

К ТЕОРИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ С ТОНКИМИ КРЫЛЬЯМИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Г. А. Бугаенко

(Молотов)

После работ Кутты, Блэзиуса и Граммеля, а затем С. А. Чаплыгина, Кбица и Кавада задача о решетке с плоскими крыльями получила исчерпывающее решение и притом различными методами.

Теории решетки, составленной из криволинейных профилей некоторого специального вида, посвящено довольно много работ.

Что касается решетки из произвольных профилей, то задача была решена (для случая слабо изогнутых дуг) Бельским и Зеленым [1], а также Пестелем методом, обобщающим метод Глауэрта в теории тонкого крыла.

Наиболее важные результаты для решетки с слабо изогнутыми крыльями произвольного вида были получены Л. И. Седовым [2] эффективным методом. Ниже приводится другой метод, решающий задачу о решетке с слабо изогнутыми дугами и крыльями произвольного вида посредством сведения задачи к сингулярному интегральному уравнению и решению его.

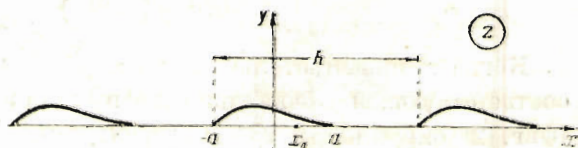
1. Сведение задачи к сингулярному интегральному уравнению.

Пусть поступательный поток идеальной несжимаемой жидкости с комплексной скоростью $V_{\infty} e^{-i\alpha_{\infty}}$ в любой точке плоскости обтекает решетку слабо изогнутых дужек, расположенных вдоль вещественной оси на расстоянии h одна от другой (фиг. 1). Будем предполагать установившийся режим скоростей и безотрывное обтекание согласно гипотезе Жуковского.

Вдоль хорды каждого крыла рассмотрим систему вихрей с линейной интенсивностью $\gamma(x)$ такой, чтобы поле скоростей, индуцируемое всеми вихрями, сложенное с равномерным полем $V_{\infty} e^{-i\alpha_{\infty}}$, совпало с полем скоростей, существующим при обтекании решетки [1].

Так как комплексный потенциал течения, создаваемого вихрями элемента dx , есть

$$\frac{\gamma(x) dx}{2\pi i} \log(z-x)$$



Фиг. 1

то бесконечная цепочка вихрей, составленная из элементов, находящихся в точках $x \pm nh$ ($n=0, 1, 2, \dots$), имеет потенциал

$$j(z) = \frac{\gamma(x)}{2\pi i} \log \sin \frac{\pi}{h} (z-x) dx$$

Комплексная скорость течения будет

$$\frac{dz}{dz} = \frac{\gamma(x)}{2hi} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (z-x) dx$$

Интегрируя по x от $-a$ до $+a$, получим комплексную скорость течения, индуцируемого всей системой вихрей:

$$u - iv = \frac{1}{2hi} \int_{-a}^{+a} \gamma(x) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (z-x) dx \quad (1.1)$$

Так как условие обтекания профиля крыла $y = y(x)$ требует, чтобы нормальная составляющая скорости равнялась нулю, то в каждой точке профиля

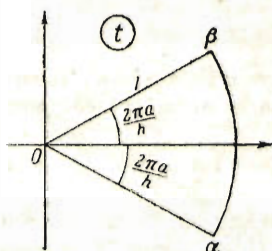
$$-u \frac{dy}{dx} + v + \left(-u_m \frac{dy}{dx} + v_m \right) = 0$$

Здесь обозначено u_m и v_m — компоненты скорости V_m . Так как

$$-u \frac{dy}{dx} + v = \operatorname{Re} \left[i(u - iv) \frac{dz}{dx} \right]$$

то, следовательно,

$$\operatorname{Re} \left[i \frac{dz}{dx} (u - iv) \right] = u_m \frac{dy}{dx} - v_m$$



Фиг. 2

Это уравнение с помощью (1.1) можно привести к виду

$$\frac{1}{2h} \operatorname{Re} \left[\left(1 + i \frac{dy}{dx} \right)_0 \int_{-a}^{+a} \gamma(x) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (z_0 - x) dx \right] = \left(u_m \frac{dy}{dx} - v_m \right)_0$$

где индекс 0 показывает, что значения взяты на контуре профиля.

