2. ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

n°1. Исключительно большой по объему и весьма сложный по применяемому математическому анализу цикл работ Ляпунова посвящен строгому доказательству существования новых фигур равновесия равномерно вращающейся вокруг некоторой оси жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона.

Перечислим все работы этого цикла в хронологическом порядке, попутно указывая краткое содержание каждой из них.

В работе *Изыскания в теории фигур небесных тел* [32] (1903) доказывается существование фигур равновесия, близких к сфере, в случае неоднородной жидкости, достаточно медленно вращающейся вокруг оси. Берется любой закон распределения плотности (поверхности одинаковой плотности близки к сферам) при единственном предположении, что плотность возрастает с глубиной и остается ограниченной. Задача сводится к решению цепи некоторых интегродифференциальных уравнений, первое из которых есть уравнение Клеро. Таким образом, в работе Ляпунова теория Клеро является первым приближением полной и строгой теории.

Исследованию этих интегродифференциальных уравнений посвящена работа *Об уравнении Клеро и более общих уравнениях в теории фигур планет*[33] (1904). В ней доказывается, что каждое из упомянутых интегродифференциальных уравнений имеет одно определенное решение, подчиняющееся некоторому естественному условию. Именно в этой работе Ляпунов вводит новое понятие интеграла и рассматривает обобщенное уравнение Клеро в терминах этого нового понятия интеграла, расширяя тем самым предположения об искомой функции. Оказывается далее, что полученное единственное решение этого уравнения таково, что оно удовлетворяет обобщенному уравнению Клеро и в терминах обычного интеграла Римана. Это исследование обобщенного уравнения Клеро проводится при указанных выше общих предположениях о плотности.

Далее идет ряд обширных работ, посвященных значительно более трудной задаче о существовании фигур равновесия, близких к известным эллипсоидальным фигурам равновесия, в случае однородной жидкости. Общие указания на метод исследования этой задачи и сводка полученных результатов даны в работе *Об одной задаче Чебышева* [34].

Детальному изложению решения вопроса — решения, отличного от того, которое было намечено в только что указанной работе 1905 г., посвящена большая работа, состоящая из четырех частей, *О фигурах равновесия однородной вращающейся жидкости, мало отличающихся от эллипсоидальных* [35] (1906, 1909, 1912, 1914).

В первой части составляются основные уравнения задачи и в теоретически законченном виде указывается метод решения этих уравнений. Этот метод дает возможность не только доказать существование новых фигур равновесия, но и определить их с любой степенью точности. Существуют, как известно, два непрерывных ряда эллипсоидальных фигур равновесия: эллипсоиды вращения (эллипсоиды Маклорена) и трехосные эллипсоиды

(эллипсоиды Якоби). Число этих эллипсоидов в зависимости от угловой скорости вращения ω определяется следующим образом: существуют два значения $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_0$ ($\omega_0 > \omega_1$) такие, что если ω удовлетворяет неравенству $0 < \omega < \omega_1$, то имеются три эллипсоидальные фигуры равновесия (два эллипсоида Маклорена и один эллипсоид Якоби), а при условии $\omega_1 \leqslant \omega < \omega_0$ имеются лишь два эллипсоида Маклорена.

При $\omega = 0$ фигурой равновесия является сфера. При $\omega = \omega_1$ эллипсоид Якоби переходит в эллипсоид вращения, а при $\omega = \omega_0$ два эллипсоида Маклорена сливаются в один. При $\omega > \omega_0$ эллипсоидальных фигур равновесия не существует.

Пусть S—момент инерции жидкости относительно оси вращения и $J = S\omega$—момент количества движения относительно той же оси. Картина изменения эллипсоидальных фигур равновесия при изменении J от нуля до бесконечности указана в лекции Ляпунова «*О форме небесных тел*» [43]. Там же указана форма вырождения эллипсоидов при $\omega \to 0$.

Из эллипсоидов Маклорена и Якоби только некоторые способны порождать близкие к ним фигуры равновесия, отличные от эллипсоидальных. В первой части проводится подробное исследование трансцендентного уравнения, которым определяются эти «эллипсоиды бифуркации»: само это уравнение получено как одно из основных уравнений задачи.

Далее в первой части указываются некоторые свойства симметрии новых фигур равновесия. Таким образом, первая часть работы представляет собой законченное целое. Эта первая часть одинаково относится как к фигурам равновесия, близким к эллипсоидам Маклорена, так и к фигурам, близким к эллипсоидам Якоби.

Во второй части производятся детальные вычисления тех последовательных приближений, которыми определяются новые фигуры равновесия, близкие к эллипсоидам Маклорена, и исследуется величина угловой скорости вращения и момента количества движения для этих новых фигур.

В третьей части последние два вопроса исследуются для фигур равновесия, близких к эллипсоидам Якоби. Результаты этой части, относящиеся к устойчивости фигур равновесия, излагаются в следующем разделе.

В четвертой части работы Ляпунов возвращается опять к основным уравнениям задачи, причем он несколько иначе, чем в первой части, вводит ту основную функцию ζ полярных углов θ и φ, которая характеризует отклонение поверхности фигуры равновесия от эллипсоидальной формы. В процессе вычисления это приводит к формулам, отличным от формул, содержащихся в первой части работы. Таким образом, в этой четвертой части Ляпунов дает новый метод разыскания фигур равновесия. Функция ζ представляется в виде бесконечного ряда, и с помощью упомянутого метода Ляпунов устанавливает форму зависимости каждого члена этого ряда от θ и φ. В конце устаналивается связь результатов применения нового метода с формулами, которые были использованы в первой части.

С четвертой частью упомянутой большой работы непосредственно связана работа *Об уравнениях, которые принадлежат к поверхностям фигур равновесия однородной вращающейся жидкости, близких к эллипсоидаль-*

ным [39] (1926). В этой работе Ляпунов подробно исследует тот бесконечный ряд, которым определяется функция ζ, преобразуется его к новому виду и таким путем устанавливает вид тех уравнений в координатах x, y, z, которыми определяется поверхности новых фигур равновесия.

Исследовав фигуры равновесия однородной жидкости, близкие к эллипсоидальным, Ляпунов перешел к задаче об отыскании фигур равновесия слабо неоднородной жидкости, близких к эллипсоидам Маклорена и Якоби. Эта громадная работа была начата примерно в 1915 г. После смерти Ляпунова осталась большая рукопись *О некоторые фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости* [42], содержащая решения указанной задачи. В ней доказано, что всякий эллипсоид Маклорена и Якоби, отличный от эллипсоида бифуркации, порождает ряд новых фигур равновесия, близких к нему по форме, со слабой неоднородностью в плотности и с тою же угловой скоростью вращения, что и у исходного эллипсоида. Если принять плотность исходного эллипсоида за единицу, то плотность новой фигуры равновесия принимается в виде $k = 1 + \delta\varphi\,(a)$, где δ—малый параметр и $\varphi(a)$—заданная функция величины a, которая характеризует поверхности уровня плотности внутри жидкости.

Основная функция ζ, характеризующая отклонение внешней поверхности и внутренних поверхностей уровня от эллипсоидов, является функцией θ, ψ и a. Она ищется в виде ряда по целым положительным степеням δ без свободного члена.

Преодолевая громадные трудности, Ляпунов исследует первые три члена упомянутого степенного ряда для ζ и, при некоторых предположениях относительно $\varphi(a)$, указывает, какова форма зависимости любого члена этого ряда от θ, ψ и a. В конце своей работы Ляпунов применяет метод, использованный в этой работе, к случаю однородной жидкости и таким образом приходит к еще одному методу исследования фигур равновесия однородной жидкости. Указание на этот новый метода в применении к однородной жидкости и его изложение было опубликовано Ляпуновым еще в 1916 г. в работе *Новые рассмотрения в теории фигур равновесия, близких к эллипсоидальным в случае однородной жидкости* [40].

Последняя работа Ляпунова о фигурах равновесия неоднородной жидкости является исключительной по силе.

В ней применяютя самые разнообразные средства математического анализа. Как и в других работах, Ляпунов, кроме строго доказанной теоремы существования, не боясь никаких трудностей, дает алгорифм построения уравнений новых фигур равновесия и исследует структуру получающихся при этом приближений.

