1. УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОВЕСИЯ И ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

n°1. Наличие устойчивости изолированного положения равновесия в случае минимума потенциальной энергии (т. е. максимума функции сил) было известно еще Лагранжу. Строгое и простое доказательство этой теоремы было дано Дирихле. Результат этот связан с наличием интеграла полной энергии. Применяя эту теорему, Рауз установил критерии устойчивости для некоторых циклических систем. Кроме того, он дал простое обобщение теоремы Лагранжа, позволяющее судить об устойчивости по экстремумам известных интегралов. Этот прием решения вопроса об устойчивости применим в редких случаях.

Более широкое распространение получили приемы замены уравнений возмущенного движения линейными уравнениями, при этом члены выше первого измерения относительно обобщенных координат в уравнениях, характеризующих возмущенное движение, отбрасывались.

Такой прием «решения по первому приближению» может приводить к неверным результатам, и не было выяснено того, когда этот прием законен. Использование дальнейших членов дифференциальных уравнений не меняло существенно положения дела, ибо задача попрежнему принципиально оставалась «другой». Единственная попытка строгого решения вопроса устойчивости в некоторых частных случаях принадлежала Пункаре.

В работах Ляпунова рассмотрены дифференциальные уравнения возмущенного движения весьма общего вида. Со всей строгостью решен вопрос о том, в каких случаях рассмотрение линейных уравнений первого приближения дает полное решение задачи.

Рассмотрен ряд сомнительных случаев, когда первое приближение не дает ответа на вопрос об устойчивости. Установлено существование периодических решений для некоторых случаев нелинейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Ляпунов рассматривал и уравнения с переменными коэффициентами. Особенно подробно были им рассмотрены уравнения с периодическими коэффициентами. Для этого случая, как и для случя постоянных коэффициентов, он исследовал сомнительные случаи. Им впервые подробно исследован также и общий случай системы линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Ляпунов вводит новое понятие «характеристичного числа» любой функции $x(t)$, определенной для всех достаточно больших значений t. Это число характеризует поведение функции при больших t, причем за эталоны сравнения берутся функции e^{kt} при различных значениях постоянной k. Развив теорию характеристичных чисел и применив это понятие к решениям линейных систем с переменными коэффициентами, Ляпунов выделил класс так называемых «правильных систем» и подкласс «приводимых систем». Выделение этих классов линейных систем существенно между прочим при исследовании того, в каких случаях законен прием решения задачи устойчивости «по первому приближению».

Ляпунов впервые доказал теорему, обратную теореме Лагранжа—Дирихле, а именно теорему о том, что если в положении равновесия потенциальная энергия не минимальна, то при некоторых дополнительных условиях положение равновесия неустойчиво.

Решение вопроса об устойчивости в случае линейных систем связано с вопросом о характеристичных числах решений этой системы. Алгорифмическое решение этого вопроса для линейных систем с переменными коэффициентами представляет большие трудности. Ляпунов дал ряд глубоких исследований по этой задаче для линейных уравнений с периодическими коэффициентами.

Первый метод, применяемый Ляпуновым при исследовании устойчивости, основан на интегрировании уравнений движения при помощи рядов специального вида, расположенных по степеням произвольных постоянных.

Широкую известность и применение получил второй метод Ляпунова.

Теорема Лагранжа—Дирихле использует при решении вопроса об устойчивости интеграл системы дифференциальных уравнений движения, т. е. такую функцию обобщенных координат и времени, которая сохраняет постоянное значение с течением времени для всякого движения, или, иначе говоря, такую функцию, полная производная которой по времени равна нулю в силу дифференциальных уравнений движения. В теореме Лагранжа—Дирихле такую роль играет интеграл энергии. Если считать полную энергию равной нулю в положении равновесия, то, при условии минимума потенциальной энергии в положении равновесия, полная энергия будет положительной вблизи положения равновесия. Этот факт совместно с законом сохранения полной энергии и гарантирует устойчивость в теореме Лагранжа—Дирихле.

Ляпунов показал, что критерием устойчивости и неустойчивости может быть функция V обобщенных координат и времени, и не являющаяся интегралом. Важна лишь некоторая закономерность знаков самой функции V (ее называют теперь функцией Ляпунова) и ее полной производной по времени, причем при вычислении последней производные от обобщенных координат по времени заменяются их выражениями из дифференциальных уравнений движения. В основных чертах в этом и заключается второй метод Ляпунова.

Построение упомянутой выше функции V и является центральным пунктом в работе Ляпунова при решении вопросов устойчивости в различных случаях. Ниже более подробно излагаются общие теоремы, в которых заключается второй метод. и методы построения функции V.

Первой работой в рассматриваемом цикле работ является работа *О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости*[6] (1888) и последней работа *Об одном ряде в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами*[30] (1902).

Основные результаты приведены в знаменитой докторской диссертации *Общая задача об устойчивости движения*[8] (1892). Поэтому ниже прежде всего приводится подробное содержание именно этой работы.

n°2. Пусть $Q_k (k=1, \ldots, n)$ — некоторые функции обобщенных координат, определяющих некоторую механическую систему, их производных по времени и самого времени. Обозначим через x_k разность значений функций Q_k в любом возмущенном движении и в некотором определенном невозмущенном движении, для которого исследуется устойчивость по отношению к величинам Q_k. Таким путем задача устойчивости сводится к исследованию устойчивости нулевого решения

$$x_1 = \ldots = x_n = 0 \tag{1}$$

системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{2}$$

Считается, что X_s представимы степенными рядами

$$X_s = \sum P_s^{(m_1, \ldots, m_n)} x_1^{m_1}, \ldots, x_n^{m_n}$$

по целым неотрицательным степеням $x_1, \ldots, x_n$, причем $m_1 + \cdots + m_n \geqslant 2$. Коэффициенты этих разложений, так же как и коэффициенты p_{sk}, суть вещественные, непрерывные и ограниченные функции t при $t \geqslant t_0$ и имеет место при $t \geqslant t_0$ оценка

$$|P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}| \leqslant \frac{M}{A^{m_1 + \cdots + m_n}}$$

где M и A — постоянные, так что написанные ряды абсолютно сходятся при $t \geqslant t_0$, если только $|x_k| < A$.

В основу Ляпунов ставит следующее определение устойчивости невозмущенного движения. Для любого заданного положительного числа ε существует такое положительное число η, что если вещественные начальные значения $x_k^{(0)}$ при $t = t_0$ величин x_k, определяемых системой (2), удовлетворяют неравенствам $|x_k^{(0)}| \leqslant \eta$, то при всяком $t > t_0$ имеют место неравенства $|x_k| \leqslant \varepsilon$ $(k=1, \ldots, n)$. Если для какого-либо положительного ε такого числа η нет, то имеет место неустойчивость невозмущенного движения.

Таким образом, «устойчивость по Ляпунову» есть устойчивость по отношению к возмущениям начальных данных на бесконечном промежутке времени. За начальное значение $t = t_0$ времени можно брать любое достаточно большое значение t. Ляпунов вводит еще понятие условной устойчивости, подчиняя начальные данные $x_k^{(0)}$ некоторым соотношениям. В дальнейшем будет говориться только о безусловной устойчивости и рассматриваться вещественные решения системы (2), удовлетворяющие условию $|x_k| < A$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Укажем определение характеристического числа любой функции $x(t)$, определенной при $t \geqslant t_0$, причем будем считать эту функцию непрерывной (что несущественно); функция $x(t)$ может принимать и комплексные значения. Вещественное число λ называется характеристичным числом функции $x(t)$, если при любом положительном α произведение $x(t)\,e^{(\lambda-\alpha)t}\to 0$ при $t\to+\infty$, а произведение $x(t)\,e^{(\lambda+\alpha)t}$ есть неограниченная по модулю функция при $t\to\infty$.

Если $x(t)\,e^{\mu t}\to 0$ при $t\to+\infty$ при любом выборе вещественного числа μ, то характеристичное число функции $x(t)$ считается равным $+\infty$, а если $x(t)\,e^{\mu t}$ при любом выборе μ есть неограниченная по модулю функция при $t\to\infty$, то характеристичное число $x(t)$ считается равным $-\infty$. Таким образом, любая функция $x(t)$ с указанными выше свойствами имеет определенное характеристичное число.

Дается ряд теорем о характеристичных числах суммы, произведения и частного функций и интеграла от функции. Оказывается, что если $x(t)$ не обращается в нуль, то сумма характеристичных чисел $x(t)$ и $x^{-1}(t)$ не больше нуля.

Характеристичным числом нескольких функций $x_k(t)$ $(k=1,\ldots,n)$ называется наименьшее из характеристичных чисел отдельных функций $x_k(t)$.

Напишем систему первого приближения

$$\frac{dx_1}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{3}$$

Доказывается, что всякое решение этой системы $x_1(t),\ldots,x_n(t)$, отличное от нулевого, имеет конечное характеристичное число. Если имеется n линейно независимых решений системы (3) $x_1^{(p)},\ldots,x_n^{(p)}$ $(p=1,\ldots,n)$, то каждому такому решению соответствует свое характеристичное число λ_p. Можно подобрать эти независимые решения так, чтобы сумма $\lambda_1+\cdots+\lambda_n$ была наибольшей.

В каждой такой «нормальной системе решений» набор характеристичных чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ будет одним и тем же. При этом числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ называются характеристичными числами системы (3).

Для суммы $S=\lambda_1+\ldots+\lambda_n$ легко доказывается неравенство $S\geqslant-\mu$, где μ — характеристичное число функции

$$e^{-\int(p_{11}+\cdots+p_{nn})\,dt}$$

Если $S=-\mu$, то система (3) называется *правильной*.

Частным случаем правильных систем являются *приводимые* системы. Укажем их определение. Пусть имеется линейное преобразование

$$z_k=q_{k1}x_1+\ldots+q_{kn}x_n \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{4}$$

причем коэффициенты этого преобразования $q_{ki}(t)$ обладают следующими свойствами: все коэффициенты $q_{ki}(t)$ и их производные по t суть непрерывные и ограниченные функции при $t\geqslant t_0$, и величина, обратная определителю, составленному из $q_{ki}(t)$, есть также ограниченная функция t. Система (3) называется приводимой, если ее можно привести к системе с постоянными коэффициентами для z_k при помощи преобразования указанного типа.

В дальнейшем Ляпунов показывает, что если система (3) приводима, то коэффициенты q_{ki} в линейном преобразовании, приводящем ее к системе с постоянными коэффициентами, можно выбирать вещественными.

Полученная система с постоянными коэффициентами имеет те же характеристичные числа, что и приводимая система (3).