Так как крыло предполагается слабо изогнутым, то y_0 и $(dy/dx)_0$ малы и можно написать

$$\frac{1}{2h} \int_{-a}^{+a} \gamma(x) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (x_0 - x) dx = \left(u_m \frac{dy}{dx} - v_m \right)_0 \quad (1.2)$$

где интеграл берется в смысле главного значения.

Введем в рассмотрение комплексное переменное $t = \exp(2\pi ix/h)$. Имеем

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (x_0 - x) = i \frac{t_0 + t}{t_0 - t}$$

Когда x пробегает любую из хорд профилей, например $(-a, +a)$, соответствующая точка плоскости t описывает одну и ту же дугу (фиг. 2) окружности $\alpha\beta$ с центральным углом $(-2\pi a/h, +2\pi a/h)$.

Переходя в (1.2) к переменной t , получим

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\alpha\beta} \gamma_1(t) \frac{t + t_0}{t - t_0} \frac{dt}{t} = 4i f_1(t_0)$$

где

$$\gamma_1(t) \equiv \gamma \left(-i \frac{h}{2\pi} \overline{\log t} \right), \quad f_1(t_0) = \left(u_m \frac{dy}{dx} - v_m \right)_{t=t_0}$$

Выделяя характеристическую часть, полученное уравнение можно представить в виде

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\alpha\beta} \frac{\gamma_1(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2t}\right) \gamma_1(t) dt = 2i f_1(t_0) \quad (1.3)$$

Таким образом, задача приведена к сингулярному уравнению первого рода. Решение этого уравнения дает закон распределения плотности вихревой системы $\gamma(x)$, имитирующей решетку.

2. Решение сингулярного уравнения. Рассмотрим предварительно характеристическое уравнение

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\alpha\beta} \frac{\gamma_1(t) dt}{t-t_0} = 2i f_1(t_0) \quad (2.1)$$

Так как интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \frac{\gamma_1(t) dt}{t-z} \quad (2.2)$$

представляет собой функцию, аналитическую вне дуги $\alpha\beta$ окружности, и удовлетворяет известным предельным соотношениям Племеля

$$\Phi_i(t_0) - \Phi_e(t_0) = \gamma_1(t_0), \quad (2.3)$$

$$\Phi_i(t_0) + \Phi_e(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\beta\alpha} \frac{\gamma_1(t) dt}{t-t_0}$$

то подстановка последнего в характеристическое уравнение (2.1) дает

$$\Phi_i(t_0) + \Phi_e(t_0) = 2i f_1(t_0) \quad (2.4)$$

Таким образом, задача приводится к проблеме Гильберта-Римана частного вида: требуется определить аналитическую вне дуги $\alpha\beta$ функцию $\Phi(z)$, зная сумму предельных значений (2.4). После определения $\Phi(z)$ искомая функция $\gamma_1(t_0)$ найдется по первому из уравнений (2.3).

Легко сообразить, что функция $\xi(z) = \sqrt{(z-\beta)/(z-\alpha)}$, аналитическая вне дуги $\alpha\beta$, будет решением однородной задачи $\Phi_i(t_0) + \Phi_e(t_0) = 0$; мы выбираем ту ветвь функции $\xi(z)$, которая удовлетворяет равенству

$$\xi(\infty) = +1$$

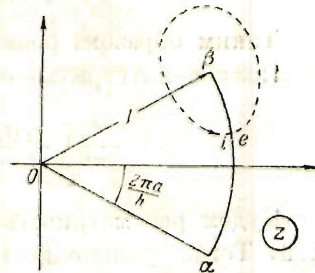
Действительно, значения функции $\xi(z)$ на внешнем и внутреннем крае разреза $\alpha\beta$ отличаются только знаком, так как при обходе против часовой стрелки (фиг. 3) вокруг точки β функция $\xi(z)$ получает множитель $e^{\pi i}$.