Два результата, использованные в последней работе Ляпунова, были им предварительно опубликованы вработах: *О полиномиальных рядах* [36] (1915) и *Об одной формуле анализа* [41] (1917).

В первой из них исследуется бесконечный ряд с общим членом $P_n(x_1, \ldots, x_k)\,\alpha^n$, где P_n — полином степени не выше n, и α — параметр ($|\alpha| < 1$). При этом $|P_n|$ не превышает некоторого числа (оно не зависит от n), если каждое x_s $(s = 1, \ldots, k)$ принадлежит промежутку $-1 \leqslant x_s \leqslant 1$.

Во второй работе рассматривается потенциал простого слоя на эллипсоиде и дается его разложение по сферическим функциям на подобном эллипсоиде.

n° 2. Перейдем к более подробному рассмотрению первого исследования Ляпунова из этого цикла *Изыскания в теории фигуры небесных тел* [32] (1903). Первая работа по теории фигур равновесия неоднородной, медленно вращающейся жидкости принадлежит Клеро[1].

Эта работа имела своей целью разъяснить ряд мест в «Principia» Ньютона и дать объяснение результатов, полученных Лапландской экспедицией Французской академии наук. В основу своей теории Клеро положил допущение, что поверхности равной плотности жидкости суть поверхности эллипсоидов вращения. Метод Клеро является приближенным и не дает возможности развить процесс последовательных приближений для получения точного решения.

Следующие значительные работы по указанному вопросу—это работы Лапласа[2]. Лапласу принадлежат два метода рассмотрения вопроса о фигурах равновесия неоднородной жидкости. Первый метод Лапласа не дает возможности продвинуться дальше первого приближения. Второй метод свободен от этого недостатка, но вызывает существенные возражения, и до работы Ляпунова не было построено математической строгой теории.

В своей вступительной лекции к курсу, который Ляпунов начал читать в 1918 г. в Одессе[3], он приводит критику работ Клеро и Лапласа, и указывает тот путь, которым он пошел в работе 1903 г. Приведем выдержку:

«Клеро, рассматривая неоднородную жидкую массу, вращающуюся весьма медленно, предположил a priori, что поверхности уровня суть эллипсоиды вращения, и занимался лишь разысканием элементов этих эллипсоидов, ограничиваясь первым приближением.

«Между тем так задачу ставить нельзя, ибо поверхности уровня в ней не могут быть эллипсоидами, как это и было доказано значительно позже. Можно только сказать, что они мало отличаются от эллипсоидов, но и это только в первом приближении, ибо уже во втором приближении они делаются некоторыми поверхностями вращения четвертого порядка.

«Таким образом совершенно неправильно искать элементы в первом приближении, ибо это суть элементы тех эллипсоидов, которые сами представляют неизвестные поверхности в первом приближении.

«Таким образом по самой постановке задачи Клеро не мог итти далее первого приближения.

«Теории Лежандра и Лапласа свободны от этого недостатка, так как эти геометры, ничего не предрешая заранее, ищут искомые поверхности путем исследовательных приближений.

---

[1] A. Clairaut. Théorie de la figure de la Terre, tirée des Principes de l'hydrostatique. Paris. 1743. Русск. пер. А. Клеро. Теория фигуры земли основанная на началах гидростатики. Изд. Акад. Наук СССР «Классики науки». 1947.

[2] Laplace. Traité de mécanique céleste. T. II. Livre III. Ch. II. IV. T. V. Livre XI. Ch. II.

[3] Публикуется в изд. Акад. Наук СССР «Классики науки А. М. Ляпунов».

«Теория Лапласа, основывающаяся на разложении по функциям, известным под именем лапласовых или сферических, дает возможность продолжать вычисления, при разыскании последовательных приближений, скоть угодно далеко. Но, не говоря о том, что ни Лаплас, ни кто-либо другой после него не пытался исследовать сходимость ряда приближений, что одно только могло дать прочное основание теории, при составлении своих уравнений Лаплас делает предположения, недопустимые a priori, и тем делает свою теорию сомнительной. Прежде всего он допускает a priori, что искомая функция разлагается в ряд по сферическим функциям. Но это еще не так важно. Гораздо важнее другой недостаток теории: при составлении своих уравнений он пользуется недопустимыми разложениями в ряды. Войду в некоторые подробности.

«Наравне с поверхностью жидкости вообразим шаровую поверхность, ограничивающую тот же объем, какой занимает жидкость; радиус этой сферы обозначим через a. Расстояние r точки поверхности жидкости от центра выразим через $a(1+\zeta)$, где ζ — численно малая величина, так как по условию поверхность уровня мало отличается от сферы. Величина эта явится функцией координат точки на сфере; за такие координаты мы примем углы: θ — дополнение широты, ψ — долготу. Расстояние какой-либо другой точки тела будем выражать также формулой $r' = a'(1+\zeta')$, где a' — радиус сферы, объем которой равен объему жидкости, ограниченному поверхностью уровня, проходящей через данную точку. В таком случае интеграл, через который выражается потенциал сил притяжения частиц жидкости, можно представить таким образом:

$$\int \frac{\rho'\,d\tau'}{D} = \int_0^A \rho' a'^2\,da' \int \frac{(1+\zeta')^2}{D}\left(1+\frac{\partial a'\zeta'}{\partial a'}\right) d\sigma' \tag{1}$$

«Здесь через A обозначен радиус шара, объем которого равен объему всей вращающейся жидкости. При составлении выражения интеграла элемент объема $d\tau'$ заменен выражением $r'^2\,dr'\,d\sigma'$, где через $d\sigma'$ обозначен элемент сферы радиуса единицы. Кроме того,

$$dr' = \left(1+\frac{\partial a'\zeta'}{\partial a'}\right) da', \qquad D = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi}$$

«Для вычисления интеграла Лаплас разлагает в ряд выражение $\frac{1}{D}$, причем пользуется разложением при $\frac{r'}{r} < 1$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{r}\sum_0^\infty \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\varphi) \tag{*}$$

а при $\frac{r}{r'} < 1$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{r'}\sum_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\varphi) \tag{**}$$

где через $P_n(\cos\varphi)$ обозначен полином Лежандра n-й степени. В приложении указанных разложений при отмеченных условиях заключается нестрогость. Будет существовать, вообще говоря, такой слой, для которого и то и другое разложение непригодно. Действительно, если наибольшее значение модуля ζ обозначим через l, так что $|\zeta| \leqslant l$, то из условий

$$\frac{r'}{r} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{r}{r'} < 1$$

получим такие пределы для a':

$$a' < a\frac{1-l}{1+l}, \qquad a' > a\frac{1+l}{1-l}$$

для которых разложения (*) и (**) справедливы. Однако остается слой

$$a' > a\frac{1-l}{1+l}, \qquad a' < a\frac{1+l}{1-l}$$

для точек которого разложение сомнительно. Еще Пуассон обратил внимание на это обстоятельство. В последнее время этим занимался Калландро. Заметим, что нет необходимости прибегать к разложениям по шаровым функциям и, таким образом, можно обойти указанную нестрогость.

«В моей работе Recherches dans la théorie de la figure des corps élestes это выполнено путем разложения потенциальной функции в ряд

$$U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$$

где U_i — целая однородная функция относительно ζ и ζ', причем сделано допущение о малости не только величины $|\zeta|$, но и величин

$$\left|\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right|, \qquad \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\psi}\right|, \qquad \left|\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\psi}\right|, \qquad \frac{\partial a\zeta}{\partial a}$$

«В дальнейшем изложении мы покажем, что вся теория может быть основана лишь на двух предположениях, а именно, что $|\zeta|$ мало, и второе, что ζ является непрерывной функцией от a.

«Кроме того, конечно, мы будем основываться на том, что речь идет о поверхности замкнутой и мало отличающейся от сферы».

Из приведенной цитаты видно, что Ляпунов придавал большое значение разложению потенциала U по однородным функциям от ζ и ζ', которое было им построено. Из дальнейшего будет видно, что аналогичные разложения потенциала имеют основное значение и в последующих работах Ляпунова по фигурам равновесия, а именно, в работах по фигурам равновесия однородной и слабо неоднородной жидкости, близких к эллипсоидальным.

