имеет пределом нормальный закон, но также и то, что все ее моменты стремятся к нормальным, так как при применении метода моментов Чебышева-Маркова оба эти факта не отделимы. Напротив, условие Ляпунова для некоторого одного только данного $p>2$, имеющее, как мы видели, автоматическим следствием соблюдение соответствующих условий для всех значений меньше p, ничего не предполагает относительно моментов высших степеней, которые вообще могут и не существовать. Но можно показать, а для целого четного p это непосредственно вытекает из рассуждений Маркова, что условие Ляпунова порядка p равнозначно тому, что математическое ожидание $|Y|^p$ имеет пределом соответствующее нормальное математическое ожидание. Таким образом, условие Ляпунова порядка p или равноценное ему единственное условие, что момент степени м. о. $|Y|^p$ имеет пределом соответствующий нормальный момент, необходимо[1] и достаточно для того, чтобы закон вероятностей для суммы (9) стремился к нормальному закону и одновременно все его моменты не выше порядка p стремились к нормальным моментам.

Отметим еще одно обстоятельство, связанное с первым мемуаром Ляпунова. В предисловии к этому мемуару упоминается о том, что условие в теореме Чебышева недостаточно в частном случае закона больших чисел. Под законом больших чисел автор, очевидно, подразумевает, согласно распространенной в XIX столетии терминологии, приложение предельной формулы Лапласа к схеме Пуассона, т. е. к выражению $m-(p_1+\cdots+p_n)$, где m—число появлений события P, имеющего в каждом из независимых опытов вероятности p_1, p_2, ... Предельная формула, действительно, неприменима, если сумма $p_1+\cdots+p_n$ не растет бесконечно с возрастанием n.

6. РАЗЛИЧНЫЕ РАБОТЫ

В этом разделе рассматриваются некоторые работы Ляпунова, содержание которых удобнее излагать отдельно.

Сюда относятся две студенческие работы. Первая *О равновесии тяжелых тел в тяжелых жидкостях, содержащихся в сосуде определенной формы*[1] (1881), за которую он получил золотую медаль Петербургского университета, посвящена исследованию влияния сосуда, содержащего несколько жидкостей, на равновесие погруженного в него твердого тела. Жидкости предполагаются однородными и несжимаемыми. В первом параграфе предполагается, что объемные силы имеют потенциал, а в остальной работе внешние силы сводятся к силе тяжести.

В первом параграфе доказывается существование потенциала гидростатического давления на погруженное тело. Этот потенциал представляет собой сумму некоторого интеграла по объему тела и функции величин объемов V_k той части тела, которая находится в k-й жидкости. Объем V_k ограничен поверхностью тела и двумя поверхностями уровня потен-

[1] Необходимость условия Ляпунова $M_n^{(p)}\to 0$ имеет место при дополнительном предположении, что $a_i/A_n\to 0$ равномерно при всех $i\leqslant n\to\infty$.

циала внешних сил. При заданной форме сосуда потенциал гидростатического давления есть функция шести координат, определяющих положение твердого тела в пространстве.

Второй параграф посвящен исследованию равновесия и устойчивости равновесия погруженного тела, причем для отыскания устойчивого равновесия Ляпунов ищет условия минимума потенциала всех сил, действующих на погруженное тело. Перечислим некоторые результаты этого параграфа. Установлены необходимые и достаточные условия равновесия. Найдено выражение второй вариации потенциала сил, действующих на тело.

Доказано, что любое положение тела устойчиво по отношению к поступательным перемещениям по вертикальному направлению и что положение равновесия устойчиво для всех перемещений, если центр тяжести тела лежит ниже или совпадает с общим центром тяжести всей вытесненной телом жидкости.

Далее доказывается ряд свойств положения равновесия, связанных с положением центра тяжести сечений тела с плоскостями, разделяющими жидкость.

Третий параграф работы посвящен изложению аналитического метода отыскания положений равновесия тела. Построена система уравнений, определяющая положение равновесия, и даны указания о выборе решений этой системы. Кроме того, установлена теорема об устойчивости положения равновесия, обобщающая известные теоремы о свойствах радиусов наибольшей и наименьшей кривизны поверхностей центров в случае одной или двух жидкостей.

В четвертом параграфе рассматриваются примеры.

Вторая работа *О потенциале гидростатических давлений*[2] (1881) является продолжением предыдущей. В ней рассматривается вопрос о существовании потенциала гидростатического давления для случая сжимаемых жидкостей и деформируемого тела. Считается, что система находится под действием объемных сил, имеющих потенциал. Сначала предполагается, что этот потенциал не имеет экстремумов внутри тела и жидкостей. Условия для существования потенциала и выражения для него ищутся в двух случаях: когда сосуд неподвижен и неизменяем и когда сосуд деформируем. В первом случае исследуется существование потенциала гидростатического давления на тело и во втором на тело и на сосуд. Основной является теорема о том, что гидростатические давления на тело, сосуд и поверхности уровня, ограничивающие жидкости, имеют потенциал. В случае неподвижного твердого сосуда существование потенциала гидростатического давления на тело состоит в том, чтобы давления на поверхности уровня, ограничивающие жидкости, зависели только от значений потенциала объемных сил на этой поверхности.