Ищем решение неоднородной задачи (2.4) в виде

$$\Phi(z) = F(z) \sqrt{\frac{z-\beta}{z-\alpha}}$$

Условие (2.4) дает

$$F_i(t_0) - F_e(t_0) = 2i f_1(t_0) \sqrt{\frac{t_0-\alpha}{t_0-\beta}}$$



Фиг. 3

и на основании формул Племелья (2.3) можно принять

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{t-\alpha}{t-\beta}} 2i f_1(t) \frac{dt}{t-z}$$

Тогда

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \sqrt{\frac{z-\beta}{z-\alpha}} \int_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{t-\alpha}{t-\beta}} 2i f_1(t) \frac{dt}{t-z}$$

и по первой из формул (2.3)

$$\gamma_1(t_0) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{t_0-\beta}{t_0-\alpha}} \int_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{t-\alpha}{t-\beta}} 2i f_1(t) \frac{dt}{t-t_0} \quad (2.5)$$

Таким образом, решение характеристического уравнения найдено. Полное интегральное уравнение (1.3) можно представить в виде

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\alpha\beta} \frac{\gamma_1(t) dt}{t-t_0} = 2i f_1(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha\beta} \frac{-1}{2t} \gamma_1(t) dt \quad (2.6)$$

Будем рассматривать правую часть, как если бы она была известной. Тогда уравнение (2.6) не отличается по виду от характеристического (2.1), и, применяя формулу (2.5), получим

$$\gamma_1(t_0) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{t_0-\beta}{t_0-\alpha}} \int_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{t-\alpha}{t-\beta}} \left\{ 2i f_1(t) - \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2t} \right) \gamma_1(t) dt \right\} \frac{dt}{t-t_0}$$

или

$$\begin{aligned} \gamma_1(t_0) + \left(\frac{1}{i\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{t_0-\beta}{t_0-\alpha}} \int_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{t_1-\alpha}{t_1-\beta}} \frac{dt_1}{t_1-t_0} \int_{\alpha\beta} \frac{-1}{2t} \gamma_1(t) dt &= \\ &= \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{t_0-\beta}{t_0-\alpha}} \int_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{t-\alpha}{t-\beta}} \frac{2i f_1(t) dt}{t-t_0} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Принимая гипотезу Н. Е. Жуковского, мы должны потребовать, чтобы поток имел конечную скорость во всех правых кромках профилей. Поэтому решение $\gamma_1(t_0)$ строится обращающееся в нуль в указанных кромках. Для упрощения введем обозначение $\omega = \pi/h$. Имеем

$$\beta = e^{i2\omega a}, \quad \alpha = e^{-i2\omega a}, \quad t = e^{i2\omega x}$$

и, следовательно,

$$\sqrt{\frac{t-\beta}{t-\alpha}} = \frac{\sin \omega(x-a)}{\sin \omega(x+a)} e^{i\omega a}, \quad \frac{dt_1}{t_1-t_0} = [\omega \operatorname{ctg} \omega(x_1-x_0) + \omega i] dx_1$$

Подставив эти выражения в (2.7) и отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\begin{aligned} \gamma(x_0) - \frac{1}{h^2} \sqrt{\frac{\sin \omega(x-x_0)}{\sin \omega(x+x_0)}} J_1 \int_{-a}^{+a} \gamma(x) dx &= \\ &= \frac{2}{h} \sqrt{\frac{\sin \omega(x_0-a)}{\sin \omega(x_0+a)}} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{\sin \omega(x+a)}{\sin \omega(x-a)}} \operatorname{ctg} \omega(x-x_0) f(x) dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{h^2} J_2 \int_{-a}^a \gamma(x) dx = 2 \int_{-a}^a \sqrt{\frac{\sin \omega(a+x)}{\sin \omega(a-x)}} f(x) dx \quad \left(\omega = \frac{\pi}{h} \right) \quad (2.9)$$