Переходим к изложению основного содержания рассматриваемого мемуара *Изыскания в теории фигуры небесных тел* [32]. Основное уравнение задачи имеет вид:

$$U + \frac{\omega^2}{2f}(x^2 + y^2) = G(a) \tag{2}$$

где U определяется формулой (1), ω — угловая скорость вращения жидкости вокруг оси z, f — постоянная в законе всемирного тяготения, $G(a)$ есть некоторая функция a. Плотность ρ считается заданной функцией a. Уравнение поверхностей уровня ищется в виде $r = a(1+\zeta)$, где ζ — искомая функция a, θ и ψ. Из определения параметра a следует

$$\int (1+\zeta)^3 \, d\sigma = 4\pi \tag{3}$$

где $d\sigma = \sin\theta \, d\theta \, d\psi$, и интегрирование производится по поверхности единичной сферы. Вместо ω вводится новый параметр

$$R = \frac{\omega^2 A^3}{fM}$$

где M — масса жидкости, и уравнение (2) приводится к виду

$$U + \frac{M}{2A^3} Ra^2 (1+\zeta)^2 \sin^2\theta = G(a) \tag{5}$$

Предполагается, что ζ не зависит от ψ и есть четная функция $\mu = \cos\theta$.

В предположениях относительно функции ζ и ее производных, которые указаны в приведенной выше цитате, Ляпунов дает для членов разложения потенциальной функции $U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots$ выражения

$$U_0 = \int_0^A \rho' a'^2 \, da' \int \frac{d\sigma'}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa'\cos\varphi}} \tag{6}$$

$$U_n = \frac{4\pi}{a} (-\zeta)^n \int_0^a \rho a^2 \, da + \int_0^A \rho' \frac{\partial T_n}{\partial a'} \, da' \tag{7}$$

где $\rho' = \rho(a')$ и

$$T_n = \sum_{i+j=n-1} \frac{a^i \zeta^i}{i!\,(j+1)!} \left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial a^i \, \partial b^j} \int \frac{(a'\zeta')^{j+1} b^2 \, d\sigma'}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}} \right)_{b=a'} \tag{8}$$

причем

$$\cos\varphi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi') \tag{9}$$

Решение уравнения (5) ищется в виде

$$\zeta = \zeta_1 R + \zeta_2 R^2 + \cdots + \zeta_s R^s + \cdots \tag{10}$$

где ζ_s — искомые функции a и μ. Условие (3) дает

$$\int \zeta_1 \, d\sigma = 0, \qquad \int \zeta_2 \, d\sigma = -\int \zeta_1^2 \, d\sigma, \qquad \int \zeta_n \, d\sigma = N_n \tag{11}$$

причем N_n содержит только $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$. Для решения уравнения (5) надо еще разложить потенциал U по степеням R. Слагаемое U_0 в разложении (6) зависит только от a. Для других членов будет

$$U_n = U_{n,0} R^n + U_{n,1} R^{n+1} + \cdots \tag{12}$$

В частности,

$$\frac{a}{4\pi} U_1 = -(Z_1 R + Z_2 R^2 + \cdots) \tag{13}$$

где

$$Z_n = \zeta_n \int_0^a \rho a^2 \, da - \frac{a}{4\pi} \int_0^A \rho' \, da' \frac{\partial}{\partial a'} \int \frac{a'^3 \zeta_n' \, d\sigma'}{\sqrt{a^2 + a'^2 - 2aa'\cos\varphi}} \tag{14}$$

Далее имеет место формула

$$U - U_1 - U_0 = \frac{4\pi}{a} \sum_{n=2}^{\infty} V_n R^n \tag{15}$$

где

$$\frac{4\pi}{a} V_n = U_{n,0} + U_{n-1,1} + \cdots + U_{2,n-2} \tag{16}$$

Наконец, разлагается в ряд произведение

$$R(1+\zeta)^2 \sin^2\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n R^n$$

Отсюда

$$\Omega_1 = \sin^2\theta, \qquad \Omega_2 = 2\zeta_1 \sin^2\theta, \qquad \Omega_3 = (\zeta_1^2 + 2\zeta_2)\sin^2\theta, \ \ldots$$

Использование введенных разложений позволяет последовательно получить уравнения

$$\begin{aligned} Z_1 &= Na^3\Omega_1 + g_1(a) \\ Z_2 &= Na^3\Omega_2 + V_2 + g_2(a) \\ Z_3 &= Na^3\Omega_3 + V_3 + g_3(a) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad \left(N = \frac{M}{8\pi A^3}\right) \tag{17}$$

из которых должны определиться $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, а также $g_1(a)$, $g_2(a)$, ...

Вводится обозначение

$$z_{n,m} = \int \zeta_n Y_m \, d\sigma \tag{18}$$

где Y_m — какая-либо сферическая функция порядка m.

Из уравнений (17) при $m > 1$ следует (19)

$$z_{n,m} \int_0^a \rho a^2 \, da - \frac{a^{-m}}{2m+1} \int_0^a \rho \frac{d(a^{m+3} z_{n,m})}{da} da - \frac{a^{m+1}}{2m+1} \int_a^A \rho \frac{d(a^{2-m} z_{n,m})}{da} da = W_{n,m} a^3$$

где

$$W_{n,m} = N \int \Omega_n Y_m \, d\sigma + \frac{1}{a^3} \int V_n Y_m \, d\sigma \tag{20}$$

причем надо считать $V_1 = 0$. При $m = 0$ для интеграла (18) имеет место третья формула (11).

В уравнении (19) при $n = 1$ величина $W_{1,m}$ отлична от нуля только в том случае, когда $Y_m = cP_2(\cos\theta)$, и при $c = 1$ величина W равна $-M / 15A^3$, так что в этом случае уравнение (19) приводится к виду

$$z \int_0^a \rho \, a^2 \, da - \frac{a^{-2}}{5} \int_0^a \rho \frac{da^5 z}{da} da - \frac{a^3}{5} \int_a^A \rho \frac{dz}{da} da = -\frac{M}{15A^3} a^3 \tag{21}$$

и в остальных случаях (при $n = 1$) оно будет

$$z \int_0^a \rho a^2 \, da - \frac{a^{-m}}{2m+1} \int_0^a \rho \frac{da^{m+3} z}{da} da - \frac{a^{m+1}}{2m+1} \int_a^A \rho \frac{da^{2-m} z}{da} da = 0 \tag{22}$$

Уравнение (21) с точностью до постоянного множителя в правой части есть известное уравнение Клеро.

Далее Ляпунов приводит результаты своих исследований уравнений (21) и (22) при единственном предположении, что $\rho(a)$ есть убывающая функция a и остается ограниченной при $a \to 0$. Им доказано, что уравнение (21) имеет единственное решение z такое, что z и $d(az)/da$ непрерывны вплоть до $a=0$, и что уравнение (22) при $m>1$ имеет только нулевое решение. При $m=1$ имеется единственное решение вида $z=C/a$, но оно отпадает, если требовать, чтобы произведение az стремилось к нулю при $a \to 0$. Отсюда следует, что $\zeta_1 = \gamma P_2(\cos\theta)$, где γ — определенная функция a. Доказывается, что это выражение ζ_1 единственно, если требовать, чтобы ζ_1 было непрерывной функцией на поверхности единичной сферы.

При определении дальнейших ζ_n надо иметь в виду, что $W_{n,m}$ зависит только от $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$. Ляпунов доказывает, что всякое ζ_n имеет вид:

$$\zeta_n = \gamma_{n0} + \gamma_{n1}P_2(\cos\theta) + \gamma_{n2}P_4(\cos\theta) + \ldots + \gamma_{nn}P_{2n}(\cos\theta) \qquad (23)$$

где γ — определенные функции от a такие, что γ и $d(a\gamma)/da$ непрерывны в интервале $(0, A)$ вплоть до $a=0$. Это выражение ζ_n единственно, если полагать ζ_n непрерывной на поверхности единичной сферы.