Пользуясь указанными понятиями и определениями, перечислим результаты Ляпунова, касающиеся решения вопроса об устойчивости по первому приближению.

Теорема 1. Если система (3) правильная и у любого ее решения характеристичное число положительно, то для системы (2) имеет место устойчивость.

Теорема 2. Если система (3) приводимая и среди ее решений есть решения с отрицательным характеристичным числом, то для системы (2) имеет место неустойчивость.

При условии теоремы 1 доказывается также, что если начальные значения $x_k^{(0)}$ решения $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы (2) достаточно близки к нулю, то функция $x_k(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$, или, как пишет Ляпунов, всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему приближается.

Опишем теперь два основных метода, которые были созданы Ляпуновым и применены в его работе. Первый состоит в построении решений системы (2) в форме рядов специального вида.

Предполагая, что система (3) первого приближения правильная, из ее характеристичных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ выбираются какие-нибудь l чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$, причем считается, что все эти выбранные числа положительны. Доказывается, что можно построить решения уравнений (1) в форме следующих рядов:

$$x_k = \sum L_k^{(m_1, \ldots, m_l)} \alpha_1^{m_1} \ldots \alpha_l^{m_l} e^{-(m_1\lambda_1 + \ldots + m_l\lambda_l)t} \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ — произвольные постоянные, $L_k^{(m_1, \ldots, m_l)}$ не зависящие от α непрерывные функции t, характеристичные числа которых неотрицательны, и суммирование распространяется на все целые неотрицательные значения $m_1, \ldots, m_l$, такие, что $m_1 + \ldots + m_l > 0$. Доказывается, что если произвольные постоянные α_s по абсолютной величине достаточно близки к нулю, то ряды (5) абсолютно сходятся при $t \geqslant t_0$ и дают решения системы (2).

Если все характеристичные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ положительны, то можно взять $l = n$, и легко получается формулированная выше теорема об устойчивости.

Переходим теперь к изложению основ знаменитого второго метода Ляпунова. Этот метод применяется как при доказательстве указанных выше теорем о решении вопроса устойчивости по первому приближению, так и при рассмотрении сомнительных случаев, когда первое приближение не решает вопроса об устойчивости.

Предварительно приведем некоторые новые определения. В дальнейшем будут рассматриваться вещественные функции V вещественных переменных t и x_k $(k=1, \ldots, n)$, однозначные и непрерывные при значениях переменных, подчиненных неравенствам вида

$$t \geqslant T, \qquad |x_s| \leqslant H \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{6}$$

где T и H — некоторые вещественные постоянные ($H>0$). Кроме того, в дальнейшем считается всегда, что $V=0$ при $x_1=\ldots=x_n=0$ и любом $t \geqslant T$. Функция V называется *знакопостоянной*, если при некотором выборе T и H в условиях (6) она сохраняет постоянный знак. Желая указать на этот знак, говорят, что V положительна или отрицательна. Если знакопостоянная функция V не зависит от t и при подходящем выборе H обращается в нуль только при $x_1=\ldots=x_n=0$, то такая функция называется *знакоопределенной* — определенно положительной или определенно отрицательной. Если V зависит от t и можно найти такую определенно положительную функцию W (не зависящую тем самым от t), что разность $V-W$ есть положительная функция, то функция V (зависящая от t) называется определенно положительной. Если же указанным выбором W можно выражение $-V-W$ сделать положительным, то V называется определенно отрицательной функцией.

Всякая функция V, которая при некотором выборе T и H в условиях (6) остается ограниченной по абсолютной величине, называется ограниченной. Если V не зависит от t, то ограниченность V есть следствие ее непрерывности.

Вводится еще одно определение. Выражение «функция V допускает бесконечно малый высший предел» равносильно следующему: при любом заданном положительном ε можно выбрать T и H в условиях (6) так, что при выполнении этих условий $|V| \leqslant \varepsilon$.

Если x_s являются решением системы (2), то можно выразить полную производную от V по t через переменные t и x_k $(k=1, \ldots, n)$:

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x_1} Y_1 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_n} Y_n + \frac{\partial V}{\partial t} \tag{7}$$

где через Y_s обозначена вся правая часть s-го уравнения системы (2). В дальнейшем функция V считается такой, что и функция V', определенная формулой (7), однозначна и непрерывна при некотором выборе T и H в условиях (6).

Кроме того, очевидно, что $V'=0$ при $x_1=\ldots=x_n=0$. В дальнейшем полная производная по времени V' называется просто производной от V. После этих определений приведем три теоремы Ляпунова, лежащие в основе его второго метода.

Теорема 1. Если система (2) такова, что существует знакоопределенная функция V, производная которой V' или знакопостоянная функция противоположного знака с V или тождественно равна нулю, то невозмущенное движение устойчиво.

Теорема 2. Если система (2) такова, что существует функция V со знакоопределенной производной V', допускающая бесконечно малый высший предел и такая, что при всяком t, большем некоторой величины, надлежащим выбором величин x_s, сколь угодно близких нулю, ее можно сделать одинакового знака с V', то невозмущенное движение неустойчиво.

Теорема 3. Если система (2) такова, что существует органиченная функция V, производная которой приводится к виду $V' = \lambda V + W$, где λ — положительная постоянная, а W или тождественно равна нулю или представляет некоторую знакопостоянную функцию, и если в последнем случае при всяком t, большем некоторой величины, надлежащим выбором величин x_k, сколь угодно близких к нулю, можно сделать V одного знака с W, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если к условиям теоремы 1 добавить еще предположения, что V допускает бесконечно малый высший предел и что V' знакоопределенна, то можно утверждать, как доказывает Ляпунов, что всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему приближается.

Из изложенного ясно, что второй метод Ляпунова не связан с интегрированием системы (2). Как указывалось, центральным во втором методе является построение функции V; оно осуществляется путем нахождения специальных решений некоторых линейных уравнений с частными производными. В дальнейшем будут даны примеры построения функции V.

Если в n-мерном пространстве $(x_1, \ldots, x_n)$ построить семейство поверхностей $V = \text{const}$, то производные $\partial V / \partial x_k$ пропорциональны, как известно, направляющим косинусам нормали к указанным поверхностям, причем нормаль идет в направлении возрастания V. С другой стороны, Y_k, равные dx_k / dt, пропорциональны направляющим косинусам касательной к интегральной линии системы (2) в соответствующей точке n-мерного пространства, причем эта касательная направлена туда, куда движется точка $(x_1, \ldots, x_n)$ при возрастании t. Если правые части уравнений системы (2) не зависят от t и функцию V также считать не зависящей от t, то легко понять на основании сказанного выше геометрический смысл условий в указанных выше теоремах второго метода, как это мы и покажем ниже.

Таково в общих чертах содержание первой главы докторской диссертации Ляпунова. Отметим только, что критерий неустойчивости по первому приближению доказывается во второй главе.

n°3. Вторая глава *Общей задачи устойчивости движения* посвящена подробному исследованию установившихся движений, т. е. тех случаев, когда коэффициенты p_{si} и $P_s^{(m_1, \ldots, m_n)}$ суть постоянные, т. е. не зависят от t. В этом случае система (3) имеет определяющее уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11} - k & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - k & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

и характеристичные числа первого приближения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, о которых говорилось выше, равны вещественным частям корней уравнения (8), взятым с обратным знаком. Таким образом, если вещественные части всех корней уравнения (8) отрицательны, то невозмущенное движение устойчиво и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически стремится к нему. Если же среди корней уравнения (8) имеется хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво.

Приведем схему доказательства устойчивости на основе второго метода. Если вещественные части всех корней уравнения (8) отрицательны, то доказывается, что уравнение с частными производными

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n) \frac{\partial V}{\partial x_s} = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \tag{9}$$

имеет решением определенно отрицательную квадратичную форму $V(x_1, \ldots, x_n)$. Ее производная, в силу (9), имеет выражение

$$V' = x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \sum_{s=1}^{n} X_s \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

Принимая во внимание, что слагаемые под знаком суммы имеют порядок выше второго, можем утверждать, что V' — определенно положительная функция и формулированная выше первая теорема приводит к заключению об устойчивости невозмущенного движения.

В данном случае поверхности $V = C$, при C близких нулю, суть замкнутые поверхности, содержащие точку $x_1 = \cdots = x_n = 0$ внутри себя. Нормаль к этим поверхностям, определяемая частными производными $\partial V / \partial x_s$, направлена внутрь этих поверхностей, и, в силу положительности V', касательные к траекториям системы (2), направленные по возрастанию t, образуют острый угол с упомянутыми нормалями вблизи начала $x_1 = \cdots = x_n = 0$, т. е. траектории проникают внутрь упомянутых выше поверхностей, что и приводит, естественно, к устойчивости.

n°4. Из сказанного выше следует, что первое приближение не дает ответа на вопрос о безусловной устойчивости, если среди корней уравнения (8) нет корней с положительными вещественными частями, но есть корни, равные нулю или чисто мнимые.

Такие случаи, особенно второй из них, являются существенно важными в приложениях к вопросам механики. Большая часть второй главы посвящена исследованию двух сомнительных с точки зрения первого приближения случаев.

Первым случаем является тот, когда уравнение (8) имеет один корень, равный нулю, а вещественные части остальных корней отрицательны. Вторым тот случай, когда уравнение (8) допускает два сопряженных чисто мнимых корня $\pm \lambda i$, а вещественные части остальных корней отрицательны.

Изложим сначала результаты, относящиеся к первому случаю.

При этом уравнения первого приближения имеют линейный интеграл. Если принять этот интеграл за одну из переменных, то получится система возмущенного движения вида

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dx_s}{dt} = p_s x + p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

причем число зависимых переменных принимается равным не n, как раньше, а $n+1$. В этих уравнениях X и X_s — голоморфные функции переменных $x, x_1, \ldots, x_n$, т. е. степенные ряды по целым неотрицательным степеням этих переменных, сходящиеся при всех значениях этих переменных, модули которых достаточно близки к нулю. Кроме того, разложения голоморфных функций X и X_s имеют вещественные коэффициенты и начинаются с членов не ниже второго порядка. Далее p_{si} и p_s — вещественные постоянные, и уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями. Пусть $X^{(0)}$ и $X_s^{(0)}$ — совокупность тех членов в разложениях X и X_s, которые зависят только от x. Дальнейшее преобразование системы (10) имеет целью добиться того, чтобы все p_s были равны нулю и чтобы при $X^{(0)}$, не равном тождественно нулю, наименьшая степень x в разложении $X^{(0)}$ была не выше наименьшей степени x в разложениях $X_s^{(0)}$, или чтобы $X^{(0)}$ и все $X_s^{(0)}$ отсутствовали.