Отмечается, что существование потенциала гидростатического давления на тело не зависит от характера его деформации. В случае неограниченного сосуда потенциал гидростатического давления на тело равен интегралу от давления по объему, занимаемому телом.

В работе *Некоторое обобщение формулы Лежень-Дирихле для потенциальной функции эллипсоида на внутреннюю точку* [4] (1885) исследуется интеграл

$$V(x, y, z) = \iiint \frac{F(r)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad \left(r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}\right)$$

распространенный на эллипсоид

$$\frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} + \frac{\zeta^2}{C^2} = 1$$

в предположении, что точка (x, y, z) также принадлежит этому эллипсоиду. Результат состоит в следующем: если A — наибольшая полуось эллипсоида, $F(r)$ — функция, регулярная в круге $|z| \leqslant k < 2A$, то

$$V(x, y, z) = 2ABC \int\limits_{l} \frac{H(\lambda)\, d\lambda}{D(\lambda)} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2}\pi} F\left(-i\sqrt{\lambda H(\lambda)}\cos\varphi\right) \sin^2\varphi\, d\varphi$$

где

$$D = \sqrt{(A^2+\lambda)(B^2+\lambda)(C^2+\lambda)}, \qquad H(\lambda) = 1 - \frac{x^2}{A^2+\lambda} - \frac{y^2}{B^2+\lambda} - \frac{z^2}{C^2+\lambda}$$

При этом контур l берется по вещественной оси от точки $\lambda = 0$ до точки $\lambda = R$, причем

$$\frac{k^2 - k\sqrt{k^2 - 4A^2}}{2} < R < \frac{k^2 + k\sqrt{k^2 - 4A^2}}{2}$$

и дальше по полной окружности с центром $\lambda = 0$ и радиусом R и по вещественной оси от $\lambda = R$ до $\lambda = 0$.

В работе *О теле наибольшего потенциала* [5] (1886) доказывается, что если существует такое тело D, для которого шестикратный интеграл

$$\Pi_1 = \int\limits_D \int\limits_D \frac{d\tau\, d\tau'}{r}$$

достигает при заданном объеме D точной верхней границы, то D есть шар. Эта работа непосредственно связана с устойчивостью сферы как фигуры равновесия.

В 1919 г. Карлеман доказал (Math. Zeitschr. Bd. III. H. I) указанное выше предположение. Вместо функции $1/r$ он рассматривает любую положительную, убывающую функцию $F(r)$, которая может обращаться в бесконечность при $r = 0$. При этом предполагается, что интеграл от функции $r^{-1}F(r)$, взятый по промежутку $(0, a)$, сходится.

В работе *Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости* [11] (1893) Ляпунов указывает новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости при отсутствии внешних сил. Дело сводится к разысканию четвертого интеграла дифференциальных уравнений, отличного от известных трех интегралов Кирхгофа.

Случай интегрируемости, открытый Ляпуновым, тесно связан с тем случаем интегрируемости, который был указан В. А. Стекловым в его магистерской диссертации. В обоих случаях налагаются некоторые условия на коэффициенты в выражении живой силы системы, состоящей из твердого тела в жидкости.

В работе *Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку* [12] (1894) доказывается следующий результат: кроме случаев Эйлера, Лагранжа и С. В. Ковалевской, всегда существуют такие вещественные начальные значения p_0, q_0, r_0, ξ_0, η_0, ζ_0 $(\xi_0^2+\eta_0^2+\zeta_0^2=1)$, при которых среди функций p, q, r, ξ, η, ζ, являющихся решением соответствующей системы дифференциальных уравнений, имеются многозначные функции t. Это получается в результате исследования системы уравнений, определяющей частные производные от упомянутых функций по начальным значениям для некоторых частных решений основной системы дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела.

В работе *О рядах, предложенных Хиллом для представления движения луны* [14] (1896) впервые доказывается сходимость рядов, при помощи которых Хилл проинтегрировал дифференциальные уравнения движения луны. Ляпунов исходит из системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2p}{d\tau^2}+2(1+m)i\frac{dp}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p+q)=\frac{3}{2}\lambda(q-1)e^{-2\tau i}+lR_p$$

$$\frac{d^2q}{d\tau^2}-2(1+m)i\frac{dq}{d\tau}-\frac{3}{2}l(p+q)=\frac{3}{2}\lambda(p-1)e^{+2\tau i}+lR_q$$

где

$$(1-p)^{-1/2}(1-q)^{-3/2}=1+\frac{1}{2}p+\frac{3}{2}q+R_p, \qquad l=1+2m+\frac{3}{2}m^2$$

$$(1-p)^{-3/2}(1-q)^{-1/2}=1+\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}q+R_q, \qquad \lambda=m^2$$

Постоянная λ считается параметром и ищется периодическое решение этой системы вида

$$p=\sum_{k=1}^{\infty}p_k\lambda^k, \qquad q=\sum_{k=1}^{\infty}q_k\lambda^k$$

где p_k и q_k не зависят от λ, имеют период 2π и $p_k=q_k$ при $\tau=0$. При этом p_k и q_k определяются единственным образом и доказывается сходимость построенных рядов при условии $m\leqslant 1/7$ (в теории луны $m=1/12$). Оказывается, что построенное решение имеет период π.