Далее без доказательства приводятся оценки для абсолютных значений величин ζ_n, $\partial(a\zeta_n)/\partial a$, $\partial\zeta_n/\partial\mu^2$ и доказывается абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n R^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial(a\xi_n)}{\partial a} R^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial\zeta_n}{\partial\mu^2} R^n \qquad (24)$$

если положительный параметр R не превышает некоторого числа R_0, для которого устанавливаются неравенства

$$\frac{1}{30016} \leqslant R_0 < \frac{1}{700}$$

Ряды (24) могут сходиться и при $R > R_0$.

В конце приведенной выше цитаты из вступительной лекции перечисляются те предположения относительно ζ, при которых проводится предыдущее исследование. Далее указывается, что вся теория может быть основана лишь на двух предположениях: $|\zeta|$ — мало и ζ есть непрерывная функция a. Однако до сих пор в бумагах Ляпунова не обнаружено материалов относительно этого вопроса.

К мемуару *Изыскания в теории небесных тел* [32] непосредственно примыкает другая работа Ляпунова *Об уравнении Клеро и более общих уравнениях в теории фигур планет* [33]. Главной целью этой работы является исследование уравнения Клеро и обобщенного уравнения (19) при любой правой части. Относительно плотности $\rho(a)$ предполагается лишь, что это есть не возрастающая функция от a и что $\rho(a)$ остается ограниченной при $a \to 0$, причем допустимы и разрывы непрерывности этой функции. Для исследования уравнения при таких общих предположениях Ляпунов вводит обобщение понятия интеграла в направлении интеграла Стильтьеса и переписывает исследуемое уравнение, пользуясь обобщенным интегралом. Затем, при некоторых естественных предположениях относительно искомой функции z доказывается теорема существования и единственности решения уравнения. При этом обнаруживается, что полученное решение z таково, что основное уравнение может быть записано при помощи обычного понятия интеграла. В работе приведены также некоторые неравенства для решения основного уравнения, которые позволяют провести доказательство сходимости рядов (24).

В приведенных двух мемуарах Ляпунова была впервые построена строгая математическая теория фигур равновесия медленно вращающейся неоднородной жидкости. На основании его результатов удалось получить разнообразные сведения о фигурах равновесия и выяснить ряд вопросов, неразрешимых при помощи теории Клеро–Лапласа.

Эти же исследования являются исходными для всей серии работ Ляпунова по фигурам равновесия вращающейся жидкости; использованный метод исследования Ляпунов применяет при соответствующем его видоизменении и в более сложной задаче о фигурах равновесия, близких к эллипсоидальными.

Основные черты этого метода состоят в следующем: разложение ньютонова потенциала; применение процесса последовательных приближений путем разложения искомого решения по некоторому малому параметру; доказательство сходимости этого процесса при помощи построения мажорантного ряда. Отметим, что в более поздних исследованиях угловая скорость уже не является малой и роль малого параметра играет совершенно иная величина.

n° 3. Переходим к изложению работ о фигурах равновесия, близких к эллипсоидальным, для случая однородной жидкости. При этом будем придерживаться того метода, который изложен в четвертой части большой работы *О фигурах равновесия*... [35].

При исследовании фигур равновесия однородной жидкости переход от одной к другой геометрически подобной фигуре не играет существенной роли. Поэтому уравнение эллипсоида принимается в виде

$$\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}=1 \tag{25}$$

где $\rho>0$ и $0<q\leqslant 1$. При $q=1$ получается эллипсоид вращения. Всякий такой эллипсоид может служить фигурой равновесия, причем ось z является осью вращения, и всякому такому эллипсоиду соответствует определенное значение угловой скорости вращения ω.

При $q<1$ трехосный эллипсоид (25) является фигурой равновесия вращающейся жидкости, если ρ и q связаны уравнением

$$R-Q=0 \tag{26}$$

где

$$R=\frac{\rho}{2}\int_{\rho}^{\infty}\frac{dt}{t\Delta t}, \qquad Q=\frac{1}{2}(\rho+1)(\rho+q)\int_{\rho}^{\infty}\frac{dt}{(t+q)(t+1)\Delta(t)} \tag{27}$$

$$\Delta(t)=\sqrt{t(t+q)(t+1)} \tag{28}$$

Исследование уравнения (26) показывает, что всякому положительному значению ρ отвечает одно определенное положительное значение q и при увеличении ρ от 0 до $+\infty$ и q увеличивается от 0 до $+\infty$.

В частности, при увеличении ρ от 0 до 0.514... величина q увеличивается от 0 до 1.

Переходим к общей задаче о фигурах равновесия. Пусть F — такая фигура, Σ — ее поверхность и

$$U(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \iiint_F \frac{d\tau'}{r} \tag{29}$$

где r — расстояние от точки (x, y, z) до переменной точки (x', y', z'), по которой производится интегрирование. Пусть, далее, ω — угловая скорость вращения жидкости, k — плотность, f — постоянная в законе всемирного тяготения и

$$\Omega = \frac{\omega^2}{2\pi k} \tag{30}$$

Задача сводится к определению тела F таким образом, чтобы на его поверхности Σ имело место равенство

$$U + \Omega(x^2 + y^2) = \text{const} \tag{31}$$

причем ось вращения принята за ось z. Отметим, что интегрирование в формуле (5) производится по искомой области F. Уравнение поверхности Σ ищется в виде

$$x = \sqrt{1+\zeta}\sqrt{\rho+1}\sin\theta\cos\psi, \quad y = \sqrt{1+\zeta}\sqrt{\rho+q}\sin\theta\sin\psi$$
$$z = \sqrt{1+\zeta}\sqrt{\rho}\cos\theta \tag{32}$$

где ζ — искомая функция θ и ψ. При $\zeta = 0$ получается уравнение (25) исходного эллипсоида E_0, который является эллипсоидом Маклорена или Якоби. Пусть Ω_0 — значение Ω для E_0.

Первым существенным моментом метода является представление потенциала U тела F, ограниченного поверхностью (32), в виде ряда

$$U = U_0 + U_1 + \cdots + U_n + \ldots \tag{33}$$

где U_n — однородные функции порядка n по отношению к ζ. Далее надо подставить разложение (33) в уравнение (31) и решить две задачи. Во-первых, надо найти эллипсоиды бифуркации, вблизи которых существуют не только эллипсоидальные фигуры со значением Ω, отличным от Ω_0, но и новые фигуры равновесия, отличные от эллипсоидальных. Во-вторых, надо определить функцию $\zeta(\theta, \psi)$, дающую эти новые фигуры согласно (32). Для того чтобы расчленить решение этих двух задач, Ляпунов заменяет уравнение (31) более общим, добавляя к его левой части лишнее слагаемое вида $L\zeta$, где L — некоторая постоянная.

После подстановки (33) и ряда преобразований это обобщенное уравнение для ζ получается в виде

$$R\zeta - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\zeta'\, d\sigma''}{D} = W - L\zeta + \text{const} \tag{34}$$

где $d\sigma' = \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi'$, интегрирование ведется по поверхности сферы радиуса единицы, D — расстояние между точками (θ, ψ) и (θ', ψ') на эллипсоиде E_0, величина R определяется формулой (3), наконец,

$$W = S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots$$

$$S_n = \frac{1}{2\Delta(\rho)} U_n = \frac{1}{4\pi} \sum_{i+j=n} \frac{(n-2)!\,(-\zeta)^{j-1}}{(i-1)!\,(i+1)!\,(j-1)!} \lim_{u\to 0} \frac{d^i}{du^i} \int \frac{(\zeta' - \zeta)^{i+1}}{D(u)}\, d\sigma'$$

причем суммирование распространяется на целые положительные значения i и j, для которых $i + j = n$, а $D(u)$ есть расстояние между точками

$$\left(\frac{\sqrt{\rho+1}}{\sqrt{u+1}} \sin\theta\cos\psi,\quad \frac{\sqrt{\rho+q}}{\sqrt{u+1}} \sin\theta\sin\psi,\quad \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{u+1}} \cos\theta\right)$$

$$(\sqrt{\rho+1}\sin\theta\cos\psi,\quad \sqrt{\rho+q}\sin\theta\sin\psi,\quad \sqrt{\rho}\cos\theta)$$

Далее возникает еще следующая трудность. Уравнение (31) допускает тривиальные решения для ζ, которые определяют согласно формулам (32) эллипсоидальные фигуры равновесия, близкие к E_0, и это будет иметь место при любом выборе E_0. Чтобы избежать эту трудность, Ляпунов считает, что формулы (32) при $\zeta = 0$ определяют не исходный эллипсоид E_0, а тот переменный эллипсоид E, который имеет ту же величину Ω (т. е. ту же угловую скорость вращения), что и искомая неэллипсоидальная фигура равновесия. В окончательных формулах надо будет вернуться к исходному эллипсоиду E_0.