где введены обозначения

$$J_1 = \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{\sin \omega(a+x)}{\sin \omega(a-x)}} dx, \quad J_2 = \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{\sin \omega(a+x)}{\sin \omega(a-x)}} \operatorname{ctg} \omega(x-x_0) dx \quad (2.10)$$

Интегралы J_1 и J_2 последовательными подстановками

$$\operatorname{tg} \frac{\pi x}{h} = y, \quad \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \omega a + y}{\operatorname{tg} \omega a - y}} = z \quad \left(\omega = \frac{\pi}{h} \right)$$

приводятся к интегралам от рациональных дробей. Вычисления дают

$$J_1 = h \sin \frac{\pi a}{h}, \quad J_2 = h \cos \frac{\pi a}{h} \quad (2.11)$$

Полная циркуляция Γ скорости вокруг одного крыла решетки найдется по уравнению (2.9)

$$\Gamma = \int_{-a}^{+a} \gamma(x) dx = \frac{2}{\cos \omega a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{\sin \omega(a+x)}{\sin \omega(a-x)}} f(x) dx \quad \left(\omega = \frac{\pi}{h} \right) \quad (2.12)$$

Уравнение (2.8) дает закон распределения интенсивности вихрей вдоль хорды

$$\gamma(x_0) = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{\sin \omega(a-x_0)}{\sin \omega(a+x_0)}} \int_{-a}^a [\operatorname{tg} \omega a + \operatorname{ctg} \omega(x-x_0)] \sqrt{\frac{\sin \omega(a+x)}{\sin \omega(a-x)}} f(x) dx$$

В этих формулах x_0 — любая точка хорды крыла, h — шаг решетки, $2a$ — длина хорды, функция

$$f(x) = u_m \frac{dy}{dx} - v_m$$

зависит от вида задаваемого профиля крыла $y = y(x)$.

Разумеется, (2.12) можно получить и из (2.13), умножив ее на dx_0 и проинтегрировав от $-a$ до $+a$.

Согласно обобщенной (для решетки) теореме Н. Е. Жуковского сила давления на одно крыло решетки равна $P = \rho V_m |\Gamma|$. Поэтому, пользуясь формулой (2.12) и выражением

$$f(x) = u_m \frac{dy}{dx} - v_m = V_m \left(\cos \alpha_m \frac{dy}{dx} - \sin \alpha_m \right)$$

имеем

$$P = \frac{2\rho V_m^2}{\cos \omega a} \left(h \sin \alpha_m \sin \omega a - \cos \alpha_m \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{\sin \omega(a+x)}{\sin \omega(a-x)}} \frac{dy}{dx} dx \right) \quad (2.14)$$

при этом принято во внимание, что $\Gamma < 0$.

Направление силы P можно получить, повернув вектор средней скорости на прямой угол против направления циркуляции.

Как частный случай из формул (2.13), (2.12) и (2.14) для одиночного, слабо изогнутого крыла (дужки) при $h \rightarrow \infty$ получим

$$\gamma(x_0) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a-x_0}{a+x_0}} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \frac{f(x)}{x-x_0} dx$$

$$\Gamma = 2 \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} f(x) dx \quad (2.15)$$

$$P = 2\rho V^2 \left(\pi a \sin \alpha - \cos \alpha \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \frac{dy}{dx} dx \right)$$

где $Ve^{-i\alpha}$ — комплексная скорость набегающего потока в бесконечности.

Последняя формула переходит в формулу Мунка [1], если в (2.14) положить $x = a \cos \theta$.

При $dy/dx = 0$ и $f(x) = -V_m \sin \alpha_m$ формулы (2.13), (2.12) и (2.14) дают известные выражения для плоской решетки и при $f(x) = -V \sin \alpha$ для плоского одиночного крыла.

