3. РАБОТА ПО УСТОЙЧИВОСТИ ФИГУР РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

n° 1. Этому вопросу посвящена магистерская диссертация Ляпунова *Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости* (1884) и большой мемуар *Задача минимума в вопросе устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости* [36] (1908), результаты которого были доложены в Академии Наук в 1907 г. Кроме того, в основной работе *О фигурах равновесия...* длинный ряд вычислений связан с решением вопроса об устойчивости некоторых эллипсоидов Якоби и новых фигур равновесия, близких к эллипсоидальным.

До работ Ляпунова вопросом устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости занимались Лиувилль и Риман. Полностью исследования Лиувилля опубликованы не были.

Основываясь на опубликованных выдержках, Ляпунов считал, что Лиувилль решал вопрос об устойчивости эллипсоидов при специальных предположениях о возмущениях; то же относится к исследованиям Римана. При общих предположениях о возмущениях Риман рассматривал лишь вопрос о неустойчивости некоторых эллипсоидов Маклорена.

Когда Ляпунов уже готовил к печати свою магистерскую диссертацию, вышло новое издание книги Томсона и Тэта[1], в которой упоминается о вопросе устойчивости фигур равновесия.

В качестве основы своих исследований они формулируют некоторый вариационный принцип, согласно которому можно судить об устойчивости или неустойчивости. Этот принцип был положен в основу магистерской диссертации Ляпунова.

Основной и принципиальной частью этой работы было впервые сделанная попытка точного определения того, что надо разуметь под устойчивостью равновесия вращающейся жидкости, и приведение таким образом поставленной задачи к чисто математической задаче о минимуме некоторого выражения. Трудность задачи здесь состоит в том, что непозволительно переносить на случай сплошной среды известный критерий устойчивости Лагранжа для систем с конечным числом степеней свободы (минимум потенциальной энергии).

Работа Ляпунова представляет собой первую попытку внести ясность и строгость в решение указанной сложной задачи. По мысли автора все должно быть основано на точном определении понятия устойчивости для случая сплошной среды и на доказательстве основного вариационного принципа, базирующемся на указанном определении. Недопустимы никакие аналогии со случаем конечного числа степеней свободы.

К сожалению, и до настоящего времени эти идеи Ляпунова недостаточно оценены и не нашли полного отражения в современной литературе.

Приведем выдержку из предисловия к магистерской диссертации Ляпунова, из которой ясна его точка зрения на постановку задачи.

---

[1] Thomson W. and Tait, Treatise on Natural Philosophy, 1883.

Говоря о трудности задачи устойчивости для сплошной среды, он далее пишет: «все затруднение уничтожается только при том условии, если устойчивую форму равновесия определить, как такую, для которой после сообщения движению жидкости достаточно малых возмущений форма жидкости остается на сколько угодно мало отличающейся от этой формы равновесия, *по крайней мере до тех пор, пока на поверхности жидкости не образуется на сколько угодно тонких нитеобразных или листообразных выступов*».

Далее Ляпунов пишет: «Это определение, выраженное в математической форме, и составляет основание всего моего исследования. Принимая его и делая некоторые предположения относительно сплошности движения, я затем пользуюсь методой Лежень-Дирихле для доказательства основной теоремы. По этой теореме всякая форма равновесия, для которой имеет место минимум П (при известных условиях), есть устойчивая».

Величина П выражается следующей формулой:

$$\Pi = \frac{M}{S} - V \qquad \left(V = \frac{1}{2\pi}\int\int \frac{d\tau\, d\tau'}{r}\right) \tag{1}$$

где M—заданная положительная постоянная, S—момент инерции жидкости относительно оси z (ось вращения исследуемой фигуры равновесия), а $d\tau$ и $d\tau'$ суть элементы объема, расстояние между которыми есть r, и каждое интегрирование выполняется по полному объему, занимаемому жидкостью. Постоянная M связана с моментом количества движени жидкости J относительно оси z формулой

$$M = \frac{J^2}{2\pi f k^3} \tag{2}$$

где f—множитель в законе всемирного тяготения и k—плотность жидкости

Угловая скорость ω фигуры равновесия выражается формулой

$$\omega = \frac{\sqrt{2\pi f k M}}{S} \tag{3}$$

Считается, что жидкость несжимаема и однородна, и при сравнении П для фигуры равновесия и для всех близких фигур считается, что центр тяжести этих фигур совпадает с центром тяжести фигуры равновесия.