Пользуясь возможностью преобразования подобия для фигур равновесия и выбирая соответственным образом начало координат на оси вращения и оси x и y, можно считать, что объем фигуры F равен объему эллипсоида E и что плоскости xy и xz суть плоскости симметрии для F. Наличие таких плоскостей симметрии было раньше доказано Ляпуновым. После этого остается произвольным еще один параметр. Ляпунов считает заданной величину интеграла от ζ^2 по поверхности сферы и, обозначая корень квадратный из этой величины через α, ищет функцию ζ и постоянную L, входящие в уравнение (10), в виде рядов

$$\zeta = \zeta_1\alpha + \zeta_2\alpha^2 + \zeta_3\alpha^3 + \ldots, \qquad L = L_0 + L_1\alpha + L_2\alpha^2 + \ldots \tag{35}$$

Подстановка разложения ζ в выражение W дает $W = W_1\alpha + W_2\alpha^2 + \ldots$, причем W_n зависит только от $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$; после подстановки разложений (35) в уравнение (34) получается последовательность линейных интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
&(L_0 + R)\zeta_1 - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\zeta_1'\, d\sigma'}{D} = \text{const}\\
&(L_0 + R)\zeta_2 - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\zeta_2'\, d\sigma'}{D} = W_2 - L_1\zeta_1 + \text{const}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (36)\\
&(L_0 + R)\zeta_n - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\zeta_n'\, d\sigma'}{D} = W_n - L_{n-1}\zeta_1 - L_{n-2}\zeta_2 - \ldots - L_1\zeta_{n-1} + \text{const}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Интегрируя обе части первого уравнения по θ и ψ, легко доказать, что постоянная, входящая в это уравнение, равна нулю и для ζ_1 получается однородное уравнение

$$(L_0+R)\zeta_1=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\zeta_1' d\sigma'}{D} \tag{37}$$

В силу указанной выше симметрии F искомые функции ζ_n можно считать зависящими только от $\sin\theta\cos\psi$ и $\cos^2\theta$.

Из принятого условия относительно объема вытекают равенства:

$$\int\zeta_1\,d\sigma=0, \qquad \int\zeta_1^2\,d\sigma=1 \tag{38}$$

Используя функции Лямэ, Ляпунов нашел все собственные значения и собственные функции уравнения (32) и тем самым нашел возможные значения L_0 при заданных ρ и q.

Интегрируя обе части второго из уравнений (36), можно найти постоянное слагаемое, входящее в правую часть. Это неоднородное линейное интегральное уравнение должно быть разрешимо, хотя соответствующее однородное имеет решения, отличные от нулевого. Условие разрешимости дает постоянную L_1, после чего определяется ζ_2. Аналогичные рассуждения применимы к третьему из уравнений (31) и т. д.

Вычисления, относящиеся к решению линейных интегральных уравнений, были проделаны Ляпуновым до создания общей теории линейных интегральных уравнений. В мемуаре 1914 года он не ссылается на эту теорию, не считая, повидимому, эти операции сколько-нибудь существенной частью работы в отношении трудности.

Таким образом, строятся разложения (35) и далее доказывается их сходимость, что составляет существенную часть работы. Все изложенное имело место при любом выборе эллипсоида Маклерена или Якоби E_0 и близкого к нему эллипсоида из той же серии фигур равновесия.

Пусть теперь $\sqrt{\rho'+1}$, $\sqrt{\rho'+q'}$, $\sqrt{\rho'}$ обозначают полуоси эллипсоида E, а $\sqrt{\rho+1}$, $\sqrt{\rho+q}$, $\sqrt{\rho}$ — полуоси эллипсоида E_0. В соответствии с этим буквы ζ', θ', ψ' обозначают величины по отношению к E, которые раньше обозначались через ζ, θ, ψ. Уравнения (32) будут иметь вид:

$$x=\sqrt{1+\zeta'}\sqrt{\rho'+1}\sin\theta'\cos\psi'$$

$$y=\sqrt{1+\zeta'}\sqrt{\rho'+q'}\sin\theta'\sin\psi$$

$$z=\sqrt{1+\zeta'}\cos\theta'$$

Это есть уравнение поверхности, удовлетворяющей обобщенному уравнению (34). Уравнение той же поверхности, отнесенное к эллипсоиду E_0, будет иметь вид (32).

Из сравнений обоих представлений поверхности получается

$$\zeta=\zeta_0+(1+\zeta_0)\zeta' \tag{39}$$

где

$$\zeta_0 = \frac{\frac{\rho' - \rho}{\rho' + 1} \sin^2 \theta \cos^2 \psi + \frac{\rho' - \rho + q' - q}{\rho' + q'} \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \frac{\rho' - \rho}{\rho'} \cos^2 \theta}{\frac{\rho + 1}{\rho' + 1} \sin^2 \theta \cos^2 \psi + \frac{\rho + q}{\rho' + q'} \sin^2 \theta \sin^2 \psi + \frac{\rho}{\rho'} \cos^2 \theta} \tag{40}$$

Связь между углами (θ, ψ) и (θ', ψ') выражается формулами

$$\sin \theta' \cos \psi' = \sqrt{1 + \zeta_0} \frac{\sqrt{\rho + 1}}{\sqrt{\rho' + 1}} \sin \theta \cos \psi \tag{41}$$

$$\sin \theta' \sin \psi' = \sqrt{1 + \zeta_0} \frac{\sqrt{\rho + q}}{\sqrt{\rho' + q'}} \sin \theta \sin \psi, \qquad \cos \theta' = \sqrt{1 + \zeta_0} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho'}} \cos \theta$$

Таким образом, ζ' определяется первым разложением (35):

$$\zeta' = \zeta_1' \alpha + \zeta_2' \alpha^2 + \zeta_3' \alpha^3 + \ldots \tag{42}$$

Формула (39) дает ζ как функцию θ, ψ, θ', ψ' или в силу (41) как функцию θ и ψ. Таким образом решено обобщенное уравнение (34) и решение выражено по формулам (32), т. е. за исходную фигуру принят эллипсоид E_0. Далее доказывается, что ζ_0 и ζ_k' разлагаются по целым положительным степеням параметра η, который определяется формулой $\Omega = \Omega_0 + \eta$, причем разложение ζ_0 не содержит члена, не зависящего от η. Таким образом, согласно (39) и (42), получается

$$\zeta = \sum_{k+l \geqslant 1}^{\infty} \zeta_{kl} \alpha^k \eta^l \qquad (k \geqslant 0, \, l \geqslant 0) \tag{43}$$

Аналогичным образом имеет место разложение

$$L = \sum_{k, l = 0}^{\infty} L_{kl} \alpha^k \eta^l \tag{44}$$

Доказывается сходимость этих рядов, если α и η достаточно близки к нулю, и дается прием последовательного определения коэффициентов.

n° **4.** Чтобы вернуться от обобщенного уравнения (34) к основному (31), определяющему фигуру равновесия, надо положить $L = 0$. Тем самым элементы эллипсоидов бифуркации определяются уравнением

$$L_{00} = 0 \tag{45}$$

и устанавливается связь между α и η:

$$\sum_{k+l > 0} L_{kl} \alpha^k \eta^l = 0 \tag{46}$$

При этом доказывается, что коэффициент L_{01} отличен от нуля, что дает возможность выразить η через α:

$$\eta = h_1 \alpha + h_2 \alpha^2 + h_3 \alpha^3 + \ldots \tag{47}$$

Подстановка этого ряда в (43) дает окончательное выражение для ζ

$$\zeta = \zeta_1 \alpha + \zeta_2 \alpha^2 + \zeta_3 \alpha^3 + \ldots \tag{48}$$

В коэффициентах этого разложения ρ и q, соответствующие эллипсоиду бифуркации E_0, должны удовлетворять уравнению (45). Далее будет видно, что таких эллипсоидов имеется бесчисленное множество.