Если система (10) не удовлетворяет этим требованиям, то пишем n уравнений

$$p_s x + p_{s1} x_1 + \cdots + p_{sn} x_n + X_s = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

из которых $x_1, \ldots, x_n$ определяется как функция x:

$$x_k = u_k(x) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

где $u_k(x)$ — голоморфные функции x. Вводя вместо x_k новые переменные $z_k = x_k - u_k(x)$, придем для z_k к системе, которая удовлетворяет поставленным выше требованиям. При этом задача об устойчивости по отношению к новым переменным z_k равносильна задаче об устойчивости по отношению к старым переменным x_k.

Таким образом, можно считать, что система имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = X, \qquad \frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s \quad (s = 1, \ldots, n) \qquad (11)$$

где p_{si} — вещественные постоянные, причем соответствующее им определяющее уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями, а X и X_s — степенные ряды с вещественными коэффициентами относительно $x, x_1, \ldots, x_n$, разложения которых начинаются с членов не ниже второго порядка, и наименьшая степень членов, содержащих одну переменную x в разложении X не больше степени аналогичных членов в разложениях X_s. Если же разложение X не содержит членов, зависящих только от x, то таких членов нет и в разложениях X_s. Положим сначала, что X содержит члены, зависящие только от x, и пусть gx^m есть тот из этих членов, который имеет наименьшую степень. Первая и вторая теоремы второго метода, при соответствующем построении функции V, показывают, что если m число четное или m нечетно и $g > 0$, то невозмущенно движение неустойчиво. Если же m нечетно и $g < 0$, то невозмущенное движение устойчиво и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему стремится.

Остается рассмотреть тот случай, когда X и X_s не содержат членов, не зависящих от $x_1, \ldots, x_n$, т. е. когда X и X_s обращаются в нуль при $x_1 = \ldots = x_n = 0$. В этом случае система (11) имеет очевидное решение $x = C$, $x_1 = \cdots = x_n = 0$, и доказывается, что эта система имеет интеграл вида

$$x = C + f(x_1, \ldots, x_n, C) \tag{12}$$

где C — произвольная постоянная, $f(x_1, \ldots, x_n, C)$ — голоморфная функция своих аргументов, причем $f(x_1, \ldots, x_n, C) = 0$ при $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Наличие интеграла (12) есть следствие следующей теоремы Ляпунова:

Теорема. Пусть дана система уравнений с частными производными

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + X_s) \frac{\partial z_j}{\partial x_s} = q_{j1}z_1 + \cdots + q_{jm}z_m + Z_j \tag{13}$$

$$(j = 1, \ldots, m)$$

где $X_1, \ldots, X_n, Z_1, \ldots, Z_m$ — голоморфные функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, $z_1, \ldots, z_m$, обращающиеся в нуль, когда все эти переменные равны нулю; кроме того, X_s не содержит членов ниже второго порядка, а члены первого порядка в разложениях Z_j (если они есть) не содержат $z_1, \ldots, z_m$. Коэффициенты p_{si} и q_{ji} суть некоторые постоянные.

Пусть далее $k_1, \ldots, k_n$ и $l_1, \ldots, l_m$ — корни уравнений

$$\begin{vmatrix} p_{11}-k & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}-k & \ldots & p_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn}-k \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} q_{11}-l & q_{12} & \ldots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22}-l & \ldots & q_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{m1} & q_{m2} & \ldots & q_{mm}-l \end{vmatrix} = 0$$

При этом, если вещественные части всех k_s отличны от нуля и одного знака и если между величинами k_s и l_j не существует соотношений вида

$$t_1^{(j)}k_1 + \cdots + t_n^{(j)}k_n = l_j \quad (j = 1, \ldots, m)$$

где $t_1^{(j)}, \ldots, t_n^{(j)}$ — целые неотрицательные числа, сумма которых положительна, то имеется одна определенная система голоморфных функций $z_1, \ldots, z_m$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющих уравнениям (13) и обращающихся в нуль при $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

Пользуясь интегралом (12), можно исключить первое из уравнений системы (11), а в остальных заменить x его выражением (12).

После этого приложение первой теоремы из второго метода для определенным образом построенной функции V покажет, что в рассматриваемом случае невозмущенное движение устойчиво и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет асимптотически приближаться к установившемуся движению

$$x = C, \qquad x_1 = \ldots = x_n = 0 \tag{14}$$

Эти установившиеся движения, при C близких нулю, также устойчивы. Указанная выше общая теорема и ее обобщения применяются Ляпуновым и в ряде других случаев.

n°5. Весьма сложным является исследование второго сомнительного случая, когда определяющее уравнение первого приближения имеет два чисто мнимых сопряженных корня $\pm \lambda i$ $(\lambda > 0)$ и вещественные части остальных корней отрицательны. Мы лишь в весьма общих чертах сможем изложить соответствующее исследование Ляпунова, в котором использован ряд чрезвычайно тонких аналитических средств.

При помощи некоторого простого преобразования переменных система (2), в которой для удобства число переменных обозначается через $n+2$, приводится к виду

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = -\lambda y + X, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda y + Y \\ &\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + \alpha_s x + \beta_s y + X_s \qquad (s=1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{15}$$

где X, Y, X_s — голоморфные функции x, y, $x_1, \ldots, x_n$, разложения которых имеют вещественные коэффициенты и начинаются с членов не ниже второго порядка.

Коэффициенты p_{si}, α_s, β_s вещественны, и определяющее уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями.

Заменяя переменные x и y новыми, можно далее добиться того, чтобы голоморфные функции X и Y обращались в нуль при $x=y=0$. Если это не так, то находятся голоморфные функции x и y переменных $x_1, \ldots, x_n$, удовлетворяющие уравнениям

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + \alpha_s x + \beta_s y + X_s) \frac{\partial x}{\partial x_s} = -\lambda y + X$$

$$\sum_{s=1}^{n} (p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + \alpha_s x + \beta_s y + X_s) \frac{\partial y}{\partial x_s} = \lambda x + Y$$

Применяя некоторое простое обобщение формулированной выше теоремы о системе (13), убеждаемся в том, что последняя система имеет голоморфное решение $x = u(x_1, \ldots, x_n)$, $y = v(x_1, \ldots, x_n)$.

Вводя вместо x и y новые переменные $x' = x - u$ и $y' = y - v$, можно удовлетворить указанному выше требованию относительно X и Y, причем вопрос об устойчивости в новых переменных равносилен вопросу об устойчивости в исходных переменных. Таким обрзэом, можно считать, что в уравнениях (15), кроме сказанного выше, соблюдено еще то условие, что X и Y обращаются в нуль при $x=y=0$.

Введением вместо x и y новых переменных $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, где $r \geqslant 0$, первые два уравнения приводятся к виду

$$\frac{dr}{dt} = X\cos\vartheta + Y\sin\vartheta, \qquad r\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda r + Y\cos\vartheta + X\sin\vartheta \tag{16}$$

причем, в силу сказанного выше, правые части этих уравнений обращаются в нуль при $r=0$. Второе из этих уравнений может быть представлено в виде

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \Theta \tag{17}$$

где Θ — голоморфная функция переменных r, $x_1, \ldots, x_n$, равная нулю при $r = x_1 = \cdots = x_n = 0$, и с коэффициентами, которые суть полиномы от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$. Отсюда видно, что если $|r|$ и $|x_s|$ достаточно малы, то ϑ есть возрастающая функция t. Если же во все время движения $|r|$ и $|x_s|$ достаточно малы, то $\vartheta \to +\infty$ при $t \to \infty$.

Таким образом, при решении вопроса устойчивости переменная t может быть заменена на ϑ и уравнения для r и x_s, как функций ϑ, будут

$$\frac{dr}{d\vartheta} = rR$$
$$\frac{dx_s}{d\vartheta} = q_{s1}x_1 + \ldots + q_{sn}x_n + (a_s \cos\vartheta + b_s \sin\vartheta)\, r + Q_s \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{18}$$

где $q_{si} = p_{si}/\lambda$, $a_s = \alpha_s/\lambda$, $b_s = \beta_s/\lambda$, а R и Q_s — голоморфные функции переменных r, $x_1, \ldots, x_n$, причем разложение R не содержит свободного числа, а разложения Q_s начинаются с членов не ниже второго порядка. Коэффициенты в разложениях R и Q_s представляют собой полиномы от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$. Коэффициенты q_{si}, a_s и b_s вещественны, и определяющее уравнение для коэффициентов q_{si} имеет все корни с отрицательными вещественными частями. Первоначальную задачу устойчивости можно рассматривать как задачу устойчивости для величин r, $x_1, \ldots, x_n$, причем переменная ϑ играет роль t.

Первое из уравнений системы (18) показывает, что если начальное значение r равно нулю, то r равно нулю при всех значениях ϑ. Если же начальное значение r отлично от нуля, то r будет сохранять знак своего начального значения, пока $|r|$ и $|x_s|$ достаточно малы. Принимая еще во внимание формулы (16), можно при решении вопроса об устойчивости для системы (18) считать, что $r \geqslant 0$.

Отметим еще, что разложения R и Q_s при r и x_s, достаточно близких к нулю, сходятся равномерно по отношению к ϑ при всех вещественных ϑ, если переменные r, x_s, $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$ и коэффициенты при $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$ заменить их абсолютными значениями. Вместо вещественных ϑ можно брать и комплексные $\vartheta = \alpha + \beta i$, где β достаточно близко к нулю.

Пусть $R^{(0)}$ и $Q_s^{(0)}$ — совокупность членов в разложениях R и Q_s, зависящих только от r. По аналогии с изложенным выше случаем надо подвергнуть систему (18) новому преобразованию с тем, чтобы в преобразованной системе все постоянные a_s и b_s были равны нулю и чтобы было выполнено следующее условие: если $R^{(0)}$ не равно тождественно нулю, то коэффициент при наинизшей степени r в разложении $R^{(0)}$ есть постоянная и наинизшая степень r в $R^{(0)}$ меньше наинизших степеней r в разложениях $Q_s^{(0)}$; если же $R^{(0)}$ тождественно равно нулю, то и все $Q_s^{(0)}$ тождественно равны нулю.