§ 3. Решетка с осью, перпендикулярной к хорде пера (фиг. 4). Полная комплексная скорость вихревой системы, заменяющей крылья, найдется аналогично вышеизложенному и будет

$$w(z) = \frac{1}{2hi} \int_{-a}^{+a} \gamma(x) \operatorname{cth} \frac{\pi}{h} (z-x) dx \quad (3.1)$$

Условие обтекания контура дает

$$\frac{1}{2h} \int_{-a}^{+a} \gamma(x) \operatorname{cth} \frac{\pi}{h} (x_0-x) dx = f(x_0)$$

$$\left(f(x_0) \equiv \left[u_m \frac{dy}{dx} - v_m \right]_{x=x_0} \right) \quad (3.2)$$

где значок 0 показывает, что значения берутся на хорде.

Полагая $t = \exp(2\pi x/h)$, условие (3.2) можно представить в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{1/k}^k \gamma_1(t) \frac{t_0+t}{t_0-t} \frac{dt}{t} = 2f_1(t_0) \quad \left(k = \exp \frac{2\pi a}{h} \right) \quad (3.3)$$

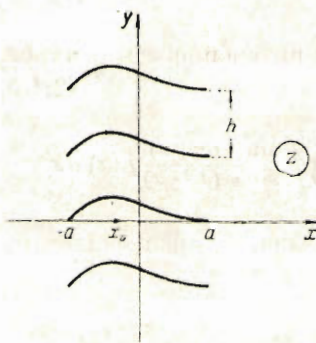
где

$$\gamma_1(t) = \gamma \left(\frac{h}{2\pi} \log t \right), \quad f_1(t_0) = f \left(\frac{h}{2\pi} \log t_0 \right) \quad (3.4)$$

Выделяя в (3.3) характеристическую часть, получим

$$\frac{1}{\pi i} \int_{1/k}^k \frac{\gamma_1(t) dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_{1/k}^k \frac{-1}{2t} \gamma_1(t) dt = 2if_1(t_0) \quad \left(k = \exp \frac{2\pi a}{h} \right) \quad (3.5)$$

Таким образом, задача сведена к интегральному уравнению, где t — вещественно, с интервалом интегрирования, представляющим отрезок положительной оси.



Фиг. 4

Регуляризация и решение уравнения (3.5) проводится аналогично предыдущему. Имеем

$$\gamma_1(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{1/k}^k N(t_0, t) \gamma_1(t) dt = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{t-k}{t-k^{-1}}} \int_{1/k}^k \sqrt{\frac{t-k^{-1}}{t-k}} \frac{2if_1(t) dt}{t-t_0} \quad (3.6)$$

где ядро

$$N(t_0, t) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{t_0-k}{t_0-k^{-1}}} \int_{1/k}^k \sqrt{\frac{t_1-k^{-1}}{t_1-k}} \frac{-1}{2t} \frac{dt_1}{t_1-t_0} \quad (3.7)$$

С помощью подстановки $z = \sqrt{(t_1 - k^{-1}) / (k - t_1)}$ легко получить

$$\int_{1/k}^k \sqrt{\frac{t_1-k^{-1}}{k-t_1}} \frac{dt_1}{t_1-t_0} = \pi \quad (3.8)$$

Кроме того, заметим, что согласно (3.4)

$$\int_{1/k}^k \gamma_1(t) \frac{dt}{t} = \int_{-a}^{+a} \gamma\left(\frac{h}{2\pi} \log t\right) \frac{2\pi}{h} dx = \frac{2\pi}{h} \int_{-a}^{+a} \gamma(x) dx = \frac{2\pi}{h} \Gamma \quad (3.9)$$

где Γ — полная циркуляция вокруг одного крыла.

