.10}$$

Рассмотрим подробнее эти уравнения. Имеем на основании (10.4)

$$x_0^{(p)}(t-\alpha) = \sum_{j=2}^{\infty} A_{2j+1}\cos(2j+1)p(t-\alpha)$$

Приводим значения первых двух коэффициентов в этой формуле:

$$A_1 = c_p + \frac{1}{32}\frac{\gamma}{k^2}c_p^3 + \frac{23}{1024}\frac{\gamma^2}{k^4}c_p^5 + \cdots,$$

$$A_3 = -\frac{1}{32}\frac{\gamma}{k^2}c_p^3 - \frac{3}{128}\frac{\gamma^2}{k^4}c_p^5 + \cdots$$

Будем предполагать, что отношение q / p не является целым числом или по крайней мере целым нечетным числом. При таком предположении уравнение (10.9) принимает вид:

$$P(\alpha) = \frac{a\pi p A_1}{k} \sin p\alpha - \frac{2\pi h p^2}{k} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1)^2 A_{2j+1}^2 = 0 \qquad (10.11)$$

Это уравнение определяет два значения для угла $p\alpha$, причем сумма этих значений равна π. Величина $dP / d\alpha$ для этих значений отлична от нуля. Если теперь принять во внимание, что для c_p имеют место два различных значения, равных по величине и противоположных по знаку, то на основании теоремы, установленной в § 2, следует заключить, что существуют четыре периодических решения $\{x^{(p)}\}$.

Однако в действительности имеются только два различных периодических решения $\{x^{(p)}\}$. В самом деле, так как функция $x_0^{(p)}(t-\alpha)$ содержит только нечетные степени c_p и только нечетные кратности угла $p(t-\alpha)$, то замена величины $p\alpha$ на величину $\pi - p\alpha$ эквивалентна, как это легко видеть из (10.11), переходу от порождающего решения $x_0^{(p)}(t-\alpha)$ с выбранным значением c_p к порождающему решению $x_0^{(p)}(t-\alpha)$ с противоположными по знаку значением c_p. Поэтому можно предполагать, что угол α является острым.

Если в уравнении (10.11) сохранить относительно c_p только младшие члены, то получим приближенную формулу

$$\sin p\alpha = \frac{2hpc_p}{a} \qquad (10.12)$$

Эта приближенная формула будет, очевидно, справедлива и в том случае, когда отношение q / p есть целое число.

Заметим, что уравнение (10.11) накладывает некоторое ограничение на величину c_p и, следовательно, на величину $k - p$. В самом деле, из (10.11) находим, что должно выполняться неравенство

$$\frac{2hp}{| aA_1 |} \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1)^2 A_{2j+1}^2 \leqslant 1 \qquad (10.13)$$

Переходим к вычислению величины α_1. В рассматриваемом случае

$$f_2 = 0, \qquad F_2 = -\frac{3\gamma}{k} x_0^{(p)}(t-\alpha) x_1^2 + \frac{2h}{k} \frac{dx_1}{dt}$$

Поэтому, если при вычислении α_1 ограничиться относительно c_p младшим членом в выражении для x_1, т. е. первым членом в формуле (10.7), а также младшим членом в $P(\alpha)$, то из уравнения (10.10) получим

$$\alpha_1 = -\frac{ph}{kNM} = \frac{4}{3} \frac{hk}{\gamma c_p^2} \qquad (10.14)$$

Формулы (10.4) — (10.8), (10.12) и (10.14) определяют решение $\{x^{(p)}\}$.

§ 11. Решение $\{x^{(0)}\}$. Найдем периодическое решение уравнения (10.1), обращающееся в нуль при $\mu=0$. Полагая $x^{(0)}=x_1\mu+x_2\mu^2+\cdots$ и поступая, как указано в § 4, найдем

$$x_1=\frac{a}{k^2-p^2}\cos pt+\frac{b}{k^2-q^2}\cos qt$$

$$x_2=\frac{2hpa}{(k^2-p^2)^2}\sin pt+\frac{2hqb}{(k^2-q)^2}\sin qt \tag{11.1}$$

$$x_3=A_p\cos pt+A_q\cos qt+A_{3p}\cos 3pt+A_{3q}\cos 3qt+A_{2p+q}\cos(2p+q)+$$
$$+A_{2p-q}\cos(2p-q)t+A_{2p+q}\cos(2q+p)+A_{2p-q}\cos(2q-p)t$$

