Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

О ПРИЕМАХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. И. Шерман

(Москва)

В первой части работы излагается прием, позволяющий в некоторых случаях эффективно решать системы сингулярных интегральных уравнений. Этот же прием дает также возможность преобразовать систему сингулярных уравнений в уравнение Фредгольма второго рода, причем такое преобразование оказывается возможным произвести при несколько более общих предположениях, нежели те, которые обычно до сих пор принимались другими авторами.

Во второй части статьи рассматриваются некоторые частные виды систем сингулярных интегральных уравнений, имеющие применение в задачах математической физики и приводящиеся к нескольким (равным числу уравнений в системе) раздельным сингулярным уравнениям аналогичного типа.

§ 1. Пусть задана система двух сингулярных уравнений

$$\sum_{j=1}^{2}\left\{a_{kj}(t_0)\,\omega_j(t_0)+\frac{b_{kj}(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\omega_j(t)}{t-t_0}\,dt\right\}=f_k(t_0)\quad(k=1,2)\tag{1.1}$$

где L — простой, замкнутый, достаточно гладкий контур, расположенный в плоскости $z=x+iy$ и ограничивающий некоторую конечную односвязную область S, причем t и t_0 — аффиксы его точек. Далее, $\omega_j(t)$ — искомые неизвестные и $a_{kj}(t)$, $b_{kj}(t)$ и $f_k(t)$ — заданные на контуре L функции, требуемое число раз дифференцируемые по переменной t. Наконец, содержащиеся в левой части равенства (1.1) расходящиеся интегралы следует, как обычно, понимать в смысле их главного значения по Коши.

Положим

$$c_{kj}(t)=a_{kj}(t)-b_{kj}(t),\qquad d_{kj}(t)=a_{kj}(t)+b_{kj}(t)\qquad(k,\ j=1,\ 2)\tag{1.2}$$

и введем имеющие в дальнейшем важное значение определители

$$\Delta_1(t)=\begin{vmatrix}c_{11}(t)&c_{12}(t)\\c_{21}(t)&c_{22}(t)\end{vmatrix},\qquad\Delta_2(t)=\begin{vmatrix}d_{11}(t)&d_{12}(t)\\d_{21}(t)&d_{22}(t)\end{vmatrix}\tag{1.3}$$

Рассмотрим случай, когда коэффициенты $a_{kj}(t)$ и $b_{kj}(t)$ аналитически продолжимы в область S и в ней регулярны.

За последнее время появилось значительное число исследований, посвященных изучению систем сингулярных уравнений [1]. В них преимущественно трактуется вопрос о преобразовании этих систем к уравнениям Фредгольма второго рода. При этом (подобно тому, как в теории одного сингулярного уравнения) существенно предполагается, что определители, аналогичные построенным $\Delta_j(t)$ $(j=1, 2)$ для системы двух сингулярных уравнений, нигде на контуре L не обращаются в нуль. Как будет ясно из нижеизложенного, при сведении системы сингулярных уравнений типа (1.1) к уравнению Фредгольма достаточно предположить, что лишь один из указанных определителей всюду на L отличен от нуля; другой же определитель может при этом обращаться в нуль в некоторых точках контура L.

Возвращаясь к системе (1.1), допустим, что определитель $\Delta_1(t)$ имеет простой корень в точке $t=\alpha$ кривой L, а $\Delta_2(t)$ нигде на L не обращается в нуль. Кроме того, предположим пока, что функция $\Delta_2(z)$ не имеет также корней в области S. Покажем, что при этих условиях система (1.1) всегда имеет непрерывное всюду на L (включая точку $t=\alpha$) решение $\omega_j(t)$ $(j=1, 2)$.

Введем в рассмотрение новые неизвестные функции

$$\varphi_k(t)=\sum_{j=1}^{2} c_{kj}(t)\,\omega_j(t)-f_k(t) \qquad (k=1,2) \tag{1.4}$$

и, учитывая эти равенства, перепишем систему (1.1) на основании свойств интегралов типа Коши в следующем виде:

$$\varphi_k(t_0)+\lim_{z\to t_0}\sum_{j=1}^{2} b_{kj}(t_0)\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega_j(t)}{t-z}\,dt=0 \qquad (k=1,2) \tag{1.5}$$

где z—точка области S.