Пользуясь (3.7), (3.8) и (3.9), из (3.6) имеем

$$\gamma_1(t_0) + \frac{\Gamma}{h} \sqrt{\frac{k-t_0}{t_0-k^{-1}}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{k-t_0}{t_0-k^{-1}}} \int_{1/k}^k \sqrt{\frac{t-k^{-1}}{k-t}} \frac{f_1(t) dt}{t-t_0} \quad (3.10)$$

Умножая это уравнение на $1/t_0 dt_0$ и интегрируя от $1/k$ до k , получим

$$\Gamma \left(\frac{2\pi}{h} + \frac{1}{h} \int_{1/k}^k \sqrt{\frac{k-t_0}{t_0-k^{-1}}} \frac{dt_0}{t_0} \right) = \frac{2}{\pi} \int_{1/k}^k \sqrt{\frac{t-k^{-1}}{k-t}} f_1(t) dt \int_{1/k}^k \sqrt{\frac{k-t_0}{t_0-k^{-1}}} \frac{dt_0}{t_0(t-t_0)} \quad (3.11)$$

С помощью подстановки $z = \sqrt{(k-t_0)/(t_0-k^{-1})}$ легко вычислить, что

$$\int_{1/k}^k \sqrt{\frac{k-t_0}{t_0-k^{-1}}} \frac{dt_0}{t_0} = \pi \sqrt{k} \left(\sqrt{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right), \quad \int_{1/k}^k \sqrt{\frac{k-t_0}{t_0-k^{-1}}} \frac{dt_0}{t_0(t-t_0)} = \frac{\pi}{t} k$$

После простых преобразований из (3.11) для полной циркуляции вокруг одного крыла решетки найдем

$$\Gamma = \frac{2}{\operatorname{ch} \omega a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \omega(a+x)}{\operatorname{sh} \omega(a-x)}} f(x) dx \quad \left(\omega = \frac{\pi}{h} \right) \quad (3.12)$$

Для закона распределения интенсивности вихрей вдоль хорды из (3.10) получим

$$\gamma(x_0) = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \omega(a-x_0)}{\operatorname{sh} \omega(a+x_0)}} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{-\exp \omega u}{\operatorname{ch} \omega u} + \frac{\exp \omega(x-x_0)}{\operatorname{sh} \omega(x-x_0)} \right) \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \omega(a+x)}{\operatorname{sh} \omega(a-x)}} f(x) dx$$

Добавим к числителю первого члена в скобках $\operatorname{ch} \omega a$, а от числителя второго члена вычтем $\operatorname{sh} \omega(x-x_0)$; окончательно получим (3.13)

$$\gamma(x_0) = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \omega(a-x_0)}{\operatorname{sh} \omega(a+x_0)}} \int_{-a}^{+a} [-\operatorname{th} \omega a + \operatorname{cth} \omega(x-x_0)] \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \omega(a+x)}{\operatorname{sh} \omega(a-x)}} f(x) dx$$

Формулы (3.12) и (3.13), переходят в (2.12) и (2.13) при замене h на ih , как и должно быть, — шаг решетки из горизонтального становится вертикальным.

Для силы давления на крыло решетки $P = \rho V_m |\Gamma|$ согласно (3.12) получим

$$P = \frac{2\rho V_m^2}{\operatorname{ch} \omega a} \left(h \sin \alpha_m \operatorname{sh} \omega a - \cos \alpha_m \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \omega (a+x)}{\operatorname{sh} \omega (a-x)}} \frac{dy}{dx} dx \right) \quad (3.14)$$

При $h \rightarrow \infty$ и $\omega = \pi/h \rightarrow 0$ будет

$$\sqrt{\frac{\operatorname{sh} \omega (a+x_0)}{\operatorname{sh} \omega (a-x_0)}} \rightarrow \sqrt{\frac{a+x_0}{a-x_0}}, \quad \frac{\operatorname{cth} \omega (x-x_0)}{h} \rightarrow \frac{1}{\pi (x-x_0)}, \quad \frac{2th\omega a}{h} \rightarrow 0$$

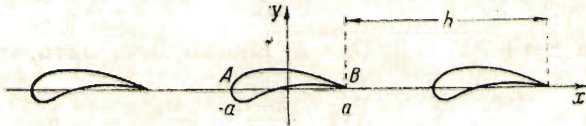
Поэтому из (3.13), (3.14) для одиночного слабо изогнутого крыла получим

$$\gamma(x_0) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{a-x_0}{a+x_0}} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \frac{l(x)}{x-x_0} dx \quad (3.15)$$

$$\Gamma = 2 \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} f(x) dx, \quad P = -2\rho V \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} f(x) dx$$

Известные формулы плоской решетки ($dy/dx = 0$) и плоского одиночного крыла вытекают из (3.12), (3.13), (3.14) при $f(x) = -V_m \cos \alpha_m$, а затем соответственно при $\omega \rightarrow \infty$.