Здесь

$$A_p=\frac{3}{2}\gamma\left[\frac{a^3}{2(k^2-p^2)^4}+\frac{ab^2}{(k^2-p^2)^2(k^2-q^2)^2}\right]-\frac{4h^2p^2a}{(k^2-p^2)^3}$$
$$A_q=\frac{3}{2}\gamma\left[\frac{b^3}{2(k^2-q^2)^4}+\frac{a^2b}{(k^2-p^2)^2(k^2-q^2)^2}\right]-\frac{4h^2q^2b}{(k^2-q^2)^3} \tag{11.2}$$

$$A_{3p}=\frac{\gamma a^3}{4(k^2-p^2)^3(k^2-9p^2)},\qquad A_{2p\pm q}=\frac{3\gamma a^2b}{4(k^2-p^2)^2(k^2-q^2)[k^2-(2p\pm q)^2]}$$
$$A_{3q}=\frac{\gamma b^3}{4(k^2-q^2)^3(k^2-9q^2)},\qquad A_{2q\pm p}=\frac{3\gamma a^2b}{4(k^2-p^2)^2(k^2-q^2)[k^2-(2q\pm p)^2]}$$

Формулы (11.1) и (11.2) определяют решение $\{x^{(0)}\}$.

§ 12. Резонансное решение. Найдем колебание системы в окрестности резонанса $k=p$. Следуя разделу II, полагаем $p^2-k^2=\mu\lambda$. Уравнение (10.1) примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt}+p^2x-\gamma x^3=\mu\left(a\cos pt+b\cos qt-2h\frac{dx}{dt}+\lambda x\right) \tag{12.1}$$

Решение этого уравнения предполагаем в виде

$$x=x_1\mu^{1/3}+x_2\mu^{2/3}+x_3\mu+\ldots \tag{12.2}$$

Имеем

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}+p^2x_1=0,\qquad \frac{d^2x_3}{dt^2}+p^2x_3=\gamma x_1^3+a\cos pt+b\cos qt$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2}+p^2x_2=0,\qquad \frac{d^2x_4}{dt^2}+p^2x_4=3\gamma x_1^2x_2-2h\frac{dx_1}{dt}+\lambda x_1$$
$$\frac{d^2x_5}{dt^2}+p^2x_5=3\gamma x_1^2x_3+3\gamma x_1x_2^2-2h\frac{dx_2}{dt}+\lambda x_2$$

Отсюда находим

$$x_1=A_1\cos pt+B_1\sin pt,\qquad x_2=A_2\cos pt+B_2\sin pt \tag{12.3}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos pt$ и $\sin pt$ в уравнении для x_3, получаем

$$A_1=-\sqrt[3]{\frac{4a}{3\gamma}},\qquad B_1=0 \tag{12.4}$$

Следовательно,

$$x_3=+\frac{a}{24p^2}\cos 3pt+\frac{b}{p^2-q^2}\cos qt+A_3\cos pt+B_3\sin pt$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos pt$ и $\sin pt$ в уравнениях для x_4 и x_5, найдем

$$A_2 = \frac{4\lambda}{9\gamma}\sqrt[3]{\frac{3\gamma}{4a}}, \quad B_2 = \frac{8hp}{3\gamma}\sqrt{\frac{3\gamma}{4a}}, \quad A_3 = -\frac{a}{72p^2} + \frac{32h^2p^2}{a\gamma}, \quad B_3 = -\frac{16\lambda p}{3a\gamma} \qquad (12.5)$$

Формулы (12.2) — (12.5) и решают поставленную задачу.

§ 13. Характер развития колебаний. Допустим для определенности, что $a > 0$, $b > 0$, $q > P$. Пусть частота k лежит в интервале $l < k \leqslant l + 1$, где l — целое число. Так как в рассматриваемом случае

$$h_2 = \frac{3}{8}\frac{\gamma}{k^2} > 0$$

то на основании § 12 уравнение колебаний допускает $2l + 1$ периодических решений: решение $\{x^{(0)}\}$ и $2l$ решений $\{x^{(1)}(t)\}, \ldots, \{x^{(l)}(t)\}$. По какому из этих решений будет в действительности развиваться колебание? При приближенном исследовании задачи колебаний для случая внешней силы, состоящей только из одной гармоники ($b = 0$), Дюффинг и другие авторы искали решения в виде $x = A\cos pt + B\sin qt$ и, следовательно, молчаливо вводили физическую гипотезу, что преобладающая гармоника в вынужденном колебании имеет такую же частоту, как и возмущающая сила. Эта гипотеза хорошо подтверждается экспериментальными данными.