Преобразование системы (18) к такому виду связано с существованием периодических решений системы (18) с периодом 2π. Переходим к описанию упомянутого преобразования.

n°6. Строится формальное решение системы (18) следующего вида:

$$r = c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3 + \cdots$$
$$x_k = u_k^{(1)}c + u_k^{(2)}c^2 + u_k^{(3)}c^3 + \cdots \tag{19}$$

где c — произвольная постоянная, $u^{(l)}$ и $u_k^{(l)}$ — функции от ϑ. Эти ряды подставляются в систему (18) и сравниваются коэффициенты при одинаковых степенях c, что приводит к уравнениям для $u^{(l)}$ и $u_k^{(l)}$

$$\frac{du_k^{(1)}}{d\vartheta} = q_{k1}u_1^{(1)} + \cdots + q_{kn}u_n^{(1)} + a_k \cos\vartheta + b_k \sin\vartheta \tag{20}$$

$$\frac{du^{(l)}}{d\vartheta} = U^{(l)}$$

$$\frac{du_k^{(l)}}{d\vartheta} = q_{k1}u_1^{(l)} + \cdots + q_{kn}u_n^{(l)} + (a_k \cos\vartheta + b_k \sin\vartheta)\, u^{(l)} + U_k^{(l)} \tag{21}$$

$$(l = 2,\ 3,\ \ldots)$$

где $U^{(l)}$ и $U_k^{(l)}$ — полиномы от $u^{(i)}$, $u_k^{(i)}$ при $i < l$, у которых коэффициенты суть полиномы $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$.

Решения $u^{(l)}$ и $u_k^{(l)}$ этих систем ищутся в виде конечных сумм косинусов и синусов целых, кратных ϑ, коэффициенты при которых суть постоянные или полиномы от ϑ. В последнем случае функция $u^{(l)}$ или $u_k^{(l)}$ называется «вековой». Принимая во внимание, что вещественные части всех корней определяющего уравнения для коэффициентов q_{ki} отличны от нуля (отрицательны), можно утверждать, что $u_k^{(1)}$ имеют вид $A_k \cos\vartheta + B_k \sin\vartheta$, где A_k и B_k постоянные. Далее первое из уравнений системы (21) при $l = 2$ даст $u^{(2)}$ при помощи квадратуры, а дальнейшие уравнения системы (21) при $l = 2$ приведут к вполне определенным выражениям для $u_k^{(2)}$, которые, как и $u^{(2)}$, не будут вековыми ни при каком выборе постоянной при определении $u^{(2)}$ квадратурой.

Дальнейший процесс вычислений аналогичен, причем будут входить произвольные постоянные при определении $u^{(l)}$ из первого из уравнений (21) при помощи квадратуры. Функция $u^{(3)}$ может уже оказаться вековой. Но если $u^{(3)}$ не вековая функция, то такими же будут и $u_k^{(3)}$ и т. д. Возможны, таким образом, два случая.

В первом случае все функции $u^{(l)}$ и $u_k^{(l)}$ при $l < m$ оказались не вековыми, а функция $u^{(m)}$ оказалась вековой:

$$u^{(m)} = g\vartheta + v \tag{22}$$

где g — отличная от нуля постоянная и v — конечная сумма косинусов и синусов целых кратных ϑ с постоянными коэффициентами. Доказывается, что номер m и постоянная g не зависят от выбора произвольных постоянных, указанных выше, и что m есть число нечетное.

Во втором случае все $u^{(l)}$ и $u_k^{(l)}$ не вековые. Доказывается, что в этом случае ряды (19) сходятся при c, достаточно близком к нулю, если упомянутые выше произвольные постоянные определить, например, так, чтобы все $u^{(l)}$ обращались в нуль при $\vartheta = 0$. При этом эти ряды дают периодическое решение системы (18) с периодом 2π, зависящее от произвольной постоянной c.

Переходим к описанию преобразования системы (18). Начнем с первого случая, когда при вычислениях встретилась вековая функция (22).

Считая, что все предыдущие вычисления велись так, что $u^{(l)}$, $u_k^{(l)}$, v — вещественные функции ϑ, Ляпунов вводит вместо r, x_1, $\ldots$, x_n новые переменные z, z_1, $\ldots$, z_n по формулам

$$\begin{gathered} r = z + u^{(2)}z^2 + \cdots + u^{(m-1)}z^{m-1} + vz^m \\ x_k = u_k^{(1)}z + u_k^{(2)}z^2 + \cdots + u_k^{(m-1)}z^{m-1} + z_k \end{gathered} \tag{23}$$

Система (18) преобразуется к виду

$$\frac{dz}{d\vartheta}=zZ, \qquad \frac{dz_s}{d\vartheta}=q_{s1}z_1+\cdots+q_{sn}z_n+Z_s \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{24}$$

где Z и Z_s — функции $z,\ z_1,\ \ldots,\ z_n$, со свойствами, аналогичными тем, которые имели R и X_s по отношению к $r,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$.

Кроме того, будет иметь место следующее свойство разложений Z и Z_s. Разложение Z будет содержать член gz^{m-1}, а остальные члены в разложении Z и все члены в разложениях Z_s, не зависящие от $z_1,\ \ldots\ z_n$, будут иметь степень не ниже m.

Прежняя задача устойчивости равносильна задаче устойчивости относительно $z,\ z_1,\ \ldots,\ z_n$, причем можно считать, что $z\geqslant 0$.

Применение к системе (24) теоремы 1 и 2 второго метода показывает, что при $g>0$ невозмущенное движение неустойчиво, а при $g<0$ оно устойчиво и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему приближается.

Во втором случае, т. е. если ряды (19) дают периодическое решение системы (18), вместо преобразования (23) вводится преобразование

$$r=z+u^{(2)}z^2+u^{(3)}z^3+\ldots, \qquad x_s=z_s+u_s^{(1)}z+u_s^{(2)}z^2+\ldots \tag{25}$$

и в системе (24) переменные Z и Z_s обращаются в нуль при $z_1=\ldots=z_n=0$. В этом случае эта система допускает интеграл вида

$$z=c+f(z_1,\ \ldots,\ z_n,\ c,\vartheta) \tag{26}$$

где f — голоморфная функция величин $z_1,\ \ldots,\ z_n,\ c$, равная нулю как при $c=0$, так и при $z_1=\ldots=z_n=0$. В разложении f коэффициенты суть полиномы от $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$. В данном случае доказывается, что невозмущенное движение устойчиво. Всякое невозмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, будет асимптотически стремиться к одному из периодических движений, определяемых равенствами $z=c$, $z_1=\ldots=z_n=0$. Эти последние движения, если $|c|$ достаточно мало, устойчивы по отношению $z,\ z_1,\ \ldots,\ z_n$. Но эта устойчивость по отношению $z,\ z_1,\ \ldots,\ z_n$ для них не равносильна, вообще говоря, устойчивости по отношению $r,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$. Все эти результаты об устойчивости могут быть формулированы в терминах системы (15), что и было сделано Ляпуновым.

n° 7. Вернемся к системе (24) и будем считать, что она получена из системы (18) при помощи преобразования (23). Покажем, как применяется при этом второй метод доказательства устойчивости или неустойчивости сообразно знаку g. В рассматриваемом случае

$$zZ=gz^m+P^{(1)}z+\cdots+P^{(m-1)}z^{m-1}+U$$

где $P^{(i)}$ — линейные формы величин z_k с периодическими относительно ϑ коэффициентами и U — голоморфная функция z и z_k с такими же коэффициентами, не содержащая членов ниже третьего порядка. Разложение U в членах, линейных относительно z_k, содержит z в степенях не ниже m, а в членах, не зависящих от z_k, в степенях не ниже $m+1$.

Пусть далее при любом целом положительном l имеем

$$Z_s = P_s^{(1)}z + \cdots + P_s^{(l)}z^l + U_s^{(l)}$$

где $P_s^{(j)}$ — линейные формы z_k с периодическими коэффициентами и $U_s^{(l)}$ — голоморфные функции z и z_k, содержащие в членах, линейных относительно z_k, степени z выше l. Упомянутые периодические функции ϑ суть конечные суммы косинусов и синусов. Строится функция

$$V = z + W + U^{(1)}z + U^{(2)}z^2 + \cdots + U^{(m-1)}z^{m-1} \tag{27}$$

где W — квадратичная форма переменных z_k, определяемая уравнением

$$\sum_{s=1}^{n} (q_{s1}z_1 + \cdots + q_{sn}z_n) \frac{\partial W}{\partial z_s} = g\,(z_1^2 + \cdots + z_n^2)$$

и $U^{(j)}$ — линейные формы тех же переменных с коэффициентами — периодическими функциями ϑ. Эти формы определяются уравнениями

$$\sum_{s=1}^{n} (q_{s1}z_1 + \cdots + q_{sn}z_n) \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_s} + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \vartheta} + P^{(1)} = 0$$

$$\sum_{s=1}^{n} (q_{s1}z_1 + \cdots + q_{sn}z_n) \frac{\partial U^{(k)}}{\partial z_s} + \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \vartheta} + \\ + \sum_{s=1}^{n} \left(P_s^{(1)} \frac{\partial U^{(k-1)}}{\partial z_s} + \cdots + P_s^{(k-1)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_s} \right) + P^{(k)} = 0$$

$$(k = 2,\ 3,\ \ldots,\ m-1)$$

При этом производная функции (27) по ϑ имеет вид:

$$V' = g\,(z^m + z_1^2 + \cdots + z_n^2) + vz^m + \sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n} v_{s\sigma}z_s z_\sigma$$

где v и $v_{s\sigma}$ голоморфные функции z и z_k, равные нулю при $z = z_1 = \ldots = z_n = 0$ и с периодическими относительно ϑ коэффициентами. Отсюда в силу $z \geqslant 0$, что вытекает из $r \geqslant 0$, и следует, что при $g < 0$ к функции V будет применима теорема 1, а при $g > 0$ теорема 2 второго метода.

Применение второго метода к случаю, когда в уравнениях (24) Z и Z_s обращаются в нуль при $z_1 = \ldots = z_n = 0$, будет указано ниже.

n° 8. В этом последнем случае переход от системы (18) к системе (24) осуществляется при помощи преобразования (25) и ряды (19) дают при этом, как указывалось выше, периодическое решение системы (18). Тем самым получается и некоторое периодическое решение системы (15). Его можно построить непосредственно для этой системы, не переходя к новым переменным.

По уравнениям (17) определяется период T по отношению к t, соответствующий периоду 2π по отношению к ϑ:

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\lambda + \Theta} \tag{28}$$

Подстановка (19) в функцию Θ приводит к разложению

$$\frac{\lambda}{\lambda+\Theta}=1+\Theta_1 c+\Theta_2 c^2+\cdots$$

где Θ_j — конечные суммы синусов и косинусов, кратных ϑ.