§ 4. Обобщение на случай решетки с телесными крыльями. Пусть крылья решетки являются телесными (а не дужки, как раньше). Будем их предполагать тонкими и слабо изогнутыми, а хорды распо-



Фиг. 5

ложенными вдоль вещественной оси (фиг. 5).

Пусть проекция крыла на ось x есть отрезок $(-a, a)$ и h — шаг решетки. Разместим вдоль всех отрезков вида $(-a, a)$ вихри с ли-

нейной интенсивностью $\gamma(x)$ и источники с 'обильностью на единицу длины $q(x)$. Комплексная скорость, индуцируемая такой системой в какой-либо точке плоскости, будет

$$w(z) = \frac{1}{2hi} \int_{-a}^{+a} [\gamma(x) + iq(x)] \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (z-x) dx \quad (4.1)$$

Складывая эту скорость со скоростью поступательного потока $V_m e^{-i\alpha_m}$ и требуя выполнения условий обтекания крыла, получим

$$\frac{1}{2h} \operatorname{Re} \left\{ \left(1 + i \frac{dy}{dx} \right)_0 \int_{-a}^{+a} [\gamma(x) + iq(x)] \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (z_0 - x) dx \right\} = \left(u_m \frac{dy}{dx} - v_m \right)_0 \quad (4.2)$$

где индекс 0 показывает, что величины берутся на контуре крыла.

Пренебрегая малой величиной $(dy/dx)_0$ по сравнению с единицей, имеем

$$\frac{1}{2h} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-a}^{+a} [\gamma(x) + iq(x)] \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (z_0 - x) dx \right\} = u_m \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 - v_m \quad (4.3)$$

Если z_0 — точка верхней части контура крыла $y = y_2(x)$, то, пользуясь малостью y_0 , вместо z_0 будем брать соответствующее значение $x_0 = x_{0+}$ на верхнем краю разреза $(-a, a)$, а вместо z_0 на нижней части крыла $y = y_1(x)$ будем брать значение $x_0 = x_{0-}$ на нижнем краю разреза. Введем обозначения

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} [\gamma(x) + iq(x)] \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (x - z_0) dx \quad (4.4)$$

При $z_0 \rightarrow x_{0+}$ будет

$$J \rightarrow +\frac{1}{2} [\gamma(x_0) + iq(x_0)] \frac{h}{\pi} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} [\gamma(x) + iq(x)] \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (x - x_0) dx \quad (4.5)$$

При $z_0 \rightarrow x_{0-}$ будет

$$J \rightarrow -\frac{1}{2} [\gamma(x_0) + iq(x_0)] \frac{h}{\pi} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{+a} [\gamma(x) + iq(x)] \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (x - x_0) dx \quad (4.6)$$

Интегралы в правых частях равенств (4.5) и (4.6) берутся в смысле главного значения. Следовательно, из (4.3) соответственно (4.5) и (4.6) имеем

$$\frac{q(x_0)}{2} - \frac{1}{2h} \int_{-a}^{+a} \gamma(x) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (x - x_0) dx = u_m \left(\frac{dy_2}{dx} \right)_{x=x_0} - v_m \quad (4.7)$$

$$-\frac{q(x_0)}{2} - \frac{1}{2h} \int_{-a}^{+a} \gamma(x) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (x - x_0) dx = u_m \left(\frac{dy_1}{dx} \right)_{x=x_0} - v_m \quad (4.8)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$q(x_0) = u_m [y'_2(x_0) - y'_1(x_0)] \quad (4.9)$$

закон распределения обильности источников вдоль отрезка $(-a, a)$.