Принцип Томсона и Тэта, из которого исходил Ляпунов, состоял в следующем: надо установить, соответствует ли движению фигуры равновесия минимум полной энергии в предположении, что это движение сравнивается с другими движениями, происходящими под действием тех же сил взаимного притяжения и при неизменной величине момента количества движения относительно центра тяжести. Для несжимаемой однородной жидкости этот вопрос, как впервые показал Ляпунов в своей работе, равносилен указанному выше вопросу о минимуме П. Основная теорема связывает вопрос о минимуме П с вопросом об устойчивости фигуры равновесия при некотором определении понятия устойчивости. В работе 1908 года Ляпунов возвращается к вопросу о связи минимума П с устойчивостью и устанавливает эту связь непосредственно, без применения принципа Томсона и Тэта, а используя непосредственно закон сохранения энергии. Это будет изложено в дальнейшем.

Таким образом, принцип Томсона и Тэта не сыграл никакой роли в окончательной работе 1908 года. По существу и в магистерской диссертации в отношении постановки задачи важна лишь основная теорема, устанавливающая связь между минимумом П и устойчивостью, соответственным образом определенной.

Большую часть магистерской диссертации и работы 1908 года занимало математическое исследование вариации П.

Упомянутая выше оговорка о нитеобразных и листообразных выступах при определении устойчивости связана с тем, что такие выступы могут быть большими по линейным размерам, но малыми по объему, и тем самым они могут нести на себе малые порции энергии.

Пуанкаре в одном из своих писем к Ляпунову спрашивает его о смысле упомянутой оговорки, и, получив разъяснение от Ляпунова, пишет ему: «Ваши разъяснения меня полностью удовлетворили. Я вижу, что трудность, которую Вы встретили, в точности такая же, с какой столкнулся я».

Укажем вкратце результаты применения основной теоремы в магистерской диссертации. Это применение связано с построением формулы для второй вариации $\delta^2\Pi$ (первая вариация $\delta\Pi = 0$ для эллипсоидов равновесия) и разысканием тех случаев, когда она положительна.

Эллипсоиды Маклорена менее сжатые, чем эллипсоид E_2; этот последний эллипсоид и сфера ($\omega = J = 0$) устойчивы (П — минимум). Устойчивыми же оказываются эллипсоиды Якоби, менее вытянутые, чем эллипсоид E_3, т. е. такие, у которых угловая скорость больше угловой скорости E_3. Заметим, что везде подразумевается устойчивость по отношению к произвольным возмущениям. Специальная глава посвящена изложению новых свойств функций Лямэ. В диссертации подчеркивается, что результаты ограничиваются лишь утверждением об устойчивости некоторых из эллипсоидальных фигур равновесия, но никак нельзя утверждать, что остальные эллипсоидальные фигуры неустойчивы. Автор говорит, что полное решение задачи может быть получено лишь путем изучения возмущенного движения. Задачу своего исследования он формулирует следующим образом: «К каким результатам относительно устойчивости эллипсоидов Маклорена и Якоби приводит закон сохранения энергии».

Ниже содержание этого исследования приводится, следуя изложению мемуара [36] 1908 года, в котором Ляпунов, возвращаясь к своей магистерской диссертации, вносит ряд принципиальных дополнений в отношении постановки вопроса. В нем исследуется также вопрос об устойчивости тех новых фигур равновесия, близких к эллипсоидальным, которые были уже построены автором.

Укажем сначала те части работы 1908 года, которые относятся к постановке задачи и общим вопросам. Они появляются в результате критики, которой подвергает Ляпунов свою прежнюю работу. Изложим сущность этой критики. Пусть F_0 — эллипсоидальная фигура равновесия, устойчивость которой исследуется. Положим для определенности, что это тело вращения, т. е. эллипсоид Маклорена. Пусть далее F — близкая (отличная от F_0) фигура, имеющая тот же объем и тот же центр тяжести, что и F_0.

Пусть l_P—кратчайшее расстояние от точки P, лежащей на поверхности F, до поверхности F_0, и l—наибольшая из величин l_P при всевозможных положениях P на F. Наличие минимума у величины Π определялось в магистерской диссертации следующим образом: существует такое положительное число α, что приращение Π при переходе от F_0 к F положительно, если только $l < \alpha$. С другой стороны, в упомянутой работе принималось, что минимум Π имеет место, если вторая вариация $\delta^2\Pi > 0$, и обращается в нуль лишь при $l=0$. Это нуждается, как подробно разъясняет Ляпунов, в доказательстве. Кроме того, Ляпунов отмечает еще одно недоведенное до конца рассуждение из магистерской диссертации, относящееся не к условиям минимума, а к вопросу устойчивости. Пусть δ—объем той части фигуры F, которая находится вне F_0. В диссертации принималось, что если l меньше некоторого малого положительного числа ε, а δ имеет заданное положительное значение, то, в случае минимума Π, приращение этой величины Π имеет положительную точную нижнюю границу.