Подстановка этого ряда в (28) дает

$$T=\frac{2\pi}{\lambda}(1+h_2c^2+h_3c^3+\cdots),\qquad h_m=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Theta_m\,d\vartheta\qquad (m=2,3,\ldots)\tag{29}$$

Далее из (17) получается

$$\vartheta+c\int\limits_0^{\vartheta}\Theta_1\,d\vartheta+c^2\int\limits_0^{\vartheta}\Theta_2\,d\vartheta+\cdots=\lambda(t-t_0)\tag{30}$$

где t_0 — произвольное начальное значение t. В левой части этого равенства будут содержаться члены, пропорциональные ϑ, и совокупность этих членов имеет вид $(1+h_2c^2+h_3c^3+\cdots)\vartheta$, так что уравнение (30) можно представить в виде

$$(1+h_2c^2+h_3c^3+\cdots)[\vartheta+c\Phi_1(\vartheta)+c^2\Phi_2(\vartheta)+\cdots]=\lambda(t-t_0)\tag{31}$$

где $\Phi_j(\vartheta)$ — конечные суммы синусов и косинусов кратных ϑ.

Доказывается далее, что из этого уравнения ϑ определяется в виде

$$\vartheta=\tau+\varphi_1c+\varphi_2c^2+\ldots\qquad\left(\tau=\frac{2\pi(t-t_0)}{T}\right)\tag{32}$$

где φ_m не зависят от c и суть конечные суммы косинусов и синусов кратных τ. Подстановка выражения (32) в уравнения

$$x=(c+u^{(2)}c^2+u^{(3)}c^3+\cdots)\cos\vartheta,\qquad y=(c+u^{(2)}c^2+u^{(3)}c^3+\cdots)\sin\vartheta$$
$$x_k=u_k^{(1)}c+u_k^{(2)}c^2+u_k^{(3)}c^3+\cdots\qquad (k=1,\ldots,n)\tag{33}$$

дает для x, y, x_k представление в виде степенных рядов по c:

$$x=x^{(1)}c+x^{(2)}c^2+\cdots,\qquad y=y^{(1)}c+y^{(2)}c^2+\cdots,$$
$$x_k=x_k^{(1)}c+x_k^{(2)}c^2+\cdots\qquad (k=1,\ldots n)\tag{34}$$

Эти ряды, при малом $|c|$, будут равномерно сходящимися для τ не только вещественных, но и комплексных с достаточно малой по модулю мнимой частью. Коэффициенты рядов (34) должны быть периодическими функциями τ с периодом 2π.

Для вычислений можно исходить непосредственно из системы (15). Определяется T рядом (29) с неопределенными коэффициентами h_m, в системе (15) вводится вместо t переменная τ по формуле (32) и постоянные h_m выбираются так, чтобы можно было удовлетворить системе (15) рядами (34) с периодическими по отношению τ коэффициентами. Подстановка рядов (34) в систему (15) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях c дает дифференциальные уравнения для коэффициентов рядов (34); при надлежащем выборе h_m в рассматриваемом случае коэффициенты рядов (34) получаются в виде конечных сумм синусов и косинусов, кратных τ. При этом сначала найдутся $x^{(m)}$, $y^{(m)}$, а затем все $x_k^{(m)}$ как определенные частные решения системы линейных неоднородных уравнений без резонанса.

Уравнениям для $x^{(1)}$ и $y^{(1)}$ можно удовлетворить, полагая $x^{(1)} = \cos\tau$ и $y^{(1)} = \sin\tau$. Пусть все функции $x^{(l)}$, $y^{(l)}$, $x_k^{(l)}$ при $l < m$ и все постоянные h_j при $j < m-1$ вычислены. Для определения $x^{(m)}$ и $y^{(m)}$ имеем

$$\frac{dx^{(m)}}{d\tau} = -y^{(m)} - h_{m-1}\sin\tau + X^{(m)}, \qquad \frac{dy^{(m)}}{d\tau} = x^m + h_{m-1}\cos\tau + Y^{(m)} \tag{35}$$

где $X^{(m)}$ и $Y^{(m)}$ — известные конечные суммы косинусов и синусов кратных τ, для которых приводим первые слагаемые

$$X^{(m)} = A_1\cos\tau + A_2\sin\tau + \cdots, \qquad Y^{(m)} = B_1\cos\tau + B_2\sin\tau + \cdots$$

Искомые функции $x^{(m)}$ и $y^{(m)}$ должны быть такого же вида:

$$x^{(m)} = a_1\cos\tau + a_2\sin\tau + \cdots, \qquad y^{(m)} = b_1\cos\tau + b_2\sin\tau + \cdots$$

Для постоянных a_1, a_2, b_1, b_2, h_{m-1} получаются уравнения

$$\begin{aligned} a_2 + b_1 &= A_1, & -a_1 + b_2 + h_{m-1} &= A_2 \\ -a_2 - b_1 &= B_2, & -a_1 + b_2 - h_{m-1} &= B_1 \end{aligned}$$

из которых следует условие разрешимости $A_1 + B_2 = 0$ и

$$h_{m-1} = \tfrac{1}{2}(A_2 - B_1), \qquad a_2 = A_1 - b_1, \qquad b_2 = \tfrac{1}{2}(A_2 + B_1) + a_1 \tag{36}$$

Все вычисления можно вести так, чтобы $x^{(m)}$ и $y^{(m)}$ $(m \geqslant 2)$ обращались в нуль при $\tau = 0$, откуда определяются a_1 и b_1.

Если бы существование рассматриваемых периодических решений было неизвестно, и приложение указанного процесса привело бы при некотором m к невыполнению условия $A_1 + B_2 = 0$, то число m и постоянная $g = \frac{1}{2}(A_1 + B_2)$ были бы теми же, что и выше, при решении вопроса устойчивости. Ляпунов отмечает еще, что приложимость указанного метода не требует, чтобы X и Y обращались в нуль при $x = y = 0$.

Далее вне зависимости от задачи устойчивости Ляпунов рассмотрел вопрос о существовании периодических решений систем уравнений при более общих предположениях.

Пусть имеется система (15). Предполагается, что X, Y, X_s — голоморфные функции x, y, x_1, $\ldots$, x_n, не содержащие членов ниже второго порядка, и что характеристическое уравнение (8) не имеет чисто мнимых корней вида $m\lambda i$, где m — целое число (включая нуль).

При помощи подстановки

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta, \qquad x_1 = rz_1, \ \ldots, \ x_n = rz_n$$

и при замене t на ϑ система (15) преобразуется к виду

$$\frac{dr}{d\vartheta} = R, \qquad \frac{dz_s}{d\vartheta} = q_{s1}z_1 + \cdots + q_{sn}z_n + \varphi_s r + Z_s \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{37}$$

где φ_s — квадратичные формы $\cos\vartheta$ и $\sin\vartheta$, а R и Z_s — голоморфные функции r, z_1, $\ldots$, z_n, не содержащие членов ниже второго порядка, с периодическими относительно ϑ коэффициентами. Решение системы (37) ищется в виде рядов (19). Если определение $u^{(l)}$ приводит всегда к периодическим относительно ϑ функциям, то доказывается сходимость этих рядов при малом $|c|$ в предположении, что $u^{(l)}$ равны нулю при $\vartheta=0$. Отсюда определяется периодическое решение системы (37), представляемое в виде рядов (19).

Далее доказывается, что если система (15) допускает интеграл вида

$$x^2+y^2+F(x_1, \ldots, x_n, x, y)=C$$

где F — голоморфная функция своих аргументов, не содержащая вовсе членов ниже второго порядка и не содержащая x и y в членах второго порядка, если таковые имеются, то возможно построение рядов (19) с периодическими относительно ϑ коэффициентами и, следовательно, существуют указанные выше периодические решения системы (37).

Из изложенного выше следует, что в рассматриваемом случае двух чисто мнимых корней определяющего уравнения первого приближения вопрос об устойчивости связан с построением рядов (19).

Если конечное число построениий дает вековую функцию $u^{(m)}$, то задача доведена до конца. Утверждать заранее, в общем случае, существование бесконечных рядов (19) с периодическими членами невозможно.

Ляпунов указывает некоторые частные случаи, когда можно доказать существование упомянутых периодических рядов решений.

В частности, вне связи с вопросами безусловной устойчивости Ляпунов рассматривает вопрос о существовании периодических решений канонической системы

$$\frac{dx_s}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_s}, \qquad \frac{dy_s}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x_s} \qquad (s=1, \ldots, n) \tag{38}$$

где H — голоморфная функция переменных x_k, y_k $(k=1,\ldots, n)$, причем совокупность членов с наименьшей степенью в разложении H представляет собой квадратичную форму упомянутых переменных.

Относительно системы (38) Ляпунов доказывает следующее: если определяющее уравнение, соответствующее линейным членам правых частей уравнений (38), имеет n пар чисто мнимых корней $\pm\lambda_1 i,\ldots, \pm\lambda_n i$ таких, что никакое отношение λ_p / λ_q $(p\neq q)$ не равно целому числу, то система (38) имеет n периодических решений, каждое из которых зависит от произвольного параметра.

Отметим, что это утверждение остается справедливым, если число пар чисто мнимых корней с указанным свойством равно m, где $m<n$. При этом число периодических решений будет равно m. Говоря о зависимости периодического решения от произвольного параметра, мы подразумеваем существенный произвольный параметр, отличный от той произвольной постоянной, которая может входить в любое решение системы в качестве слагаемого к t, поскольку правые части уравнений в рассматриваемом случае установившегося движения не содержат t.

Решение вопроса устойчивости в случае двух чисто мнимых корней у определяющего уравнения первого приближения и построение периодических решений указанных выше систем уравнений представляют собой одно из замечательнейших достижений математического анализа.

До настоящего времени ничего существенного не добавлено к тому, что было сделано Ляпуновым в этом отношении.

n°9. В последней третьей главе *Общей задачи устойчивости движения* исследуется тот случай, когда все коэффициенты в правых частях системы (2) возмущенного движения — периодические функции одного и того же периода ω. Сначала рассматриваются линейные системы (3) с периодическими коэффициентами.

Если функции $x_{1k}(t), \ldots, x_{nk}(t)$ $(k=1,\ldots,n)$ суть n линейно независимых решений системы (3), то функции $x_{1k}(t+\omega), \ldots, x_{nk}(t+\omega)$ также являются решениями системы, и поэтому линейно выражаются через решения $x_{1k}(t), \ldots, x_{nk}(t)$

$$x_{ik}(t+\omega) = a_{1k}x_{i1}(t) + \cdots + a_{nk}x_{in}(t) \qquad (i=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,n) \tag{39}$$

Уравнение степени n относительно ρ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}-\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{40}$$

называется характеристическим уравнением системы (3) относительно периода ω. Оно не зависит от выбора системы независимых решений $x_{1k}(t), \ldots, x_{nk}(t)$ $(k=1,\ldots,n)$. Всякому корню ρ уравнения (40) соответствует решение системы (3) вида

$$x_1 = f_1(t)\rho^{t/\omega}, \ldots, x_n = f_n(t)\rho^{t/\omega} \tag{41}$$

где $f_k(t)$ — периодические функции. (Здесь и в дальнейшем для периодических функций t подразумевается, что они имеют период ω.)

