5. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Ляпуновым были опубликованы два мемуара, относящиеся к теории вероятностей: *Об одной теореме теории вероятностей*[24] (представлен в Петербургскую Академию Наук в 1900 г. 4 мая), *Новая форма теоремы о пределе вероятности*[21] (представлен в Петербургскую Академию Наук в 1901 г. 25 апреля). Эти работы, составляющие две части одного и того же исследования, написанные в Харькове в течение одного года, были коротким эпизодом в научном творчестве Ляпунова, однако значение их для теории вероятности исключительно велико.

В конце прошлого столетия в теории вероятностей возникла важная задача о приложимости предельной теоремы Лапласа к сумме случайных и независимых величин x_i при возможно более широких условиях. Как известно, П. Л. Чебышев впервые указал метод (метод моментов) для решения поставленной задачи при единственном предположении, что каждое из слагаемых имеет конечные моменты, т. е. математические ожидания м. о. $|x_i|^p = d_i^{(p)} < \infty$ для любой целой положительной степени p. Несколько уточнив рассуждения Чебышева, А. А. Марков (1898) доказал предельную теорему в следующем виде[1].

Вероятность неравенства

$$z_1 < \frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{2(a_1 + \cdots + a_n)}} < z_2 \tag{1}$$

имеет пределом

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}\, dz \tag{2}$$

если для всех целых значений $p > 2$ отношение

$$\frac{d_1^{(p)} + \cdots + d_n^{(p)}}{(a_1 + \cdots + a_n)^{\frac{1}{2}p}} = M_n^{(p)} \tag{3}$$

стремится к нулю при бесконечном возрастании n.

Эта замечательная теорема Чебышева-Маркова, далеко превосходящая по своей общности все, что было известно раньше, охватывает, в частности, обычный в статистике случай, когда все $|x_i| \leqslant L$ ограничены и $(a_1 + \ldots + a_n) \to \infty$ при $n \to \infty$, так как тогда $d_i^{(p)} \leqslant a_i L^{p-2}$ и, следовательно, для $n \to \infty$

$$M_n^{(p)} \leqslant \frac{L^{p-2}(a_1 + \cdots + a_n)}{(a_1 + \cdots + a_n)^{\frac{1}{2}p}} = \frac{L^{p-2}}{(a_1 + \cdots +)^{\frac{1}{2}(p-2)}} \to 0 \qquad (p > 2)$$

Существенное принципиальное преимущество теоремы Ляпунова заключается в том, что он требует существования хотя бы одного значения

---

[1] Для упрощения считаем все м. о. $x_i = d_i = 0$ (так как всегда можно заменить случайную величину x_i ее отклонением $x_i - \bar{x}_i$); таким образом м. о. $x_i^2 = d_i^{(2)} = a_i$, а м. о. $|x_i|^{2+\delta} = d_i^{(2+\delta)}$ Ляпунов обозначает просто через d_i, так как во всех его рассуждениях положительная величина δ остается неизменной.

$p = 2 + \delta\,(\delta > 0)$ (где p может и не быть целым числом), для которого $d_i^{(2+\delta)} < \infty$. При этом, что особенно важно, в формулировке Ляпунова бесконечное число условий Маркова $M_n^{(p)} \to 0$ при всех целых $p > 2$ заменяется единственным условием, соответствующим лишь одному какому-нибудь значению $\delta > 0$.

Этот классический результат Ляпунова, представляющий венец его исследований по теории вероятностей, был получен им не сразу. В первой своей работе Ляпунов ограничился случаем $\delta = 1$, т. е. $p = 3$, но ему еще не удалось заменить все условия Маркова единственным условием $M_n^{(3)} \to 0$. [Как видно из одной леммы второго мемуара Ляпунова, выполнение какого-нибудь одного условия Маркова $M_n^{(p)} \to 0$ $(p = 2 + \delta > 3)$ влечет за собой $M_n^{(p')} \to 0$ для всех $p' < p$, т. е., в частности, $M_n^{(3)} \to 0$, так что все заключения первой работы без дополнительных вычислений автоматически могут быть распространены на случай любого одного значения $\delta > 1$].

В последовательном преодолении трудностей Ляпунов был вынужден сначала внести дополнительное ограничение, что все математические ожидания

$$\text{м. о. } |x_i|^3 = d_i^{(3)} \leqslant L^3 \tag{4}$$

равномерно ограничены и вместо условия

$$M_n^{(3)} = \frac{d_1^{(3)} + \ldots + d_n^{(3)}}{A_n^{\frac{3}{2}}} \to 0 \qquad (A_n = a_2 + \ldots + a_n) \tag{5}$$

он потребовал в первой работе соблюдения условия

$$\frac{n^{\frac{2}{3}} L^2}{A_n} \to 0 \tag{6}$$

Это условие является несколько более стеснительным, чем $M_n^{(3)} \to 0$, так как

$$M_n^{(3)} \leqslant \frac{nL^3}{A_n^{\frac{3}{2}}} = \left[\frac{n^{\frac{2}{3}} L^2}{A_n}\right]^{\frac{3}{2}}$$

В заметке *Об одной теореме теории вероятностей* [23] (представлена Парижской Академии Наук в 1901 г. 21 января) Ляпунов дает теорему первой работы, уже обобщенную в том отношении, что вместо $\delta = 1$ он полагает $(0 < \delta \leqslant 1)$, т. е. в сущности, любое $\delta > 0$. Однако эта заметка окончательного результата не содержит.