Это утверждение, как замечает Ляпунов, также должно быть доказано. Указанные два утверждения (они называются первым и вторым постулатами) полностью доказаны в мемуаре 1908 года.

Следующим существенным дополнением к магистерской диссертации в работе 1908 года является исследование тех особых случаев, когда рассмотрение второй вариации не решает вопроса о минимуме Π. Когда возмущения исходной фигуры равновесия не подвержены дополнительным условиям, то особыми являются два случая: эллипсоиды E_2 и E_3. Угловые скорости эллипсоидов E_2 и E_3 обозначаются соответственно через ω_1 и ω_2.

Как уже упоминалось в связи с магистерской диссертацией, для эллипсоидов Якоби с угловой скоростью ω, удовлетворяющей неравенству $\omega_2<\omega<\omega_1$, величина Π имеет минимум, а при $\omega<\omega_2$ минимума нет.

При $\omega=\omega_2$ эллипсоид E_3 является эллипсоидом бифуркации и от него ответвляются грушевидные фигуры равновесия. При $\omega=\omega_1$ эллипсоид E_2 получается непрерывным образом как из эллипсоидов Якоби с меньшими угловыми скоростями, так и из эллипсоидов Маклорена.

Величины, определяемые формулой (2) для исследуемого сингулярного эллипсоида и близкого к нему тела равновесия, обозначаются соответственно через M_0 и M_α, где α — тот параметр, о котором говорилось выше при изложении работ Ляпунова о существовании неэллипсоидальных фигур равновесия, причем $\alpha=0$ для исследуемого эллипсоида. В случае E_2 это близкое тело есть эллипсоид Якоби с меньшей угловой скоростью, и в случае E_3 это близкое тело есть грушевидная фигура равновесия. В работе доказан следующий основной результат: если $M_\alpha-M_0>0$ при всех достаточно малых по абсолютной величине α, то Π имеет минимум для исходного эллипсоида и близких к нему фигур, если же $M_\alpha-M_0<0$, то Π не имеет минимума ни для исходного эллипсоида, ни для близких к нему фигур. Для доказательства этого предложения и исследования знака разности $M_\alpha-M_0$ существенное значение имеет разложение M по степеням α,. В случае E_2 сравнительно просто доказывается, что $M_\alpha-M_0>0$.

Во втором случае разложение $M_\alpha - M_0$ по степеням имеет вид:

$$M_\alpha - M_0 = c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 + \ldots$$

Путем весьма сложных, но совершенно строгих вычислений, ход которых приведен ниже, Ляпунов показывает, что $c_2 < 0$, т. е. $M_\alpha - M_0 < 0$.

Таким образом, для грушевидных фигур равновесия и порождающего их эллипсоида E_2 величина Π не имеет минимума. Этот совершенно точный результат Ляпунова находился в противоречии с утверждением Д. Дарвина (сын знаменитого Чарльза Дарвина) об устойчивости грушевидных фигур равновесия, на чем он строил свою космогоническую гипотезу. Об этом разногласии Ляпунов пишет в работах 1905, 1907 и 1912 гг. В последней работе подробно указаны вычисления, из которых следует отрицательность коэффициента c_2.

Ляпунов говорил об этом разногласии и в своей лекции 1918 года *О фигурах небесных тел*[1]. Пуанкаре пишет[2]: «Как мы говорили, грушевидная фигура может быть устойчива; но нет уверенности в том, что это действительно так. Г. Дарвин нашел, что эта фигура устойчива, но, как утверждает Ляпунов, она неустойчива. Чтобы решить вопрос до конца, надо было бы вновь начать вычисление; но это вычисление исключительно сложно».

В 1912 году, как уже упоминалось, Ляпунов опубликовал подробно свои вычисления, и если внимательно прочесть эту работу, то все сомнения, кто прав, должны были бы исчезнуть. Но ученые Западной Европы признали правоту Ляпунова только в 1917 году, когда Джинс опубликовал работу[3], в которой он обнаружил тот дефект в вычислениях Д. Дарвина, который привел его к неверному заключению об устойчивости грушевидных фигур.

В указанных двух сингулярных случаях предполагалось, что близкие фигуры сравнения при исследовании минимума Π ничем не ограничены. Если накладывать на них дополнительные условия, то появляются среди эллипсоидов бифуркции новые сингулярные случаи, в которых исследование второй вариации величины Π не решает вопроса о ее минимуме.