В основе указанного выше метода лежит разложение потенциала U в ряд (33). Такого рода разложение встречается уже в первой работе из рассматриваемого цикла *Изыскания в теории фигуры небесных тел* [32].

n° 5. Приведем аппарат, связанный с проведением описанного метода. Этому изложению предпошлем основные определения и формулы, касающиеся функций Лямэ, в тех обозначениях, которые были использованы Ляпуновым. При этом пока будет предполагаться $q < 1$.

В основе теории функций Лямэ лежит уравнение вида

$$\sqrt{(x^2-1)(x^2-q)}\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{(x^2-1)(x^2-q)}\,\frac{dy}{dx}\right]+[\beta-n(n+1)x^2]\,y=0 \quad (49)$$

где n — целое неотрицательное числа и β — постоянный параметр.

При заданном n существует $2n+1$ вещественных значений параметра $\beta_{n,0} > \beta_{n,1} > \ldots > \beta_{n,2n}$ таких, что при $\beta = \beta_{n,s}$ уравнение (49) имеет решение $E_{n,s}(x)$ в виде полинома от x, $\sqrt{x^2-1}$, $\sqrt{x^2-q}$. Более точно

$$\begin{aligned}
&E_{n,s}(x) = P(x) && \text{при } s \equiv 0 \ (\text{мод. } 4)\\
&E_{n,s}(x) = P(x)\sqrt{x^2-q} && \text{при } s \equiv 1 \ (\text{мод. } 4)\\
&E_{n,s}(x) = P(x)\sqrt{x^2-1} && \text{при } s \equiv 2 \ (\text{мод. } 4)\\
&E_{n,s}(x) = P(x)\sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2-q} && \text{при } s \equiv 3 \ (\text{мод. } 4)
\end{aligned}$$

где $P(x)$ — полином от x степени соответственно n, $n-1$, $n-1$, $n-2$.

Функции $E_{n,s}(x)$ определены с точностью до множителя. Если ввести эллиптические координаты μ, ν, связанные с θ, ψ формулами

$$\begin{gathered}
\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\nu^2} = \sqrt{1-q}\,\sin\theta\cos\psi\\
\sqrt{q-\mu^2}\sqrt{\nu^2-q} = \sqrt{q(1-q)}\,\sin\theta\sin\psi\\
\mu\nu = \sqrt{q}\cos\theta
\end{gathered}$$

то произведения $E_{n,s}(\mu)\,E_{n,s}(\nu)$ будут линейными комбинациями элементарных сферических функций $Y_{n,s}(\theta,\psi)$ $(s=0,1,\ldots,2n)$ порядка n. Упомянутые произведения ортогональны на поверхности единичной сферы как функции θ и ψ.

Уравнение (49) при $\beta = \beta_{n,s}$, кроме решения $E_{n,s}(x)$, имеет еще решение $F_{n,s}(x)$, которое может быть представлено в виде

$$F_{n,s}(x) = (2n+1)\,E_{n,s}(x)\int_x^\infty \frac{dx}{[E_{n,s}(x)]^2\sqrt{(x^2-1)(x^2-q)}} \quad (50)$$

Вводятся функции

$$\boldsymbol{E}_{n,s}(u) = E_{n,s}(i\sqrt{u})$$

$$\boldsymbol{F}_{n,s}(u) = \frac{2n+1}{2}\,\boldsymbol{E}_{n,s}(u)\int_u^\infty \frac{du}{[\boldsymbol{E}_{n,s}(u)]^2\sqrt{u(u+1)(u+q)}}. \quad (51)$$

При этом $\boldsymbol{F}_{n,s}(u)$ постоянным множителем отличается от $F_{n,s}(i\sqrt{u})$. Далее $\boldsymbol{E}_{n,s}(\rho)$ и $\boldsymbol{F}_{n,s}(\rho)$ обозначаются просто через $\boldsymbol{E}_{n,s}$ и $\boldsymbol{F}_{n,s}$. При этих обозначениях

$$R = \frac{1}{3}\boldsymbol{E}_{1,0}\boldsymbol{F}_{1,0} \tag{52}$$

и уравнение (26) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{3}\boldsymbol{E}_{1,0}\boldsymbol{F}_{1,0} - \frac{1}{5}\boldsymbol{E}_{2,3}\boldsymbol{F}_{2,3} = 0 \tag{53}$$

Имеет место также следующая формула Лиувилля:

$$E_{n,s}(\mu)\,E_{n,s}(\nu) = \frac{2n+1}{4\pi \boldsymbol{E}_{n,s}\boldsymbol{F}_{n,s}} \int \frac{E_{n,s}(\mu')\,E_{ns}(\nu')}{D}\,d\sigma' \tag{54}$$

где, как и выше, D — расстояние между двумя точками эллипсоида, которым соответствуют эллиптические координаты (μ, ν) и (μ', ν').

Укажем предельный случай предыдущих формул для $q \to 1$. При некотором специальном выборе постоянного множителя у $E_{n,s}(x)$:

$$\begin{aligned} &\lim_{q\to1} E_{n,2k}(\mu) = \lim_{q\to1} E_{n,2k-1}(\mu) = P_{n,k}(\cos\theta) \\ &\lim_{q\to1} E_{n,2k}(\nu) = \cos k\psi, \qquad \lim_{q\to1} E_{n,2k-1}(\nu) = \sin k\psi \end{aligned} \tag{55}$$

где, как обычно,

$$P_{n,k}(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}k}\frac{d^k P_n(x)}{dx^k}$$

и $P_n(x)$ — полином Лежандра. Таким образом, в пределе произведение $E_{n,s}(\mu)\;E_{n,s}(\nu)$ превращается в элементарную сферическую функцию $Y_{n,s}(\theta, \psi)$. При подходящем выборе постоянного множителя у $\boldsymbol{E}_{n,s}(u)$ получается

$$\lim_{q\to1}\boldsymbol{E}_{n,s}(u) = \boldsymbol{P}_{n,k}(u), \qquad \lim_{q\to1}\boldsymbol{F}_{n,s}(u) = \boldsymbol{Q}_{n,k}(u) \tag{56}$$

где

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{P}_{n,k}(u) = \frac{1}{2\cdot4\ldots2n}(u+1)^{\frac{1}{2}k}\left\{\frac{d^{n+k}(x^2+1)^n}{dx^{n+k}}\right\}_{x=\sqrt{u}} \\ &\boldsymbol{Q}_{n,k}(u) = \frac{2n+1}{2}\boldsymbol{P}_{n,k}(u)\int_0^\infty \frac{du}{[\boldsymbol{P}_{n,k}(u)]^2(u+1)\sqrt{u}} \end{aligned} \tag{57}$$

Через $\boldsymbol{P}_{n,k}$ и $\boldsymbol{Q}_{n,k}$ обозначаются $\boldsymbol{P}_{n,k}(\rho)$ и $\boldsymbol{Q}_{n,k}(\rho)$.

n° 6. Сравнение уравнения (37) с формулой Лиувилля (54) дает

$$L_0 = -R + \frac{\boldsymbol{E}_{n,s}\boldsymbol{F}_{n,s}}{2n+1} = \frac{\boldsymbol{E}_{n,s}\boldsymbol{F}_{n,s}}{2n+1} - \frac{1}{3}\boldsymbol{E}_{1,0}\boldsymbol{F}_{1,0}$$

Величина $L_{0,s}$ есть значение L_0 при $\eta = 0$, т. е. есть значение L_0 для исходного эллипсоида E_0. Вводя обозначение

$$T_{n,s} = \frac{1}{3}\boldsymbol{E}_{1,0}\boldsymbol{F}_{1,0} - \frac{\boldsymbol{E}_{n,s}\boldsymbol{F}_{n,s}}{2n+1} \tag{58}$$

можно представить уравнение (45), определяющее эллипсоиды бифуркации, в виде

$$T_{n,s} = 0 \tag{59}$$

В случае эллипсоидов Якоби к этому уравнению надо присоединить еще уравнение (26), которое может быть записано в виде (53). Подробно исследуя величины $T_{n,s}$, Ляпунов показывает, что для эллипсоидов Якоби эллипсоиды бифуркации получаются только при $s=2n$ и $n \geqslant 2$. Таким образом, для определения ρ и q получается бесчисленное множество систем уравнений:

$$T_{2,3} = 0, \qquad T_{n,2n} = 0 \qquad (n = 2,\ 3,\ \ldots) \tag{60}$$

Доказывается, что каждая такая система дает один эллипсоид бифуркации. При $n=2$ получается эллипсоид Якоби с наибольшим значением ω ($\rho = 0.514\ldots$, $q=1$). Он является эллипсоидом бифуркации лишь постольку, поскольку при уменьшении ω от него ответвляются не только эллипсоиды Якоби, но и эллипсоиды Маклорена. В дальнейшем этот эллипсоид обозначается через E_2. При $n=3$ получается эллипсоид E_3, от которого ответвляются неэллипсоидальные фигуры равновесия; они называется обычно грушевидными.