Складывая уравнения (4.7) и (4.8), получим сингулярное интегральное уравнение

$$-\frac{1}{2h} \int_{-a}^{+a} \gamma(x) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{h} (x - x_0) dx = \frac{u_m}{2} [y'_1(x_0) + y'_2(x_0)] - v_m \quad (4.10)$$

того же типа, что и уравнение (1.2).

Его решение представится аналогично (2.13) и дает закон распределения интенсивности вихрей

$$\gamma(x_0) = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{\sin \omega(a-x_0)}{\sin \omega(a+x_0)}} \int_{-a}^{+a} [\operatorname{tg} \omega a + \operatorname{ctg} \omega(x-x_0)] \sqrt{\frac{\sin \omega(a+x)}{\sin \omega(a-x)}} f(x) dx \quad (4.11)$$

Здесь, как и раньше, $\omega = \pi / h$, а функция $f(x)$ определяется формой крыла и зависит от компонентов средней скорости на бесконечности

$$f(x) = \frac{u_m}{2} [y_2'(x) + y_1'(x)] - v_m \quad (4.12)$$

Для полной циркуляции скорости вокруг одного крыла согласно (2.12) имеем

$$\Gamma = \frac{2}{\cos \omega a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{\sin \omega(a+x)}{\sin \omega(a-x)}} f(x) dx \quad \left(\omega = \frac{\pi}{h} \right) \quad (4.13)$$

Сила на единицу размаха одного крыла решетки будет

$$P = \rho V_m |\Gamma| = - \frac{2\rho V_m}{\cos \omega a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{\sin \omega(a+x)}{\sin \omega(a-x)}} f(x) dx \quad (4.14)$$

где $f(x)$ согласно (4.12).

Совершенно аналогично рассматривается и решетка «трап» (ось решетки перпендикулярна к оси x). Приводим окончательные формулы.

Закон распределения обильности источников вдоль хорд

$$q(x_0) = u_m [y_2'(x_0) - y_1'(x_0)] \quad (4.15)$$

Закон распределения интенсивности вихрей (4.16)

$$\gamma(x_0) = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{\text{sh} \omega(a-x_0)}{\text{sh} \omega(a+x_0)}} \int_{-a}^{+a} [-\text{th} \omega a + \text{cth} \omega(x-x_0)] \sqrt{\frac{\text{sh} \omega(a+x)}{\text{sh} \omega(a-x)}} f(x) dx$$

Полная циркуляция скорости вокруг одного крыла решетки

$$\Gamma = \frac{2}{\text{ch} \omega a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{\text{sh} \omega(a+x)}{\text{sh} \omega(a-x)}} f(x) dx \quad \left(\omega = \frac{\pi}{h} \right) \quad (4.17)$$

Сила давления на крыло, перпендикулярная к направлению средней скорости жидкости в бесконечности $V_m e^{i\alpha m}$.

$$P = - \frac{2\rho V_m}{\text{ch} \omega a} \int_{-a}^{+a} \sqrt{\frac{\text{sh} \omega(a+x)}{\text{sh} \omega(a-x)}} f(x) dx \quad (4.18)$$

Во многих этих формулах функция $f(x)$ согласно (4.12) зависит от формы крыла, уравнение верхней части которого есть $y = y_2(x)$, а нижней — $y = y_1(x)$. Частные случаи следуют аналогично предыдущему.

Поступила в редакцию
1 X 1947

Молотовский государственный
педагогический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий Н. М. и Зеленский Н. Е. К вопросу о циркуляционном обтекании плоской решетки с пером произвольного профиля. ПММ. 1939. Т. 1. Вып. 4.
2. Седов Л. И. Теория плоских движений идеальной жидкости. Оборонгиз. 1939.
3. Глауэрт. Основы теории крыльев и винта. ГНТИ. 1934.
4. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения ОГИЗ 1946.