Ляпунов рассмотрел ряд случаев такого условного минимума. Если эллипсоид бифуркации есть эллипсоид Маклорена, то на близкое тело сравнения накладывается условие, что это есть тело вращения относительно оси z или имеет симметрию вращения на угол $2\pi / k$, где k—некоторое целое число, большее единицы. Для эллипсоидов Якоби предполагается, что тело сравнения имеет две взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, проходящие через ось z.

Отметим еще, что как в сингулярных случаях, так и для неэллипсоидальных фигур равновесия Ляпунов доказывает второй из указанных выше постулатов при условии минимума Π. Первый постулат не имеет смысла в сингулярных случаях.

---

[1] Публикуется в изд. Академии Наук СССР «Классики науки. А. М. Ляпунов».

[2] Poincaré Henri. Leçons sur les hypotèses cosmogoniques. 1911.

[3] Jeans J. H. Memoirs of Roy. Astron. Society 1917.

Одна из глав мемуара 1908 года посвящена доказательству вспомогательного предложения, а именно, свойства замкнутости для сферических функций. Это свойство, как известно, состоит в том, что интеграл от квадрата функции, заданной на поверхности сферы радиуса единицы, по этой поверхности равен сумме ее коэффициентов Фурье по отношению к нормированным сферическим функциям. Это доказательство Ляпунов сообщил еще в 1897 году в одном из заседаний Харьковского математического Общества. Оно воспроизводится в работе [16] 1908 года.

n° 2. Переходим к изложению последней главы мемуара 1908 года, которая носит название «Заключения об устойчивости». Глава эта небольшая, но принципиально весьма важная. Приведем дословно начало этой главы: «Мы занимались до сих пор проблемой минимума, не говоря ничего о проблеме устойчивости, которая и привела к проблеме минимума. Естественно остановиться сейчас на проблеме устойчивости. К сожалению, мы не можем добавить ничего существенного к тому, что мы сказали по этому вопросу в мемуаре «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия», хотя и там было сказано очень немного. Все, что мы можем сделать сейчас,—это упростить анализ, проведенный в указанном мемуаре; это мы и изложим здесь, ограничиваясь, как всегда, случаем эллипсоидальных фигур равновесия и фигур, мало от них отличных».

В период от 1885 до 1907 года Ляпунов создал строгую теорию устойчивости равновесия и движения для случая механических систем с конечным числом степеней свободы. В последней главе мемуара 1908 года он с присущей ему всегда строгостью и точностью устанавливает связь между математической проблемой минимума и устойчивостью фигуры равновесия вращающейся жидкости. Результаты здесь оказываются, естественно, менее полными, чем для механических систем с конечным числом степеней свободы.

Проекции скорости частиц жидкости в движении относительно центра тяжести обозначаются через u, v, w и вводится равенство

$$\omega S = \int (vx - uy)\, d\tau$$

где интегрирование производится по всему объему жидкости и правая часть постоянна в силу закона площадей.

Уравнение сохранения энергии принимается в виде

$$T + \frac{\pi f M}{S} - \frac{f}{2} \int\int \frac{d\tau\, d\tau'}{r} = \mathrm{const}$$

где T — живая сила в относительном движении по отношению к осям, вращающимся относительно оси z с переменной угловой скоростью ω, а постоянная M определена формулой

$$M = \frac{\omega^2 S^2}{2\pi f}$$

причем плотность k считается равной единице. С помощью соотношения

$$\Pi = \frac{M_0}{S} - \frac{1}{2\pi} \int\int \frac{d\tau\, d\tau'}{r} \qquad \left(M_0 = \frac{\omega_0 S_0^2}{2\pi f}\right)$$

уравнение сохранения энергии представляется в следующем виде

$$\frac{1}{\pi f} T + \Pi + \frac{M - M_0}{S} = \frac{1}{\pi f} T^{(0)} + \Pi^{(0)} + \frac{M - M_0}{S^{(0)}} \tag{4}$$

где $T^{(0)}$, $\Pi^{(0)}$, $S^{(0)}$ — начальные значения T, Π, S.