При увеличении n величины ρ, q и ω, соответствующие эллипсоидам бифуркации, определяемым системой (60), уменьшаются и стремятся к нулю при $n \to \infty$. Для эллипсоидов Маклорена имеется вместо системы (60) единственное уравнение для определения ρ:

$$T_{n,k}' = R - \frac{1}{2n+1} P_{n,k} Q_{n,k} = 0 \qquad \left(R = \frac{1}{3} P_{1,0} Q_{1,0} = \sqrt{\rho}\right) \tag{61}$$

Доказывается, что уравнение (61) приводит к единственному эллипсоиду бифуркации, если $n-k$ есть четное число или нуль. В остальных случаях оно не дает эллипсоидов бифуркации. Различные уравнения (61) приводят к различным эллипсоидам бифуркации. Уравнение $T_{2,2}=0$ дает наибольшее значение $\rho = 0.514\ldots$ и соответствующий эллипсоид совпадает с E_2. Следующее по величине значение $\rho = 0.236\ldots$ получается из уравнения $T_{3,3}' = 0$. Третье по величине значение $\rho = 0.156\ldots$ получается из уравнения $T_{2,0}' = 0$, и соответствующий эллипсоид есть эллипсоид Маклорена E_1 с наибольшей угловой скоростью. Он порождает при уменьшении ω два ряда эллипсоидов Маклорена.

Исследование уравнений (60) и (61) является обширным отделом в работах Ляпунова. В этом исследовании проявлены необыкновенная сила анализа и точность вычислений. Отметим, например, что при исследовании уравнения (61) и доказательстве того, что различные уравнения (61) определяют различные ρ, применена теорема Эрмита-Линдемана о невозможности соотношения $A_1 e^{\alpha_1} + A_2 e^{\alpha_2} + \ldots + A_n e^{\alpha_n} = 0$, где A_k — алгебраические числа, отличные от нуля, и α_k — различные алгебраические числа.

Приведем общую схему решения уравнений (36). Первое из них, в силу (37) и (54), дает $L_0 = -T_{n,s}$ и

$$\zeta_1 = c E_{n,s}(\mu) E_{n,s}(\nu) \tag{62}$$

где c — произвольная постоянная.

Условие ортогональности правой части второго из уравнений (36) к решению ζ_1 соответствующего однородного уравнения определяет постоянную L_1:

$$L_1 = \int W_2 \zeta_1 d\sigma \tag{63}$$

Кроме того, наличие произвольного постоянного слагаемого в упомянутой правой части приводит к такому же слагаемому в выражении ζ_2. Окончательно для ζ_2 получается выражение $\zeta_2 = \zeta_2' + c_0 + c_1\zeta_1$, где ζ_2' — определенная функция θ и ψ, а c_0 и c_1 — произвольные постоянные. Произвольные постоянные определяются из дополнительных условий. Аналогичным образом определяются и следующие ζ_k.

Указанный процесс применяется к определению коэффициентов разложения (43). Ляпунов доказывает, что всякая функция $\zeta_{k,l}$ есть конечная линейная комбинация сферических функций и представляет собой полином от аргументов $\sin\theta\cos\psi$ и $\cos\theta$ степени $kn + 2l$, где n — порядок сферической функции ζ_1. В окончательных формулах должен быть учтен тот факт, что исходный эллипсоид есть эллипсоид бифуркации.

Еще в первой части работы[35] *О фигурах равновесия ...* Ляпунов доказал некоторые свойства симметрии полученных им неэллипсоидальных фигур. Все эти фигуры, как уже упоминалось, имеют две плоскости симметрии: одну, перпендикулярную к оси вращения, и вторую, проходящую через эту ось. Если E_0 есть эллипсоид Маклорена и $k = 0$ в уравнении (61), то порожденные им фигуры равновесия суть поверхности вращения относительно оси z. При $k \neq 0$ это не так, но через ось z проходит k плоскостей симметрии.

В случае эллипсоидов Якоби, если в уравнении (60) число n — четное, то через ось проходят две плоскости симметрии, близкой неэллипсоидальной фигуры равновесия. При нечетном n таких плоскостей будет только одна.

В изложенных исследованиях, кроме малости абсолютной величины ζ, считается, что ζ есть однозначная функция θ и ψ, и что отношение

$$\frac{|\zeta(\theta, \psi) - \zeta(\theta', \psi')|}{\delta}$$

где δ — расстояние между точками (θ, ψ) и (θ', ψ') единичной сферы, остается меньше некоторого достаточно малого положительного числа. В работе *Об одном классе фигур равновесия вращающейся жидкости*[47] (1909) Ляпунов доказывает, что из малости $|\zeta|$ вытекают два указанных свойства. Таким образом, предположение о наличии этих свойств в решении задачи не умаляет общности.

n° 7. Переходим к изложению содержания последней, опубликованной посмертно работы Ляпунова о фигурах равновесия слабо неоднородной жидкости, близких к эллипсоидальным[42]. За исходной эллипсоид F принимается эллипсоид Якоби или Маклорена с полуосями $\sqrt{\rho+1}, \sqrt{\rho+q}, \sqrt{\rho}$ и угловой скоростью вращения ω. Ищется фигура равновесия F неоднородной жидкости, близкая к E и имеющая ту же угловую скорость ω. Плотность фигуры F берется в виде $k=1+\delta\varphi(a)$, где δ — малый параметр и $\varphi(a)$ — заданная функция параметра a, определяющего поверхности уровня, уравнение которых ищется в виде

$$x=a(1+\zeta)\sqrt{\rho+1}\sin\theta\cos\psi,\quad y=a(1+\zeta)\sqrt{\rho+q}\sin\theta\sin\psi$$
$$z=a(1+\zeta)\sqrt{\rho}\cos\theta \tag{64}$$

где $\zeta=\zeta(a,\theta,\psi)$ — искомая функция a, θ и ψ; предполагается, что внешней поверхности жидкости соответствует $a=1$ и вводится обозначение

$$\bar{\zeta}=\bar{\zeta}(\theta,\psi)=\zeta(1,\theta,\psi) \tag{65}$$

Для определения параметра a принимается, что объем, ограниченный поверхностью уровня, соответствующей какому-либо значению a, равен объему эллипсоида с полуосями $a\sqrt{\rho+1}$, $a\sqrt{\rho+q}$ и $a\sqrt{\rho}$. Это дает

$$\int(1+\zeta)^3\,d\sigma=4\pi \tag{66}$$

Основное уравнение задачи имеет вид:

$$U+\Omega(x^2+y^2)=G(a)\qquad\left(\Omega=\frac{\omega^2}{2f},\quad U=\int\frac{k(-N)}{r}\,d\tau\right) \tag{67}$$

где $G(a)$ — некоторая функция a и r есть расстояние от переменной точки интегрирования $N(x',y',z')$ до точки $M(x,y,z)$. Далее вводятся обычные обозначения:

$$k'=1+\varphi(a'),\qquad \zeta'=\zeta(a',\theta',\psi') \tag{68}$$

$$r=\sqrt{(\rho+1)[a(1+\zeta)\sin\theta\cos\psi-a'(1+\zeta')\sin\theta'\cos\psi']^2+(\rho+q)[\cdots]^2+\rho[\cdots]^2}$$

$$r=D(a+a\zeta,a'+a'\zeta)=D[\zeta,\zeta'],\qquad D(a,a')=D[0,0]=D$$

Предполагается, что функция ζ удовлетворяет следующим условиям:

$$|\zeta|<l,\qquad \frac{\sqrt{\rho+1}\,(a+a')}{2}\,\frac{|\zeta'-\zeta|}{D}<g \tag{69}$$

где положительные величины l и g зависят только от δ и стремятся к нулю при $\delta\to 0$. Функция $G(a)$ считается не возрастающей и ζ предполагается четной функцией $a\sin\theta$, $\cos\psi$, $a\sin\theta\sin\psi$, $a\cos\theta$.