Будем также предполагать, что в вынужденном колебании преобладают гармоники с частотами p и q или хотя бы одна из них.

Из всех рассмотренных периодических решений этой гипотезе будут удовлетворять семь решений: решение $\{x^{(0)}\}$, два решения $\{x^{(p)}(t)\}$, два решения $\{x^{(q)}(t)\}$ и два резонансных решения (в окрестности p и q). Из этих решений физически могут осуществляться лишь те, которые обладают устойчивостью.

Так как для уравнения (10.1)

$$\mu\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\right\}dt = -4\pi h\mu < 0$$

то на основании результатов § 9 резонансные решения и решение $\{x^{(0)}\}$ безусловно устойчивы. Что же касается решений $\{x^{(p)}\}$ и $\{x^{(q)}\}$, то для их устойчивости необходимо выполнение второго из условий (9.1).

Простое вычисление показывает, что при достаточно малом c_p из двух решений $\{x^{(p)}\}$ решение, отвечающее положительному значению c_p, неустойчиво, а решение, отвечающее отрицательному значению c_p, устойчиво. То же самое справедливо и для решений $\{x^{(q)}\}$.

Из всего вышесказанного можно уже сделать определенные выводы о характере развития колебаний.

Допустим сначала, что $k < p$. Тогда колебание будет развиваться по устойчивому решению $\{x^{(0)}\}$, которое при $k < p$ является единственным, удовлетворяющим принятой выше гипотезе. При приближении k к p ряды, определяющие решение $\{x^{(0)}\}$, начинают расходиться.

Отсюда, однако, не следует, что решение $\{x^{(0)}\}$ перестает существовать. Оно может сохраниться, но иметь другое аналитическое выражение. Более детальный анализ показывает, что при приближении k к p решение $\{x^{(0)}\}$ непрерывно переходит в разонансное (в окрестности p), а последнее при дальнейшем увеличении k непрерывно переходит в возникающее после резонанса решение $\{x^{(p)}\}$, отвечающее отрицательному значению c_p. При таком значении k (или несколько большем) будет также существовать решение $\{x^{(p)}\}$, отвечающее положительному значению c_p, и снова решение $\{x^{(0)}\}$. Первое из этих решений, как уже указывалось, неустойчиво. При дальнейшем увеличении k величина c_p, как это вытекает из определяющего ее уравнения, будет численно возрастать, т. е. амплитуда колебаний будет увеличиваться, вследствие чего в некоторый момент эти колебания станут неустойчивыми.

Допустим, что это произойдет при $k = k^*$. Чтобы выяснить, как будут развиваться колебания при $k > k^*$, придется рассмотреть два различных случая в зависимости от того, будет ли разность $q - p$ достаточно большой или нет.

Допустим сначала, что разность $q - p$ достаточно велика, а именно, допустим, $q > k^*$. В этом случае при $k = k^*$ единственным устойчивым решением, удовлетворяющим вышепринятой гипотезе, является $\{x^{(0)}\}$. Вследствие этого колебание скачкообразно перейдет на это решение. При дальнейшем возрастании k решение $\{x^{(0)}\}$ непрерывно перейдет через резонансное решение (в окрестности q) в решение $\{x^{(q)}\}$, отвечающее отрицательному значению c_q, а затем после потери устойчивости,— снова скачкообразно в решение $\{x^{(0)}\}$.

Допустим теперь, что разность $q - p$ мала, а именно, допустим, что $q < k^*$. В этом случае колебания будут развиваться по решению $\{x^{(p)}\}$ (с отрицательным c_p) при значениях k не только меньших, но даже равных и превосходящих q. Следовательно, несмотря на то, что в резонансе будет находиться вторая гармоника, в вынужденном колебании будет преобладать первая гармоника. При $k > k^*$ колебания сорвутся или на решение $\{x^{(0)}\}$ или на решение $\{x^{(q)}\}$ (с отрицательным c_q), которое еще может оказаться устойчивым.

Поступила в редакцию
4 IV 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Poincaré. H. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Paris. 1892. T. I. P. 79.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
3. Pontrjagin L. S. Ueber Autoschwigungssysteme, die den Hamiltonschen nahe liegen. Phys Zt. der Sowjetunion. 1934. S. 14. Bd. 6.