Последнее уравнение и является основным при исследовании вопроса об устойчивости исходной фигуры равновесия. Те точные термины, в которых определяется устойчивость, вводятся несколько иначе, чем в магистерской диссертации. Пусть для определенности за исходную фигуру F_0, устойчивость которой исследуется, принимается эллипсоид Маклорена с полуосями $\sqrt{\rho+1}$, $\sqrt{\rho+1}$, $\sqrt{\rho}$. Уравнение поверхности близкой фигуры F берется в виде

$$x = \sqrt{\rho+1+Z} \sin\theta \cos\psi, \quad y = \sqrt{\rho+1+Z} \sin\theta \sin\psi, \quad z = \sqrt{\rho+Z} \cos\theta \tag{5}$$

где Z — некоторая функция θ и ψ, которая может быть и многозначной. Она должна удовлетворять неравенству $Z > -\rho$ Буквой l обозначается наибольшее значение величины $|Z|$ и буквой δ объем той части F, которая находится вне F_0. При заданном l величина δ имеет максимум вида $l\varphi(l)$, где $\varphi(l)$ — положительная, ограниченная функция.

Пусть l_1 и ε — заданные положительные числа, причем ε меньше всех значений $\varphi(l)$ при условии $l \leqslant l_1$ (такое положительное ε будет существовать). Если для исходной фигуры равновесия Π имеет минимум, то при предположении непрерывности движения (l и δ меняются непрерывно со временем) имеет место следующее свойство: если в начальный момент времени выполнены неравенства

$$l < l_1, \qquad \delta > \varepsilon l \tag{6}$$

и начальные возмущения скорости достаточно малы, то неравенство $l < l_1$ будет выполнено, пока будет выполняться неравенство $\delta > \varepsilon l$. Это заключение оказывается справедливым и для вязкой жидкости.

Как замечает Ляпунов, вывод результата об устойчивости на основании уравнения (4) совпадает с тем выводом, который Ляпунов имел еще до окончательной редакции первой главы магистерской диссертации. Окончательная редакция этой главы оформилась под влиянием книги Томсона и Тэта. В мемуаре 1908 года Ляпунов пишет по этому поводу: «Во введении к указанному мемуару я объяснил, что побудило меня сделать это изменение редакции. Но я ничего не выиграл этим в том, что касается заключений об устойчивости и наряду с этим анализ вследствие этого сделался гораздо более сложным».

Как уже упоминалось выше, еще в предисловии к магистерской диссертации Ляпунов указывает на неполноту полученного в отношении устойчивости результата. В мемуаре 1908 года он еще раз подчеркивает: «Заключения, к которым мы пришли, неполны. Но одно уравнение живых сил не может дать ничего большего, и только путем глубокого изучения всех уравнений проблемы можно надеяться получить истинное решение. Но подобное изучение еще не проведено».

Далее, в связи с работами Дюгема, Ляпунов рассматривает возможность замены величины l величиной δ. Он упоминает, что в одном из тезисов своей магистерской диссертации он формулирует следующий результат: если приращение П положительно при всех достаточно малых δ, то при всех достаточно малых начальных возмущениях величина δ будет меньше любого заданного положительного числа во все время движения. Но, как далее пишет Ляпунов, такой минимум П может иметь место только при $M=0$, т. е. для сферы ($\omega=0$). В работе *О теле наибольшего потенциала* [5] Ляпунов показал, что если существует тело, для которого интеграл

$$\iint \frac{d\tau\, d\tau'}{r} \tag{7}$$

при заданном объеме имеет абсолютный максимум, то это тело есть сфера. Если это так, то сфера является устойчивой фигурой равновесия в отношении величины δ.

Замена величины l величиной δ для фигур равновесия, отличных от сферы ($M\neq0$), не дает ничего, так как приращения S при малых δ могут быть сколь угодно большими. Ляпунов ставит вопрос: нельзя ли ввести другой параметр такой, чтобы приращения S были малы, если этот параметр мал? При этом, как замечает Ляпунов, должен быть построен метод, позволяющий изучать приращения без предположения малости l. Далее он пишет: «Но в настоящее время мы можем это сделать только при последнем предположении, так что, отбрасывая его, мы должны отказаться от всякой возможности решения проблемы минимума».

В конце мемуара 1908 года Ляпунов ставит следующий вопрос: можно ли утверждать, что фигура равновесия неустойчива, если для нее П не имеет минимума? Он полагает, что для идеальной жидкости такое утверждение неправильно.

По мнению Ляпунова, если жидкость вязкая, то это утверждение правильно, если, например, отсутствие минимума у П обнаруживается исследованием второй вариации δ^2П. Он указывает, что для доказательства надо строить частные решения уравнений возмущенного движения, используя его общий первый метод, приведенный в работе *Общая задача устойчивости движения*.