Для потенциала U устанавливается формула

$$U=(1+\zeta)^2U_0+\Delta(1+\zeta)\int_0^1 k'\,da'\,\frac{d}{\partial a'}\int\frac{a'^3(\zeta'-\zeta)}{D(a,a')}\,d\sigma'+$$
$$+\Delta\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}(1+\zeta)^{2-n}\int_0^1 k'\,da'\,\frac{\partial}{\partial a'}\left\{\frac{d^{n-1}}{\partial b^{n-1}}\int\frac{b^2a'^n(\zeta'-\zeta)^n}{D(a,b)}\,d\sigma'\right\}_{b=a'} \tag{70}$$

где U_0 — потенциал эллипсоида E с плотностью $k=1+\delta\varphi(a)$.

Разложение каждого члена формулы (70) по степеням ζ приводит к разложению U в ряд

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots \tag{71}$$

каждый член которого есть однородная функция ζ и ζ'.

Выделение параметра δ приводит к разложению

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} (V_n + \delta\Phi_n) = V + \delta\Phi \tag{72}$$

где V_n и Φ_n получаются из U_n заменой k' на 1 или на $\varphi(a')$.

Основное уравнение (67) приводится к виду

$$R\zeta - \frac{1}{4\pi a^2}\int \frac{\zeta'\, d\sigma'}{D(a, 1)} = W + g(a) \qquad \left(R = \frac{\rho}{2}\int_{\rho}^{\infty} \frac{dt}{t\Delta(t)}\right) \tag{73}$$

где $g(a)$ — некоторая функция a и

$$W = \frac{\Omega}{4\pi\Delta}(\rho + \cos^2\psi + q\sin^2\psi)\zeta^2 \sin^2\theta + \tag{74}$$

$$+ \frac{1}{4\pi a^2}\left(V_2 + V_3 + \ldots - V_2(0) + [\Phi - \Phi(0)]\,\delta\right)$$

а $V_2(0)$ и $\Phi(0)$ суть значение V_2 и Φ при $a = 0$; они не зависят от θ и ψ. Решение уравнения (73) ищется в виде ряда

$$\zeta = \zeta_1\delta + \zeta_2\delta^2 + \zeta_3\delta^3 + \ldots \tag{75}$$

причем для ζ_n получаются уравнения

$$R\zeta_n - \frac{1}{4\pi a^2}\int \frac{\zeta_n'\, d\sigma'}{D(a, 1)} = W_n + g_n(a) \tag{76}$$

где W_n — коэффициенты в разложении W по степеням δ.

Формула (66) приводит к равенствам (11).

Интегрирование уравнения (76) по поверхности единичной сферы, если принять во внимание формулу

$$\int \frac{d\sigma}{D(a, 1)} = \frac{2\pi}{a}\int_{\tau'}^{\infty} \frac{dt}{\Delta(t)}$$

где τ' — положительный корень уравнения

$$\frac{\rho+1}{\tau'+1}\sin^2\theta'\cos^2\psi' + \frac{\rho+q}{\tau'+q}\sin^2\theta'\sin^2\psi' + \frac{\rho}{\tau'}\cos^2\theta' = a^2$$

дает

$$RN_n - \frac{1}{2a^3}\int \zeta_n' \left[\int_{\tau'}^{\infty} \frac{dt}{\Delta(t)}\right] d\sigma' = \int W_n\, d\sigma + 4\pi g_n(a)$$

Отсюда определяется $g_n(a)$ и уравнение (76) приводится к виду

$$R\zeta_n - \frac{1}{4\pi a^2}\int \zeta_n' \left[\frac{1}{D(a, 1)} - \frac{1}{2a}\int_{\tau'}^{\infty} \frac{dt}{\Delta(t)}\right] d\sigma' = W_n - \frac{1}{4\pi}\int W_n\, d\sigma + \frac{1}{4\pi} RN_n \tag{77}$$

При этом правая часть уравнения (77) зависит только от $\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$. Если считать эти функции известными, то уравнение (77) приводит к интегральному уравнению для $\bar{\zeta}_n$

$$R\bar{\zeta}_n - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\bar{\zeta}_n' \, d\sigma'}{D(1, 1)} = \overline{W}_n + \text{const} \tag{78}$$

где $\overline{W}_n$ есть значения W_n при $a = 1$. Если удастся найти $\bar{\zeta}_n$, то $\zeta_n = \zeta_n(a, \theta, \psi)$ получится из уравнения (77).

Уравнения вида (78) были исследованы Ляпуновым еще в первой части его работы *О фигурах равновесия* ...[35].

При решении этого уравнения существенно знать, какие из величин $T_{n,s}$ обращаются в нуль для эллипсоида E. Ляпунов предполагает, что E не есть эллипсоид бифуркации, и тем самым, если E есть эллипсоид Маклорена, то только $T_{1,0}$ обращается в нуль. Если же E есть эллипсоид Якоби, то, кроме того, и $T_{2,3}$ равно нулю. Вводя обычные сферические функции

$$Y_{n,s}(\theta, \psi) = E_{n,s}(\mu) E_{n,s}(\nu) \qquad \text{при } q < 1$$

$$\left.\begin{aligned} Y_{n,2l}(\theta, \psi) &= P_{n,l}(\cos\theta)\cos l\psi \\ Y_{n,2l-1}(\theta, \psi) &= P_{n,l}(\cos\theta)\sin l\psi \end{aligned}\right\} \qquad \text{при } q = 1$$

можно написать условия разрешимости уравнения (78):

$$\int \overline{W}_n Y_{1,0}\, d\sigma = 0, \quad \int \overline{W}_n Y_{2,3}\, d\sigma = 0 \quad \text{при } q < 1; \quad \int \overline{W}_n Y_{1,0}\, d\sigma = 0 \quad \text{при } q = 1 \tag{79}$$

Эти условия выполняются сами собой в силу свойств функции W_n. Решение уравнения (78) имеет вид:

$$\bar{\zeta}_n = c_0 \cos\theta + c_1 \sin^2\theta \cos 2\psi + U_n \qquad \text{при } q < 1$$

$$\bar{\zeta}_n = c_0 \cos\theta + U_n \qquad \text{при } q = 1$$

где U_n удовлетворяет условиям (79) при замене в них W_n на U_n, а c_0 и c_1 — произвольные постоянные. Условие конечности ζ_n при $a = 0$ дает $c_0 = 0$. При определенном выборе осей x и y можно считать и $c_1 = 0$. Таким путем получаются определенные выражения для $\bar{\zeta}_n$ и $\zeta_n(a, \theta, \psi)$.

Далее при помощи анализа исключительной силы и применением разнообразных средств доказывается сходимость ряда (75) при $0 < a \leqslant 1$ для δ, достаточно близких к нулю, производится эффективное вычисление ζ_n и устанавливается, при некоторых предположениях относительно $\varphi(a)$, форма зависимости ζ_n от a, θ и ψ. В частности, если $g(a)$ полином от a^2 степени m, то $\zeta_n = Y_0 + Y_2 + \cdots + Y_{2mn+2n}$, где все Y_{2k} — сферические функции порядка $2k$ и полиномы от a^2 степени mn. Кроме того, $Y_{2n+2}, Y_{2n+4}, \ldots, Y_{2n+2mn}$ делятся соответственно на $a^2, a^4, \ldots, a^{2mn}$.

Затем изложенный метод применяется к случаю однородной жидкости. Этому же, как указано ранее, посвящен мемуар[37] 1916 года.

Дальнейшее развитие вопроса о фигурах равновесия вращающейся жидкости можно найти в работах Л. Лихтенштейна и его учеников[1].

[1] L. Lichtenstein. Gleichgewichtsfiguren rotierenden Flüssigkeiten. 1933.