Из последних равенств следует, что каждая из функций $\varphi_k(t)$ аналитически продолжима в область S.

Разрешив уравнения (1.4) относительно $\omega_k(t)$, найдем

$$\omega_k(t)=\frac{1}{\Delta_1(t)}\left\{\sum_{j=1}^{2}(-1)^{k+j}\,c_{j+1,\,k+1}\,\varphi_j(t)+g_k(t)\right\}$$

$$g_k(t)=\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+k}\,c_{j+1,\,k+1}f_j(t) \qquad (k=1,2) \tag{1.6}$$

причем индекс 3 при раскрытии сумм следует заменить на 1.

Допустим для простоты, что функции $a_{kj}(t)$, $b_{kj}(t)$ и $f_k(t)$ — аналитические[1] в точке $t=\alpha$. Тогда, как ясно из (1.6), функции $\omega_k(t)$ будут также аналитическими в некоторой расположенной в области S окрестности той же точки.

В силу этого, продолжив (1.5) в область S и заменив на основании теоремы Коши контур интегрирования L весьма близким к нему контуром L', сколь угодно мало отличающимся от L лишь в окрестности

[1] Это ограничение несущественно и, как увидим ниже, может быть заменено более широким предположением.

точки $t=\alpha$, причем так, что последняя будет лежать вне L', получим

$$\varphi_k(z)+\sum_{j=1}^{2}\frac{b_{kj}(z)}{\pi i}\int_{L'}\frac{\omega_j(t)}{t-z}\,dt=0 \qquad (k=1,\ 2) \tag{1.7}$$

где z — любая точка области S', ограниченной кривой L'.

Подставив в равенства (1.7) под знаками интегралов вместо функций $\omega_j(t)$ их выражения из (1.6) и применяя ту же теорему Коши, будем иметь после несложных преобразований в области S'

$$\delta_{i1}(z)\varphi_1(z)+\delta_{i2}(z)\varphi_2(z)+\Delta_1(z)\{b_{i1}(z)\chi_1^{(1)}(z)+b_{i2}(z)\chi_2^{(1)}(z)\}=0$$

$$(i=1,2) \tag{1.8}$$

при этом введены обозначения

$$\chi_1^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{g_1(t)}{\Delta_1(t)}\frac{dt}{t-z},\qquad \chi_2^{(1)}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{g_2(t)}{\Delta_1(t)}\frac{dt}{t-z}$$

$$\delta_{11}(z)=\begin{vmatrix}d_{11}(z) & d_{12}(z)\\ c_{21}(z) & c_{22}(z)\end{vmatrix},\qquad \delta_{12}(z)=\begin{vmatrix}c_{11}(z) & c_{12}(z)\\ d_{11}(z) & d_{12}(z)\end{vmatrix} \tag{1.9}$$

$$\delta_{21}(z)=\begin{vmatrix}d_{21}(z) & d_{22}(z)\\ c_{21}(z) & c_{22}(z)\end{vmatrix},\qquad \delta_{22}(z)=\begin{vmatrix}c_{11}(z) & c_{12}(z)\\ d_{21}(z) & d_{22}(z)\end{vmatrix}$$

Функции $\chi_j^{(1)}(z)$ $(j=1,2)$, очевидно, можно записать в виде

$$\chi_1^{(1)}(z)=2\frac{g_1(\alpha)}{\Delta_1(z)}+\chi_1(z),\qquad \chi_2^{(1)}(z)=2\frac{g_2(\alpha)}{\Delta_1(z)}+\chi_2(z) \tag{1.10}$$

положив

$$\chi_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{\{g_1(t)-g_1(\alpha)\}}{\Delta_1(t)}\frac{dt}{t-z},\qquad \chi_2(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{\{g_2(t)-g_2(\alpha)\}}{\Delta_1(t)}\frac{dt}{t-z} \tag{1.11}$$

Так как плотности содержащихся в этих равенствах интегралов остаются непрерывными в точке $t=\alpha$, то можно (на основании же теоремы Коши) снова вести в них интегрирование по первоначальному контуру L. Это обстоятельство следует иметь в виду в дальнейшем.