Отметим еще следующее высказывание Ляпунова об устойчивости в случае вязкой жидкости, которое находится во второй части его большой работы [35] (1909). Оно находится в непосредственной связи с предыдущим: «... остановимся на вопросе устойчивости рассматриваемых фигур равновесия и укажем заключения, которые дает по этому поводу принцип минимума энергии. Согласно этому принципу, если рассматриваемая жидкость есть вязкая жидкость, то фигура равновесия будет устойчивой или неустойчивой, смотря по тому, будет ли полная энергия, соответствующая этой фигуре, иметь минимум или не будет иметь минимума при условии неизменности момента количества движения по отношению к центру тяжести. Хотя этот принцип никогда не был доказан удовлетворительным образом, но имеются все же основания считать его вероятным».

Как отмечалось выше, Ляпунов доказал этот принцип в отношении устойчивости и для идеальной жидкости, если определять устойчивость неравенствами (6). Приведение экстремумов полной энергии в движении к экстремумам П для фигур равновесия было сделано еще в работе 1884 г.

n° **3.** Изложим в общих чертах тот метод, который Ляпунов применял для исследования минимума П. Для определенности мы изложим этот метод в применении к эллипсоиду Якоби E, отличному от E_2 и E_3, и пусть $\sqrt{\rho+1}$, $\sqrt{\rho+q}$, $\sqrt{\rho}$ — его полуоси, а F — фигура сравнения, уравнение которой берется в виде (5), с заменой в уравнении для y радикала $\sqrt{\rho+1+Z}$ на $\sqrt{\rho+q+Z}$. При этом Z — функция θ и φ, которая может быть и многозначной; она считается достаточно малой по абсолютной величине. Предполагается, что объем F равен объему E, что центр тяжести F, как и E, находится в начале координат и что оси эллипса, являющегося пересечением центрального эллипсоида инерции тела F с плоскостью xy, направлены по осям x и y.

Переход от E к F совершается двумя этапами: от E к промежуточному телу f с тем же моментом инерции S, что и у F, и от f к F. Как и выше, считается, что объем f равен объему E и что центр тяжести f находится в начале координат. Кроме того, считается, что плоскости xy и xz — плоскости симметрии тела f. Еще одно дополнительное условие относительно f будет указано ниже. Функции $Z=\zeta$ для f считается однозначной, непрерывной и малой по абсолютному значению.

Приращение П при переходе от E к f обозначается через $\Delta_1\Pi$ и при переходе от f к F через $\Delta_2\Pi$, так что

$$\Delta\Pi=\Delta_1\Pi+\Delta_2\Pi$$

Здесь

$$\Delta_1\Pi=\frac{M}{S}-\frac{M}{S_0}-\Delta_1 V, \qquad \Delta_2\Pi=-\Delta_2 V$$

где S_0 — значение S для E. Вводится обозначение $\lambda=\max|Z-\zeta|$, $l=\max|\zeta|$, причем считается, что $\lambda+l<\rho$; далее $L=\max|Z|$ и $\tau=\tau(\theta,\varphi)$ — любая функция, удовлетворяющая условиям

$$\int \tau\, d\sigma=\int \tau \sin\theta\cos\psi\, d\sigma=\int \tau\sin\theta\sin\psi\, d\sigma=\int \tau\cos\theta\, d\sigma=\int \tau\Gamma\, d=0$$

где

$$\Gamma=(\rho+\cos^2\psi+q\sin^2\psi)\sin^2\theta-{}^1/_3(2\rho+1+q)$$

Кроме того, ставится еще одно условие, которое является следствием не формулированного условия относительно f:

$$\int \tau\sin^2\theta\sin 2\psi\, d\sigma=0.$$

Для $\Delta_2\Pi$ Ляпунов получает выражение вида

$$\Delta_2\Pi=\frac{1}{2}\left[R\int\tau^2\,d\sigma-\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{\tau\tau'\,d\sigma\,d\sigma'}{D}\right]+\frac{R}{2}\int\varphi^2\,d\sigma-(hl+h'\lambda)\int(\tau^2+\varphi^2)\,d\sigma$$

где h и h' остаются ограниченными при малых l и λ и функция φ не зависит от функции τ. Условия, налагаемые на τ, являются следствиями условий, которые были поставлены для f. Формула (8) приводит к следующему: если для любой допустимой функции τ выполняется неравенство:

$$R\int \tau^2\, d\sigma - \frac{1}{4\pi}\int\int \frac{\tau\tau'\, d\sigma\, d\sigma}{D} \geqslant t\int \tau^2\, d\sigma \qquad (9)$$

при положительном значении постоянной t, то $\Delta_2\Pi > 0$; если же это неравенство при всех допустимых τ выполняется лишь при $t < 0$, то $\Delta_2\Pi$ может принимать и отрицательные значения.

Случай $t = 0$ исключается выбором f. Левая часть (9) представляет собой вторую вариацию Π при фиксированном S.