Кратному корню ρ, кроме решения вида (41) с периодическими функциями $f_k(t)$, могут соответствовать решения тоже вида (41), в которых $f_k(t)$ определяются формулами

$$f_k(t) = \varphi_{k0}(t) + t\varphi_{k1}(t) + \ldots + t^m\varphi_{km}(t) \tag{42}$$

где $\varphi_{ks}(t)$ — периодические функции. Всякому корню ρ кратности l соответствуют l линейно независимых решений вида (41), в которых $f_k(t)$ — периодические функции или определяются формулами (42), где $\varphi_{ks}(t)$ — периодические функции.

Если $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — корни уравнения (40), то, определяя числа $k_s = \omega^{-1}\log\rho_s$, где берется какое-нибудь значение логарифмов, можно утверждать, что вещественные части величин $-k_1, -k_2, \ldots, -k_n$ суть характеристичные числа системы (3).

Это непосредственно вытекает из (41) и того, что $\rho^{t/\omega} = e^{(t/\omega)\log\rho}$

Прежде всего Ляпунов доказывает, что система (3) в том случае, если коэффициенты $p_{sk}(t)$ имеют непрерывные производные, приводима и что коэффициенты $q_{ks}(t)$ в линейном преобразовании (4), приводящем систему (3) к системе с постоянными коэффициентами, можно всегда выбрать вещественными функциями с периодом ω или 2ω. Случай периода ω всегда возможен, если уравнение (40) не имеет отрицательных корней.

n° 10. Далее большой раздел третьей главы посвящен приближенному построению характеристического уравнения и его исследованию.

Приближенное построение Ляпунов основывает на следующем: если коэффициенты $p_{is}(t)$ системы (3) суть голоморфные функции некоторых параметров, то и коэффициенты уравнения (40), представленного в виде

$$\rho^n + A_1\rho^{n-1} + \ldots + A_{n-1}\rho + A_n = 0 \tag{43}$$

также голоморфные функции упомянутых параметров.

Таким образом, можно искать коэффициенты A_s в виде степенных рядов по указанным параметрам. Это позволяет приближенно вычислять A_s и решать некоторые вопросы о характеристическом уравнении (43).

Подробно рассматривается уравнение вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0 \tag{44}$$

где $p(t)$ — вещественная периодическая функция периода ω; это уравнение равносильно системе

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dx'}{dt} = -p(t)\,x$$

и соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0 \tag{45}$$

Уравнение (44) заменяется уравнением с параметром

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon p(t)\,x \tag{46}$$

причем уравнению (44) соответствует, очевидно, $\varepsilon = -1$.

Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — частные решения (46), удовлетворяющие начальным условиям $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$, то

$$\varphi(t) = 1 + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon^2\varphi_2(t)\ldots, \qquad \psi(t) = t + \varepsilon\psi_1(t) + \varepsilon^2\psi_2(t) + \ldots$$

где

$$\varphi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p(t)\,\varphi_{n-1}(t)\,dt, \quad \psi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p(t)\,\psi_{n-1}(t)\,dt \qquad \begin{pmatrix}\varphi_0(t) = 1\\ \psi_0(t) = t\end{pmatrix}$$

Коэффициент A в характеристическом уравнении (45) для дифференциального уравнения (46) выражается формулой

$$A = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(\omega) + \psi'_n(\omega)]\,\varepsilon^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\varepsilon^n \tag{47}$$

Из этих формул вытекают, между прочим, следующие две теоремы.

Теорема 1. Если $p(t) \leqslant 0$ (функция $p(t)$ не тождественно равна нулю), то характеристическое уравнение (45), соответствующее уравнению (44), имеет вещественные положительные корни, из которых один больше, а другой меньше единицы ($A^2 > 1$).

Теорема 2. Если $p(t) \geqslant 0$ (функция $p(t)$ не тождественно равна нулю) и выполнено неравенство

$$\omega \int\limits_0^\omega p(t)\,dt \leqslant 4 \tag{48}$$

то характеристическое уравнение (45), соответствующее уравнению (44), имеет мнимые сопряженные корни, по модулю равные единице ($A^2 < 1$).

Отметим еще, что $A_n \geqslant 0$ при $p(t) \geqslant 0$.

Далее Ляпунов строит пример уравнения (44) с положительным коэффициентом $p(t)$, для которого уравнение (45) имеет вещественные корни, из которых один по абсолютной величине больше единицы, а другой меньше единицы. Отметим, что если корни уравнения (45) мнимые сопряженные (оба по модулю равные единице), то в силу формул (41) общий интеграл уравнения (44) есть ограниченная функция t.

Если же корни уравнения (45) вещественны и различны, то уравнение имеет решения, которые не являются ограниченными функциями t.

n°11. Ляпунов рассмотрел также каноническую систему (38) линейных уравнений с периодическими коэффициентами и доказал, что соответствующее характеристическое уравнение есть возвратное уравнение, так что корни этого уравнения распадаются на пары таких, произведение которых равно единице. Кроме того, он рассмотрел систему вида

$$\frac{d^2x_s}{dt^2} = p_{s1}(t)\,x_1 + p_{s2}(t)\,x_2 + \ldots + p_{sn}(t)\,x_n \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

в предположении, что уравнение относительно μ

$$\begin{vmatrix} 2(p_{11} - \mu) & p_{12} + p_{21} \ldots & p_{1n} + p_{n1} \\ p_{21} + p_{12} & 2(p_{22} - \mu) \ldots & p_{2n} + p_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} + p_{1n} & p_{n2} + p_{2n} \ldots & 2(p_{nn} - \mu) \end{vmatrix} = 0 \tag{49}$$

имеющее, как известно, только вещественные корни, не имеет ни при каком t отрицательных корней, и что наименьший корень $\mu(t)$ уравнения (49) не равен тождественно нулю. Ляпунов доказывает, что при этих предположениях характеристическое уравнение, соответствующее указанной системе, имеет n корней с модулями, большими единицы, и n корней с модулями, меньшими единицы.

n°12. После исследования характеристического уравнения линейной системы с периодическими коэффициентами Ляпунов переходит к исследованию общей системы (2) уравнений возмущенного движения. Факт приводимости системы первого приближения приводит, на основе общих теорем первой главы, к тем случаям, когда первое приближение решает вопрос об устойчивости. Ели характеристическое уравнение (40) линейной системы первого приближения имеет все корни с модулем, меньшим единицы, то невозмущенное движение устойчиво и всякое возмущенное движение, достаточно бизкое к невозмущенному, асимптотически к нему стремится при $t \to +\infty$. Если же упомянутое характеристическое уравнение имеет хоть один корень с модулем, большим единицы, то невозмущенное движение не обладает безусловной устойчивостью.

Сомнительными в отношении суждения об устойчивости по первому приближению являются те случаи, когда характеристическое уравнение системы первого приближения не имеет корней с модулем, большим единицы, но имеет корни с модулем, равным единице. Ляпунов рассматривает два сомнительных случая, аналогичных тем, которые были им рассмотрены в главе об установившихся движениях.

В одном случае характеристическое уравнение первого приближения, по предположению, имеет один корень, равный единице, а остальные корни с модулями, меньшими единицы.

В другом случае упомянутое уравнение имеет два мнимых сопряженных корня с модулем, равным единице, и остальные корни с модулями, меньшими единицы. Анализ этих особых случаев в основном сходен с анализом аналогичных случаев установившегося движения. Дальше мы укажем разницу в полученных результатах.

Начнем с рассмотрения первого случая. В силу того, что система первого приближения приводима, можно при помощи линейного преобразования с периодическими коэффициентами привести систему к виду (10), где X и X_s — голоморфные функции $x, x_1, \ldots x_n$, коэффициенты которых суть периодические функции t (периода ω), p_s — также периодические функции и p_{si} — постоянные, причем определяющее уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями.

Пусть, как и выше, $X^{(0)}$ и $X_s^{(0)}$ совокупность членов в разложениях X и X_s, не зависящих от $x_1, \ldots, x_n$. В двух случаях вопрос об устойчивости решается непосредственно по виду системы (10).

Первым является тот случай, когда член наименьшего порядка в $X^{(0)}$ имеет постоянный коэффициент, степень этого члена не выше наименьшей степени x в разложениях $X_s^{(0)}$ и все p_s равны нулю. В этом случае вопрос об устойчивости решается знаком постоянного коэффициента упомянутого члена $X^{(0)}$. Невозмущенное движение неустойчиво, если он положителен, и устойчиво, если он отрицателен.

Вторым случаем является тот, когда $X^{(0)}$, все $X_s^{(0)}$ и все p_s равны тождественно нулю. В этом случае система (10) имеет решения $x=c$, $x_1=\ldots x_n=0$ и все эти решения (при малом $|c|$), вместе с невозмущенным движением, будут устойчивыми.

Если система (10) не удовлетворяет указанным выше условиям в отношении $X^{(0)}$, $X_s^{(0)}$ и p_s, надо применить преобразование к новым переменным. Оно несколько отлично от того, которое применялось в аналогичном случае для установившегося движения.

Решение системы (10) предполагается в виде

$$x=c+u^{(2)}c^2+u^{(3)}c^3+\ldots, \quad x_k=u_k^{(1)}c^1+u_k^{(2)}c^2+u_k^{(3)}c^3+\cdots \quad (k=1,\ldots,n) \tag{50}$$

Оказывается, что если коэффициенты этих рядов нельзя брать периодическими функциями t, то это обнаружится прежде всего на некотором коэффициенте $u^{(m)}$, который окажется вида $gt+v(t)$, где $v(t)$ — периодическая функция, а все коэффициенты $u^{(l)}$, $u_k^{(l)}$ при $l<m$ будут периодическими функциями t.

После этого преобразование к новым переменным $z, z_1, \ldots, z_n$

$$x = z + u^{(2)}z^2 + u^{(3)}z^3 + \cdots + v^{(m-1)}z^{m-1} + vz^m$$
$$x_k = u_k^{(1)}z + u_k^{(2)}z^2 + u_k^{(3)}z^3 + \cdots + u_k^{(m-1)}z^{m-1} + z_k$$

приведет к системе, обладающей в отношении $X_s^{(0)}$, $X_s^{(0)}$ и p_s указанными свойствами, причем g будет тем постоянным коэффициентом, знак которого, как указано выше, решает вопрос об устойчивости.

