4. ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

n°1. Основная работа Ляпунова *О некоторых вопросах, связанных с задачей Дирихле* [21] (1898) содержит ряд принципиально важных результатов, относящихся, с одной стороны, к строгому и полному исследованию свойств потенциалов простого и двойного слоя и, с другой стороны, к задаче Дирихле и некоторым связанным с ней общим формулам теории гармонических функций. Ляпунов пишет относительно этого исследования в одной из более поздних работ *К основному принципу метода Неймана в задаче Дирихле* [31] (1902) «... все, что я хотел сделать, сводилось к тому, чтобы указать некоторые следствия, к которым можно притти, если принцип Неймана уже установлен для рассматриваемой поверхности — будь она выпуклой или нет».

К этому надо добавить, что результаты работы, касающиеся свойств потенциалов простого и двойного слоя, не зависят от принципа Неймана. Они являются основой не только упомянутой выше работы Ляпунова, но и всех последующих работ по теории потенциала.

Принцип Неймана связан с исследованием граничных задач для гармонических функций. Рассмотрим, например, внутреннюю задачу Дирихле: определить гармоническую функцию $W(P)$ внутри поверхности S, если заданы ее предельные значения $f(M)$ на S. Функция $W(P)$ ищется в виде потенциала двойного слоя с искомой плотностью

$$W(P)=\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu(N)\cos\varphi}{r^2}\,ds \tag{1}$$

Здесь r — расстояние PN и φ — угол, образованный направлением PN с направлением внешней нормали к поверхности S в переменной точке N. Использование основного свойства потенциала двойного слоя приводит к уравнению для $\mu(M)$:

$$\mu(M)=\frac{f(M)}{2\pi}-\frac{1}{2\pi}\int\frac{\mu(N)\cos\varphi}{r^2}\,ds \tag{2}$$

где r и φ имеют прежние значения, причем роль точки P играет точка M. Введем обобщенное уравнение с параметром λ,

$$\mu(M)=\frac{f(M)}{2\pi}+\frac{\lambda}{2\pi}\int\frac{\mu(N)\cos\varphi}{r^2}\,ds \tag{3}$$

Решение этого уравнения ищем в виде ряда по степеням λ:

$$\mu(M)=\mu_0(M)+\lambda\mu_1(M)+\lambda^2\mu_2(M)+\cdots \tag{5}$$

причем

$$\mu_0(M)=\frac{f(M)}{2\pi},\qquad \mu_m(M)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_S\frac{\mu_{m-1}(N)\cos\varphi}{r^2}\,ds\qquad (m=1,\ 2,\ \ldots)$$

Нейман показал, что если S — выпуклая поверхность, удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям, то существует такая постоянная C, что для всех значений индекса m имеет место неравенство

$$|\mu_m(M)-C|\leqslant L\theta^m \tag{6}$$

где L — некоторое положительное число, меньшее единицы. Неравенство (6) и представляет собой принцип Неймана. Из этого неравенства следует, что решение уравнения (2) определяется формулой

$$\mu(M) = \{[\mu_0(M) - C] + \lambda[\mu_1(M) - C] + \lambda^2[\mu_2(M) - C] + \ldots\} + \frac{C}{1-\lambda}$$

в которой надо положить $\lambda = -1$.

Метод Неймана долгое время не мог быть применен к поверхностям, отличным от выпуклых, хотя была уверенность в его применимости для более широкого класса поверхностей. Этим и можно объяснить тот факт, что многие теоремы работы Ляпунова обусловлены применимостью к поверхности S принципа Неймана.

Ляпунов начинает свою работу с определения того класса поверхностей S, к которому относится все исследование. Кроме геометрических требований, налагаемых на S, Ляпунов предполагает сверх того, что к S применим принцип Неймана. В настоящее время известно, что применимость к S принципа Неймана является следствием тех геометрических требований, которые Ляпунов налагает на поверхность S, и поверхности, удовлетворяющие этим требованиям, называются «поверхностями Ляпунова». Определение этих поверхностей дано в начале основной работы[22]:

1) В каждой точке поверхности S существует определенная касательная плоскость.

2) Существует такая длина D, что если точку P поверхности S взять за центр сферы радиуса D, то прямая, параллельная нормали к поверхности S в точке P, может встречать S внутри сферы лишь в одной точке.

3) Если через ϑ обозначить острый угол, который нормаль в какой-нибудь точке P поверхности S образует с нормалью в другой точке P' этой же поверхности, и через r—расстояние между P и P', то можно указать такие два положительные числа a и α, не зависящие от выбора точек P и P', чтобы было $\vartheta < ar^{\alpha}$ при любом положении этих точек.

На основе этого определения доказываются некоторые свойства поверхности S.

Далее в первой главе рассматривается поведение производных потенциала простого слоя вблизи поверхности S самого слоя; доказывается, что если плотность слоя удовлетворяет условию Липшица, то потенциал слоя имеет предельные значения всех трех частных производных первого порядка и эти предельные значения непрерывны на S. Особое внимание уделяется исследованию прямых и предельных значений нормальной производной потенциала простого слоя. Прямое значение нормальной производной есть значение соответствующего интеграла по S в точке, лежащей на S. Доказывается, что прямое значение нормальной производной потенциала простого слоя интегрируемой плотности удовлетворяет условию Липшица. Рассмотрение потенциалов двойного слоя дано в основном в третьей главе. В первой главе указано лишь одно неравенство для производной этого потенциала, взятой по нормали к поверхности, для точек, лежащих на нормали вблизи поверхности.