Дальнейшие вычисления основаны на применении формулы замкнутости при разложении по сферическим функциям. В магистерской диссертации Ляпунов пользовался еще разложениями по сферическим функциям, что вводило лишние предположения. В этом, повидимому, заключается начало интереса Ляпунова к уравнению замкнутости. Ляпунов вводит обозначение

$$Y_{n,s} = E_{n,s}(\mu)\, E_{n,s}(\nu)$$

$$\int Y_{n,s}{}^2\, d\sigma = \gamma_{n,s}, \qquad \int \tau\, Y_{n,s}\, d\sigma = \gamma_{n,s}\, a_{n,s}, \qquad \int\left(\int \frac{\tau'\, d\sigma'}{D}\right) Y_{n,s}\, d\sigma = \gamma_{n,s}\, b_{n,s}$$

Из формулы Лиувилля и уравнения замкнутости следует

$$b_{n,s} = \frac{4\pi}{2\pi + 1}\, E_{n,s}\, F_{n,s}\, a_{n,s}$$

Кроме того, уравнение замкнутости дает

$$\int \tau^2\, d\sigma = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2n} \gamma_{n,s} a_{n,s}{}^2, \qquad \int \frac{\tau\tau'\, d\sigma\, d\sigma'}{D} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2n} \gamma_{n,s}\, a_{n,s}\, b_{n,s}$$

и неравенство (9) представляется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2n} T_{n,s}\gamma_{n,s} a_{n,s}{}^2 - t\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{2n} \gamma_{n,s} a_{n,s}{}^2 \geqslant 0 \qquad (10)$$

Число t должно быть выбрано так, чтобы при некоторых $a_{n,s}$, отличных от нуля, имел место знак равенства. Условия, накладываемые на τ, дают

$$a_{0,0} = a_{1,0} = a_{1,1} = a_{1,2} = a_{2,3} = 0, \qquad g_0\gamma_{2,0}a_{2,0} + g_4\gamma_{4,2}a_{2,4} = 0$$

где g_0 и g_2 — коэффициенты в разложении.

$$\Gamma = g_0 E_{2,0}(\mu)\, E_{2,0}(\nu) + g_4 E_{2,4}(\mu)\, E_{2,4}(\nu)$$

Рассматривается величина

$$T = \frac{g_0{}^2\gamma_{2,0}T_{2,4} + g_4{}^2\gamma_{2,4}T_{2,0}}{g_0{}^2\gamma_{2,4} + g_4{}^2\gamma_{2,4}}$$

причем через T_0 обозначается наименьшее из таких $T_{n,s}$, отличных от $T_{2,0}$ и $T_{2,4}$, что $a_{n,s}$ не должны равняться нулю. Число t равняется наименьшему из чисел T и T_0. В рассматриваемом случае эллипсоидов Якоби $T > 0$ и можно считать при исследовании $\Delta_2\Pi$, что $t = T_0$. Так как $T_{2,3} = 0$, то остается определить знаки $T_{2,1}$, $T_{2,2}$ и $T_{n,s}$ при $n \geqslant 3$. Доказывается, что $T_{2,1}$, $T_{2,2}$ и $T_{n,s}$ при $s < 2n$ положительны, а для остальных величин имеют место неравенства $T_{3,6} < T_{4,8} < T_{5,10} < \ldots$ и таким образом можно считать, что знак t совпадает со знаком $T_{3,6}$.

Всякое $T_{n,2n}$ при $n \geqslant 3$ обращается в нуль для некоторого эллипсоида Якоби E_n, отличного от E_2, причем $T_{n,2n}$ положительно для эллипсоидов, менее вытянутых, чем E_n, и отрицательно для более вытянутых эллипсоидов.

Пока не фиксировалась фигура f и не исследовано $\Delta_1\Pi$. Если за f принять эллипсоид Якоби с заданным S, при выполнении остальных условий, налагаемых на f, то в результате вычислений доказывается, что $\Delta_1\Pi \geqslant 0$, причем это равенство имеет место только при $S = S_0$, а знак $\Delta_2\Pi$ не зависит от разности $S - S_0$. Таким образом, для минимума Π необходимо $t \geqslant 0$ и достаточно $t > 0$. Но знак t совпадает со знаком $T_{3,6}$ и, следовательно, Π имеет минимум для эллипсоидов Якоби, менее вытянутых, чем E_3, и не имеет минимума для более вытянутых эллипсоидов. Это указывалось выше в связи с магистерской диссертацией.