Если можно все $u^{(l)}$ и $u_k^{(l)}$ брать периодическими, то ряды (50) сходятся при малом значении модуля $|c|$, если считать, например, что все $u^{(l)}$ равны нулю при $t=0$.

При этом сходящиеся ряды (50) определяют непрерывный ряд периодических решений системы (10). В данном случае преобразование

$$x = z + u^{(2)}z^2 + u^{(3)}z^3 + \cdots, \qquad x_k = z_k + u_k^{(1)}z + u_k^{(2)}z^2 + u_k^{(3)}z^3 + \cdots$$

приведет к системе, обладающей вторым из указанных выше свойств, и невозмущенное движение, вместе с построенными выше периодическими движениями, будет устойчивым.

n°13. Переходим к рассмотрению второго особого случая, когда характеристическое уравнение основной системы имеет два мнимых сопряженных корня с модулем, равным единице, и модули остальных корней меньше единицы. При помощи линейного преобразования с периодическими коэффициентами основная система приводится к виду (15), где X, Y, X_s — голоморфные функции x, y, $x_1, \ldots, x_n$ с членами не ниже второго порядка и с периодическими коэффициентами, α_s и β_s — периодические функции, p_{ki} — постоянные, причем определяющее уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями. Используя обобщение теоремы, касающейся системы уравнений (13), на случай периодических коэффициентов, можно, как и в случае установившегося движения, считать, что X и Y обращаются в нуль при $x = y = 0$. Далее преобразование к полярным координатам приводит к системе:

$$\frac{dr}{dt} = rR, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \lambda + \Theta \tag{41}$$

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \cdots + p_{sn}x_n + (\alpha_s \cos\vartheta + \beta_s \sin\vartheta)\, r + X_s \quad (s = 1, \ldots, n)$$

Дальше идет некоторое изменение аппарата по сравнению со случаем установившегося движения. Величины r и x_k рассматриваются как функции независимых переменных ϑ и t, и для них пишется следующая система уравнений с частными производными

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (\lambda + \Theta)\frac{\partial r}{\partial \vartheta} = rR$$

$$\frac{\partial x_s}{\partial t} + (\lambda + \Theta)\frac{\partial x_s}{\partial \vartheta} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + (\alpha_s \cos\vartheta + \beta_s \sin\vartheta)\, r + X_s$$

Рассматривается решение этой системы в виде

$$r = c + u^{(2)}c^2 + u^{(3)}c^3 + \ldots, \qquad x_k = u_k^{(1)}c + u_k^{(2)}c^2 + u_k^{(3)}c^3 + \ldots \tag{53}$$

где $u^{(l)}$, $u_k^{(l)}$ — конечные суммы косинусов и синусов кратных ϑ.

При этом предполагается, что отношение $\lambda\omega/\pi$ есть число несоизмеримое.

Оказывается, что если $u^{(l)}$, $u_k^{(l)}$ нельзя брать периодическими функциями t, то это обнаружится прежде всего на некотором коэффициенте $u^{(m)}$, так что все $u^{(l)}, u_k^{(l)}$ при $l<m$ будут периодическими, а $u^{(m)}$ будет вида $gt+v(t)$, где $v(t)$ — конечная сумма синусов и косинусов кратных ϑ, с коэффициентами, которые суть периодические функции t.

Число m всегда будет нечетным и знак g решит вопрос об устойчивости. Невозмущенное движение неустойчиво, если $g>0$, и устойчиво, если $g<0$. Как и раньше, числа m и g не зависят от выбора произвольных постоянных в выражениях $u^{(l)}$.

Положим теперь, что все коэффициенты $u^{(l)}$, $u_k^{(l)}$ можно построить периодическими. Здесь наступает существенная разница по сравнению с установившимся движением. Оказывается, что не всегда при указанном обстоятельстве ряды (53) можно сделать сходящимися, и вообще исследование их сходимости представляет большие трудности.

Если предположить сходимость, то преобразование к переменным $z, z_1, \ldots, z_n$ по формулам (25) приведет к системе

$$\frac{dz}{dt}=zZ, \qquad \frac{d\vartheta}{dt}=\lambda+\Theta, \qquad \frac{dz_s}{dt}=p_{s1}z_1+\cdots+p_{sn}z_n+Z_s$$
$$(s=1,\ldots,n)$$

в которой функции Z и Z_s обращаются в нуль при $z_1=\ldots=z_n=0$.

В этой системе отбрасывается уравнение, содержащее производную от ϑ, и для остальных уравнений доказывается следующее: для любого выбора вещественной непрерывной функции $\vartheta(t)$ при всяком заданном положительном числе ε существует положительное число η, одно и то же при всяком выборе $\vartheta(t)$, такое, что если начальные значения z, z_k удовлетворяют условиям $|z_0|\leqslant\eta, |z_{k0}|\leqslant\eta$ $(k=1,\ldots,n)$, то при всяком t имеют место неравенства $|z|\leqslant\varepsilon$, $|z_1|\leqslant\varepsilon, \ldots, |z_n|\leqslant\varepsilon$.

Отсюда вытекает непосредственно устойчивость невозмущенного движения. Принимая во внимание равномерную сходимость разложений Z и Z_s при всех вещественных t и ϑ (переменная ϑ входит только под знаки косинуса и синуса), если $z, z_1 \ldots, z_n$ достаточно близки к нулю, можно утверждать, что высказанное выше утверждение является следствием следующей общей теоремы. Пусть имеется система

$$\frac{dz_1}{dt}=Z_1, \ \ldots, \ \frac{dz_k}{dt}=Z_k, \qquad \frac{dx_s}{dt}=p_{s1}x_1+\ldots+p_{sn}x_n+X_s \qquad (54)$$
$$(s=1,\ldots,n)$$

в которой Z_j, X_s — голоморфные функции переменных $x_1,\ldots,x_n, z_1,\ldots,z_k$, равные нулю при $x_1=\cdots=x_n=0$, не содержащие членов ниже второго порядка и коэффициенты которых — ограниченные вещественные непрерывные функции t, причем разложения Z_j, X_s сходятся равномерно при всех t, если переменные достаточно близки к нулю. Коэффициенты p_{si} — вещественные постоянные такие, что определяющее уравнение (8) имеет все корни с отрицательными вещественными частями. При этих предположениях для системы (54) будет иметь место устойчивость.

Доказательство этой теоремы сводится к доказательству того, что эта система допускает интегралы вида

$$L+F(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_k, t)=C \tag{55}$$

где L — любая линейная форма $z_1, \ldots, z_k$ с постоянными коэффициентами, а F — голоморфная функция x_l, z_j, не содержащая членов ниже второго порядка и равная нулю при $x_1 = \ldots = x_n = 0$, коэффициенты которой суть ограниченные функции t.

Принимая за L последовательно $z_1, \ldots, z_n$ и составляя сумму квадратов этих интегралов, приходим к интегралу вида

$$z_1^2+\cdots+z_k^2+R=C$$

где R не содержит членов ниже третьего порядка. Затем составляется квадратичная форма W величин $x_1, \ldots, x_n$, определяемая уравнением

$$\sum_{s=1}^{n}(p_{s1}x_1+\cdots+p_{sn}x_n)\frac{\partial W}{\partial x_s}=-(x_1^2+\cdots+x_n^2)$$

и функция

$$V=z_1^2+\cdots+z_k^2+W+R$$

При этом полная производная от V по t будет иметь вид:

$$V'=-(x_1^2+\cdots+x_n^2)+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{n}v_{s\sigma}x_s x_\sigma$$

где $v_{s\sigma}$ — голоморфные функции величин x_l, z_j, равные нулю, когда все эти величины равны нулю. Разложения $v_{s\sigma}$ имеют ограниченные коэффициенты и сходятся равномерно относительно t.

Построенная функция V удовлетворяет всем условиям первой теоремы второго метода, и нулевое решение системы (54) устойчиво. Всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически стремится к одному из движений, определяемых равенствами

$$z_1=c_1, \ldots, z_k=c_k, \qquad x_1=\ldots=x_n=0$$

n° 14. После опубликования *Общей задачи устойчивости движения* Ляпунов напечатал в развитие этого фундаментального труда ряд работ. Укажем коротко их содержание. В работе *Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения*[16] (1893) рассматривается тот случай установившегося движения, когда система состоит из двух уравнений и когда определяющее квадратное уравнение первого приближения имеет двойной корень, равный нулю. В предисловии к этой работе указывается, что будет рассмотрен и общий случай, когда определяющее уравнение первого приближения имеет двойной корень, равный нулю, а остальные корни с отрицательными вещественными частями, и что этот случай приводит к особым затруднениям.

Но ни в этой работе, ни в какой другой работе Ляпунов не рассматривал этого общего случая, и до сих пор не ясно, по каким причинам это произошло.

В небольшой статье *К вопросу об устойчивости движения*[9] (1893) Ляпунов показывает для случая установившегося движения, что при всяких коэффициентах p_{si} первого приближения, при которых первое приближение не решает вопроса об устойчивости, можно подобрать дополнительные члены X_s выше первого порядка или так, чтобы имела место неустойчивость, или так, чтобы имела место устойчивость.

n° 15. К рассматриваемому циклу работ относятся работы, в которых исследуются уравнения (44) и (46) с периодическим коэффициентом $p(t)$.

В большой работе [30] 1902 года, с которой непосредственно связана заметка [25] в Comptes Rendus (1900), исследуется для уравнения (44) ряд (47) при $\varepsilon = -1$ в предположении $p(t) \geqslant 0$. Если ввести обозначения

$$\int_0^t p(t)\,dt = P(t), \qquad P(\omega) = \Omega, \qquad P(t_i) = P_i \tag{55}$$

то для членов упомянутого ряда получаются выражения

$$A_n = \frac{1}{2}\int_0^\omega dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} (\Omega - P_1 + P_n)(P_1 - P_2)(P_2 - P_3)\ldots(P_{n-1} - P_n)\,dt \tag{56}$$

$$A_1 = \frac{\omega}{2}\Omega$$

и

$$A = 1 - A_1 + A_2 - A_3 + \ldots \qquad (A_n > 0) \tag{57}$$

Исследования выражений A_n приводят к неравенству

$$A_n^2 > \frac{n}{n-1} A_{n-1} A_{n+1} \tag{58}$$

Основной результат работы заключается в следующих утверждениях

$$\begin{array}{llll} \text{из} & 2 - A_1 + A_2 - \cdots - A_{2n-1} \geqslant 0 & \text{следует} & A > -1 \\ ,, & 2 - A_1 + A_2 - \cdots + A_{2n} \leqslant 0 & ,, & A < -1 \\ ,, & -A_1 + A_2 - A_3 + \cdots + A_{2n} \leqslant 0 & ,, & A < 1 \\ ,, & -A_1 + A_2 - A_3 + \cdots - A_{2n-1} \geqslant 0 & ,, & A > 1 \end{array} \tag{59}$$

Считается, что написанное неравенство выполняется при каком-либо положительном n. Из формулированного результата вытекает прием, при помощи которого можно убедиться в случае $A^2 \neq 1$, какое из двух неравенств, $A^2 > 1$ или $A^2 < 1$, имеет место, что, как мы видели выше, имеет основное значение при исследовании устойчивости периодических режимов. Опишем вкратце упомянутый прием.