Доказательство предельной теоремы методом моментов основано на теореме Чебышева (вытекающей из его исследований об экстремальных значениях определенных интегралов), согласно которой равенство моментов всех целых степеней случайной величины Y соответствующим нормальным моментам влечет за собой, что при любых $z_1 < z_2$

$$\text{вер.}\,(z_1 < Y < z_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \tag{7}$$

В силу этого предельная теорема Чебышева-Маркова являлась следствием того факта, что из бесконечной совокупности предельных равенств $M_n^{(p)} \to 0$ вытекают все требуемые предельные равенства

$$\text{м. о.}\left[\frac{x_1+\cdots+x_n}{\sqrt{a_1+\cdots+a_n}}\right]^p \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^p\,dt \qquad (p=1,2.\ldots) \qquad (8)$$

Доказательство Ляпунова проводится совершенно новым методом, получившим название метода характеристических функций, который оказался настолько мощным, что занял впоследствии центральное место в теории вероятностей. Сущность метода очерчена Ляпуновым в § 2 его первой работы [24], в § 9 он выясняет, что полученная им верхняя грань погрешности предельной формулы, выведенная им в частном предположении, что каждая из случайных величин x_i может получать любое конечное число значений, остается в силе и в самом общем случае. Оценка этой погрешности, осуществленная Ляпуновым с непревзойденным мастерством, не может быть существенно улучшена.

Среди различных технических подробностей доказательства особого внимания заслуживает введение Ляпуновым (§ 3) дополнительного достаточно малого независимого слагаемого ξ, подчиняющегося соответствующему нормальному закону вероятностей. Почти все позднейшие доказательства предельной теоремы, каков бы ни был их принцип, используют этот тонкий прием Ляпунова, так как закон вероятностей независимых величин сразу приближается к нормальному после присоединения такого соответствующим образом подобранного слагаемого.

Вскоре после открытия Ляпунова Марков с помощью простого, но принципиально важного замечания также получает результат Ляпунова. Замечание Маркова сводятся к следующему.

Условие $M_n^{(p)} \to 0$ для какого-нибудь $p > 2$ выражает, что хотя слагаемые x_i могут быть сколь угодно велики, но вероятность получения ими значений порядка $\sqrt{A_n}$ так мала, что, считая столь большие значения их невозможными, мы не изменим предельного закона вероятностей для их суммы; но к измененной таким образом сумме теорема Маркова уже применима.

При помощи аналогичного замечания С. Н. Бернштейн в 1926 г. заменил достаточное условие Ляпунова еще немного более общим условием, где отдельные слагаемые x_i могут даже не иметь конечных дисперсий, условием, которое является не только достаточным, но в известном смысле и необходимым для предельной применимости нормального закона к сумме независимых величин.

Следует отметить, что условие Ляпунова $M_n^{(p)} \to 0$ при данном $p > 2$ является также в некотором, не лишенном практического интереса смысле условием, одновременно достаточным и необходимым. Действительно, бесконечная совокупность условий Маркова $M_n^{(p)} \to 0$ выражает не только то, что закон вероятностей суммы

$$Y = \frac{1}{\sqrt{A_n}}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

имеет пределом нормальный закон, но также и то, что все ее моменты стремятся к нормальным, так как при применении метода моментов Чебышева-Маркова оба эти факта не отделимы. Напротив, условие Ляпунова для некоторого одного только данного $p>2$, имеющее, как мы видели, автоматическим следствием соблюдение соответствующих условий для всех значений меньше p, ничего не предполагает относительно моментов высших степеней, которые вообще могут и не существовать. Но можно показать, а для целого четного p это непосредственно вытекает из рассуждений Маркова, что условие Ляпунова порядка p равнозначно тому, что математическое ожидание $|Y|^p$ имеет пределом соответствующее нормальное математическое ожидание. Таким образом, условие Ляпунова порядка p или равноценное ему единственное условие, что момент степени м. о. $|Y|^p$ имеет пределом соответствующий нормальный момент, необходимо[1] и достаточно для того, чтобы закон вероятностей для суммы (9) стремился к нормальному закону и одновременно все его моменты не выше порядка p стремились к нормальным моментам.

Отметим еще одно обстоятельство, связанное с первым мемуаром Ляпунова. В предисловии к этому мемуару упоминается о том, что условие в теореме Чебышева недостаточно в частном случае закона больших чисел. Под законом больших чисел автор, очевидно, подразумевает, согласно распространенной в XIX столетии терминологии, приложение предельной формулы Лапласа к схеме Пуассона, т. е. к выражению $m-(p_1+\cdots+p_n)$, где m—число появлений события P, имеющего в каждом из независимых опытов вероятности $p_1, p_2, \ldots$ Предельная формула, действительно, неприменима, если сумма $p_1+\cdots+p_n$ не растет бесконечно с возрастанием n.

6. РАЗЛИЧНЫЕ РАБОТЫ

В этом разделе рассматриваются некоторые работы Ляпунова, содержание которых удобнее излагать отдельно.

Сюда относятся две студенческие работы. Первая *О равновесии тяжелых тел в тяжелых жидкостях, содержащихся в сосуде определенной формы*[1] (1881), за которую он получил золотую медаль Петербургского университета, посвящена исследованию влияния сосуда, содержащего несколько жидкостей, на равновесие погруженного в него твердого тела. Жидкости предполагаются однородными и несжимаемыми. В первом параграфе предполагается, что объемные силы имеют потенциал, а в остальной работе внешние силы сводятся к силе тяжести.

В первом параграфе доказывается существование потенциала гидростатического давления на погруженное тело. Этот потенциал представляет собой сумму некоторого интеграла по объему тела и функции величин объемов V_k той части тела, которая находится в k-й жидкости. Объем V_k ограничен поверхностью тела и двумя поверхностями уровня потен-

---

[1] Необходимость условия Ляпунова $M_n^{(p)}\to 0$ имеет место при дополнительном предположении, что $a_i/A_n\to 0$ равномерно при всех $i\leqslant n\to\infty$.