Полученные результаты прилагаются во второй главе к определению равновесной плотности электрического заряда на поверхности проводника. Рассматривается уравнение

$$k(M) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \frac{k(N) \cos \psi}{r^2} ds \tag{7}$$

при дополнительном условии

$$\int k(N)\, ds = g \tag{8}$$

где $k(M)$—искомая электростатическая плотность, ψ—угол, образованный направлением NM с направлением внешней нормали к S в точке M, и g—заданная величина общего заряда на S. Считается, что эта поверхность удовлетворяет указанным выше условиям и что к ней применим принцип Неймана.

Приводим вкратце план исследования, проведенного во второй главе. Сначала доказывается, что уравнение (7) при условии (8) может иметь лишь единственное непрерывное решение. Далее рассматривается последовательность функций $v_0(M)$, $v_1(M)$,..., определяемых на S формулой

$$v_m(M) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \frac{v_{m-1}(N) \cos \varphi}{r^2}\, ds \tag{9}$$

где φ—угол, образованный направлением MN с внешней нормалью к S в точке N. При этом $v_0(M)$ определяется как предельное значение потенциала простого слоя с плотностью $k_0(M)$, которая удовлетворяет условию Липшица и уравнению (8). Затем доказывается, что последовательность гармонических функций $V_0, V_1, V_2,\ldots$, принимающих на поверхности S соответственно значения $v_0(M)$, $v_1(M)$, $v_2(M)$,..., стремится внутри поверхности S к постоянной величине и что каждая из функций $V_0, V_1, V_2\ldots$ может быть представлена в виде потенциала простого слоя, распределенного на S.

Пусть $k_m(M)$ обозначает плотность потенциала простого слоя для функции V_m. Доказывается, что эти плотности связаны соотношением

$$k_m(M) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \frac{k_{m-1}(N) \cos}{r^2} ds \tag{10}$$

и каждая из них удовлетворяет условию (8). Для проведения дальнейшего исследования устанавливается, что функции V_0, V_1, V_2,... могут быть представлены в виде потенциалов двойного слоя, распределенных на S, причем плотности этих потенциалов стремятся к предельной функции. Это приводит к доказательству того, что последовательность функций $k_m(M)$ равномерно на всей поверхности S стремится к функции $k(M)$.

Функция $k(M)$ удовлетворяет уравнению (7) в силу (10) и условию (8), так как каждая функция $k_m(M)$ удовлетворяет этому условию.

Третья глава посвящена исследованию вопроса о существовании на границе S предельных значений производных у функции, являющейся решением задачи Дирихле. Приводим основные результаты этой главы.

Если у некоторой функции v, определенной внутри или вне поверхности S, нормальная производная равномерно для всех точек поверхности стремится к пределу, то Ляпунов говорит, что функция имеет правильную нормальную производную на S. Доказываются следующие теоремы.

1. Пусть W—потенциал двойного слоя на S с непрерывной плотностью f и $(dW / dn)_i$, $(dW / dn)_e$—предельные значения его нормальных производных, взятых изнутри или извне поверхности. При этом, если существует и правильна одна из указанных производных, то такими же свойствами обладает и другая производная, и эти производные равны.

2. Для того чтобы гармоническая внутри или вне S функция V, сводящаяся на S к непрерывной функции f, допускала правильную нормальную производную на S, необходимо и достаточно, чтобы потенциал двойного слоя W с плотностью f обладал этим же свойством.

Ляпунов доказывает одно достаточное условие того, чтобы функция W обладала этим свойством. Берем какую-либо точку P_0 поверхности S за полюс полярных координат в касательной плоскости к S в точке P_0 и будем рассматривать значения функции f в точках P поверхности S, расстояние которых от P_0 не превосходит числа D, входящего в определение поверхности S, как функцию полярных координат ρ, ψ проекции на указанную касательную плоскость. Вводится обозначение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\, d\psi = \bar{f}$$

Пусть f_0— значение f в точке P_0. При этом для существования правильных нормальных производных у потенциала W достаточно существования таких двух положительных чисел b и β, не зависящих от ρ и от положения точки P_0, чтобы при всех достаточно малых ρ имело место неравенство

$$|\bar{f} - f| < b\, \rho^{\beta+1}$$

Отметим, что в этих исследованиях, касающихся нормальной производной, Ляпунов считает число α в неравенстве $\vartheta < ar^{\alpha}$, входящем в определение S, равным единице.

Далее указываются некоторые достаточные условия для граничной функции в задаче Дирихле, соблюдение которых обеспечивает существование предельных значений и касательных производных на S у гармонической функции, являющейся решением задачи. Предыдущие результаты позволили Ляпунову дать впервые безупречное по строгости доказательство симметрии функции Грина и формулы, определяющей решение задачи Дирихле через нормальную производную функции Грина.

Отметим еще, что в упомянутой выше работе *К основному принципу метода Неймана в задаче Дирихле* Ляпунов показал, что если принцип Неймана справедлив при условии, что исходная функция $f(M)$ представляет собой предельные значения потенциала простого слоя с непрерывной плотностью, то он справедлив и при предположении, что $f(M)$ ограниченная и интегрируемая на S функция. Основой этого результата является доказанная в той же работе существенная сама по себе теорема о потенциале двойного слоя: прямое значение потенциала двойного слоя (т. е. значения соответствующего интеграла в точках самой поверхности) с непрерывной плотностью удовлетворяет условию Липшица с любым показателем, меньшим единицы.