Совершенно аналогично рассматривается задача устойчивости эллипсоидов Маклорена. Отдельно доказывается устойчивость сферы.

n° 4. Если исследовать устойчивость фигур равновесия при любых возмущениях, то особыми являются лишь два случая. Эллипсоид Якоби E_2 с наибольшей угловой скоростью (эллипсоид вращения) и эллипсоид Якоби E_3, приводящий к грушевидным фигурам равновесия.

Эти эллипсоиды определяются соответственно уравнениями

$$T_{2,4} = 0, \qquad T_{3,6} = 0$$

Пусть Ω_0, S_0 и Ω_α, S_α, обозначают величину $\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi fk}$ и момент инерции S для эллипсоида E_2 или E_3 и для близкой фигуры равновесия, ответвляющейся от E_2 или E_3. В первом случае это будут трехосные эллипсоиды Якоби, близкие E_2, во втором — грушевидные фигуры равновесия.

Вводится обозначение

$$M_0 = \Omega_0 S_0^2, \qquad M_\alpha = \Omega_\alpha S_\alpha = (\Omega_0 + \eta_\alpha) S_\alpha^2$$

Основной результат, как упоминалось выше, сводится к следующему: если $M_\alpha - M_0 > 0$, то величина Π имеет минимум для исходной фигуры равновесия, а если $M_\alpha - M_0 < 0$, то этого минимума нет. В случае эллипсоида E_2 вопрос решается сравнительно простым подсчетом M для эллипсоидов, причем обнаруживается, что $M_\alpha - M_0 > 0$.

Значительно более сложным является рассмотрение эллипсоида E_3. Доказывается, что M_α разлагается по малому параметру α, аналогичному тому, который приведен выше в разделе, посвященном фигурам равновесия F, в ряд вида

$$M_\alpha = M_0 + c\alpha^2 + \cdots$$

Вопрос сводится к определению знака постояннной

$$c = \frac{1}{2}\gamma B \Omega_0 S_0 - \frac{A_3}{B} M_0' \tag{11}$$

где M_0' — производная от M_α по Ω при $\alpha = 0$ (эта производная берется по серии эллипсоидальных фигур равновесия), γ — некоторая положительная постоянная, B и A_3 — коэффициенты, входящие в формулу, связывающую параметры α и η, аналогичную формуле (46) из предыдущего раздела

$$A_3\alpha^3 + A_4\alpha^4 + \cdots + (B + S)\alpha\eta + C_3\eta^3 + C_4\eta^4 + \cdots = 0 \tag{12}$$

В этой формуле S — степенной ряд по α и η без свободного члена.

Ряд (12) был построен и исследован Ляпуновым в первый части его работы *О фигурах равновесия* ... [35] (1906), где он применял формулы, несколько отличные от приведенных выше из четвертой части той же работы (1914). Исследование устойчивости фигур равновесия 1907 года (мемуар[36], 1908) Ляпуновым проводилось в обозначениях работы 1906 года. Ляпунов доказывает, что постоянная B выражается формулой

$$B = -\frac{1}{\sqrt{\rho(\rho+1)(\rho+q)}}\left(\frac{dT_{3,6}}{d\Omega}\right)_{\Omega=\Omega_0}$$

из которой следует, что $B < 0$. Легко доказывается, что и $M_0' < 0$. Остается определить знак постоянной A_3.

При помощи весьма сложных вычислений, подробно изложенных в третьей части работы *О фигурах равновесия* ..., Ляпунов показывает, что $A_3 > 0$, и из формулы (11) непосредственно следует, что $c < 0$, т. е. $M_\alpha - M_0 < 0$. Таким образом, для эллипсоида E_3 величина Π не имеет минимума.

Далее Ляпунов рассматривает величину Π для грушевидных фигур, ответвляющихся от эллипсоида E_3. Для остальных неэллипсоидальных фигур решение вопроса о наличии минимума Π не представляет труда после исследования этого вопроса для эллипсоидов. Ляпунов доказывает, что и в случае грушевидных фигур неравенство $M_\alpha - M_0 < 0$ приводит к тому, что величина Π не имеет минимума.

Задача минимума в вопросе устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкой массы [36] опубликована в 1908 году и содержит 140 страниц in quarto. Первая часть ее, посвященная иследованию Π, поражает силою анализа и строгостью и полнотой изложения. Упомянутая задача представляет своеобразные трудности ввиду наличия в выражении Π момента инерции S и интеграла по возмущенному объему и требует специальных методов исследования. Некоторое представление об этих методах в несингулярном случае дано выше.

Большая ценность последней главы этого мемуара 1908 года заключается в тех общих соображениях об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости, которые в ней высказаны. До настоящего времени вопрос этот не продвинулся дальше.