Если $A_1 \leqslant 2$, т. е. имеет место неравенство (48), то, как мы уже упоминали, $A^2 < 1$. Если $A_1 > 2$, то вычисляется A_2 и рассматриваются отдельно следующие три случая: 1) $A_2 \leqslant A_1 - 2$; 2) $A_1 - 2 < A_2 \leqslant A_1$; 3) $A_2 > A_1$. В первом случае, в силу (59), $A < -1$, т. е. $A^2 > 1$. Во втором случае $A < 1$, и надо выяснить вопрос о неравенствах $A > -1$ или $A < -1$, для чего вычисляется A_3. Если

$$A_3 \leqslant A_2 - A_1 + 2 \tag{60}$$

то, в силу (59), $A > -1$, т. е. окончательно $A^2 < 1$. Если $A_3 > A_2 - A_1 + 2$, то надо вычислить A_4. Если $A_2 > A_1$ и $A_3 \leqslant A_2 - A_1$, то $A > 1$ (по 59), т. е. $A^2 > 1$. Если же $A_2 > A_1$ и $A_3 > A_2 - A_1$, то надо вычислять A_4

Вычисления упрощаются, если пользоваться оценками сверху чисел A_n. Пусть $A_1 > 2$ и $A_2 > A_1 - 2$. В силу (58) $A_3 \leqslant \frac{1}{2} A_2^2 / A_1$ и, таким образом, из неравенства

$$A_2^2 - 2A_1A_2 + 2A_1(A_1 - 2) \leqslant 0 \tag{61}$$

следует (60), т. е. следует $A > -1$. Доказывается, что из (61) следует и $A < 1$, т. е. $A^2 < 1$. Далее, при $n = 2$ и $n = 3$ доказывается

$$A_n \leqslant \frac{1}{(2n)!} \omega^n \Omega^n$$

что приводит к неравенству $A_2 \leqslant \frac{1}{90} A_1^3$. Отсюда следует, что неравенство

$$A_2 \geqslant \frac{1}{90} A_1^3 - A_1 - 2 \tag{62}$$

влечет за собой неравенство (60), т. е. $A > -1$. Но, как доказывается, из (62) следует также $A < 1$, т. е. $A^2 < 1$. Далее устанавливается оценка

$$A_3 \leqslant \frac{\pi^2 - 4}{6\pi^2} A_1A_2 + \frac{15 - \pi^2}{60\pi^2} A_1^3$$

и с ее помощью доказывается, что из неравенства

$$\left(1 - \frac{\pi^2 - 4}{6\pi^2} A_1\right) A_2 \geqslant \frac{15 - \pi^2}{60\pi^2} A_1^3 + A_1 - 2 \quad \text{следует} \quad A^2 < 1$$

В работе *Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами* [15] и примыкающей к ней заметке [17] в Comptes Rendus (1896) рассматривается задача оценки A при знакопеременной периодической функции $p(t)$. Основой исследования является преобразование уравнения (44) при помощи замены независимой переменной t и функции x, выбранной таким образом, чтобы в преобразованном уравнении коэффициент p был знакопостоянным. При этом для уравнения с неотрицательным $p(t)$ для доказательства неравенства $A^2 < 1$ применяется критерий (48) и следующий критерий, данный Жуковским[1]: если a^2 и b^2 — наибольшее и наименьшее значения непрерывной функции $p(t)$ и выполнено условие

$$\frac{\omega}{\pi} a < E\left(\frac{\omega}{\pi} b\right) + 1 \tag{63}$$

где $E(x)$ — целая часть x, то $A^2 < 1$.

Преобразование уравнения (44) совершается следующим образом. Вместо x вводится функция y по формуле $x = w(t)\, y$, где $w(t)$ — положительная функция с периодом ω, и вместо t вводится переменная

$$\tau = \int_0^t \frac{dt}{w^2(t)}$$

---

[1] Н. Е. Жуковский. Условие конечности интегралов. Полн. собр. соч. 1937. Т. 1. Стр. 315 (из Математического сборника. 1891. Т. XVI).

Уравнение (44) преобразуется к виду

$$\frac{d^2y}{d\tau^2}+q(\tau)\,y=0 \qquad \Big(q(\tau)=w^3(t)\,[w''(t)+p(t)\,w(t)]\Big) \tag{64}$$

где $q(\tau)$ — периодическая функция и величина A для уравнения (64) та же, что и для уравнения (44). Определение w сводится к нахождению периодических решений уравнений вида $w''+hw=h-p$, где h — некоторая постоянная. Ее надо считать равной нулю, если

$$\int_0^\omega p(t)\,dt=0 \tag{65}$$

В этом последнем случае уравнение $w''=-p$ допускает периодические решения, которые отличаются постоянным слагаемым. Указанным путем разбирается ряд примеров. Доказывается также следующее: если $p(t)$ — нечетная функция и $P(t)$ такая первообразная для $p(t)$, что

$$\int_0^\omega P(t)\,dt=0$$

то из неравенства

$$\omega\int_0^\omega P^2(t)\,dt\leqslant 4 \qquad \text{следует} \qquad A^2<1$$

Можно несколько иначе проводить преобразование к новым переменным. Функция $w(t)$ представляется в виде

$$w(t)=\exp\Big(-\int v(t)\,dt\Big)$$

где $v(t)$ — такая периодическая функция (имеющая производную), что

$$\int_0^\omega v(t)\,dt=0$$

Функция $v(t)$ определяется из равенства

$$v'(t)=k[p(t)-\Omega_1] \qquad \Big(\Omega_1=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega p(t)\,dt\Big) \tag{66}$$

где k — некоторая постоянная. При этом получается

$$q(\tau)=\{\Omega_1+(1-k)[p(t)-\Omega_1]+v^2\}\exp\Big(-4\int v(t)\,dt\Big)$$

В данном случае можно при $p(t)>0$ достигнуть того, что

$$q(\tau)>0, \qquad \omega_1\int_0^{\omega_1} q(\tau)\,d\tau<\omega\int_0^\omega p(t)\,dt$$

где ω_1 — период $q(\tau)$. Рассмотрим уравнение с параметром μ:

$$x''+\mu p(t)\,x=0 \qquad (\mu>0) \tag{67}$$

В формуле (66) считается $k=1$, а $p(t)$ и Ω_1 заменяются на $\mu p(t)$ и $\mu\Omega_1$. Тогда

$$v(t)=\mu\varphi(t) \qquad \Big(\varphi(t)=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega [p(t_1+t)-\Omega_1]\,t_1\,dt_1\Big)$$

При этом

$$q(\tau)=\mu\,[\Omega_1+\mu\varphi^2(t)]\exp\left(-4\mu\int\varphi(t)\,dt\right)$$

Если $\Omega_1<0$ и μ мало, то, очевидно, $A^2>1$. Если $\Omega_1>0$ и μ мало, то $A^2<1$. Пусть M есть наибольшее абсолютное значение $\varphi(t)$ и ζ — положительный корень уравнения

$$\left(\frac{\omega\Omega_1}{M}+\zeta\right)\frac{(e^\zeta-1)^2}{\zeta}=\pi$$

Применяя признак Жуковского, Ляпунов показывает, что если $\mu\leqslant\zeta/M\omega$, то $A^2<1$. В частности, при $\Omega_1=0$ и $\mu=1$, из неравенства

$$\left|\int_0^\omega p(t_1+t)\,t_1\,dt_1\right|\leqslant\log(1+\pi)\qquad\text{следует}\qquad A^2<1$$

Две заметки[22, 23] в Comptes Rendus (1899) посвящены исследованию уравнения (67). В первой из них считается, что $p(t)\geqslant0$, а во второй аналогичные вопросы рассматриваются для знакопеременного $p(t)$. Ограничимся изложением содержания первой заметки.

Пусть $0<\mu_1<\mu_2<\ldots$ собственные значения уравнения (67) при предельных условиях $y(a)=y(b)=0$, причем $b=a+\omega$. Всякое μ_k есть непрерывная периодическая функция a периода ω или постоянная. В последнем случае μ_k есть двойной корень уравнения $A^2-1=0$, где A соответствует уравнению (67) и есть функция μ. Если μ_k функция a, то она имеет один минимум μ_k' и один максимум μ_k''.

Числа μ_k' и μ_k'' также корни уравнения $A^2-1=0$. Если для постоянного μ_k положить $\mu_k'=\mu_k''=\mu_k$, то все корни уравнения $A^2-1=0$ расположенные в неубывающем порядке, будут $0,\ \mu_1',\ \mu_1'';\ \mu_2',\ \mu_2'',\ \ldots$, причем $\mu=0$ есть простой корень. При нечетном k числа μ_k' и μ_k'' удовлетворяют уравнению $A+1=0$, а при четном k уравнению $A-1=0$. Промежутки, определяемые числами μ_k' и μ_k'', и решают вопрос о том, какое из неравенств $A^2>1$ или $A^2<1$ имеет место, а именно: если μ удовлетворяет условию $\mu_k'<\mu<\mu_k''$, то $A^2>1$; если же $\mu_k''<\mu<\mu_{k+1}'$ или $0<\mu<\mu_k'$, то $A^2<1$. Если $\mu=\mu_k'$ или $\mu=\mu_k''$, причем $\mu_k''>\mu_k'$, то уравнение (67) имеет два решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ таких, что

$$x_i(t+\omega)=(-1)^k x_k(t),\qquad x_2(t+\omega)=(-1)^k x_2(t)+x_1(t)$$

Если же $\mu=\mu_k'=\mu_k''$, то имеются два линейно независимых решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ таких, что

$$x_1(t+\omega)=(-1)^k x_1(t),\qquad x_2(t+\omega)=(-1)^k x_2(t)$$

Отметим, что в работе *Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах* [7] (1889) исследуется устойчивость для некоторой специальной системы линейных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Это связано с вычислением двух постоянных, аналогичных постоянной A, о которой говорилось выше.