Учитывая второе из равенств (1.6), легко получим

$$b_{j1}(z)g_1(\alpha)+b_{j2}(z)g_2(\alpha)=\frac{1}{2}\{f_1(\alpha)r_{j1}^{(1)}(z)+f_2(\alpha)r_{j2}^{(1)}(z)\}\quad (j=1,\ 2) \tag{1.12}$$

причем в этих равенствах положено

$$r_{11}^{(1)}(z)=2\left\{\begin{vmatrix}b_{11}(z) & b_{12}(z)\\ c_{21}(z) & c_{22}(z)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}b_{11}(z) & b_{12}(z)\\ c_{21}(z)-c_{21}(\alpha) & c_{22}(z)-c_{22}(\alpha)\end{vmatrix}\right\}$$

$$r_{12}^{(1)}(z)=2\begin{vmatrix}b_{11}(z) & b_{12}(z)\\ c_{11}(z)-c_{11}(\alpha) & c_{12}(z)-c_{12}(\alpha)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}d_{11}(z) & d_{12}(z)\\ c_{11}(z) & c_{12}(z)\end{vmatrix}$$

$$r_{21}^{(1)}(z)=\begin{vmatrix}d_{21}(z) & d_{22}(z)\\ c_{21}(z) & c_{22}(z)\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}b_{21}(z) & b_{22}(z)\\ c_{21}(z)-c_{21}(\alpha) & c_{22}(z)-c_{22}(\alpha)\end{vmatrix} \tag{1.13}$$

$$r_{22}^{(1)}(z)=2\left\{\begin{vmatrix}c_{11}(z) & c_{12}(z)\\ b_{21}(z) & b_{22}(z)\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}c_{11}(z)-c_{11}(\alpha) & c_{12}(z)-c_{12}(\alpha)\\ b_{21}(z) & b_{22}(z)\end{vmatrix}\right\}$$

В связи с формулами (1.9), (1.10), (1.11) и (1.12) система (1.8) может быть представлена в форме

$$\begin{gathered}\delta_{j1}(z)\varphi_1(z)+\delta_{j2}(z)\varphi_2(z)+f_1(\alpha)r_{j1}(z)+f_2(\alpha)r_{j2}(z)+\\+\Delta_1(z)\{b_{j1}(z)\chi_1^*(z)+b_{j2}(z)\chi_2^*(z)\}=0\quad(j=1,2)\end{gathered}\tag{1.14}$$

где введены обозначения

$$\begin{gathered}\chi_1^*(z)=\chi_1(z)-2f_1(\alpha)\frac{c_{22}(z)-c_{22}(\alpha)}{\Delta_1(z)}+2f_2(\alpha)\frac{c_{12}(z)-c_{12}(\alpha)}{\Delta_1(z)}\\ \chi_2^*(z)=\chi_2(z)+2f_1(\alpha)\frac{c_{21}(z)-c_{21}(\alpha)}{\Delta_1(z)}-2f_2(\alpha)\frac{c_{11}(z)-c_{11}(\alpha)}{\Delta_1(z)}\\ r_{11}(z)=2\begin{vmatrix}b_{11}(z)&b_{12}(z)\\c_{21}(z)&c_{22}(z)\end{vmatrix},\qquad r_{12}(z)=-\begin{vmatrix}d_{11}(z)&d_{12}(z)\\c_{11}(z)&c_{12}(z)\end{vmatrix}\\ r_{21}(z)=\begin{vmatrix}d_{21}(z)&d_{22}(z)\\c_{21}(z)&c_{22}(z)\end{vmatrix},\qquad r_{22}(z)=2\begin{vmatrix}c_{11}(z)&c_{12}(z)\\b_{21}(z)&b_{22}(z)\end{vmatrix}\end{gathered}\tag{1.15}$$

Как нетрудно убедиться:

$$\begin{vmatrix}\delta_{11}(z)&\delta_{12}(z)\\\delta_{21}(z)&\delta_{22}(z)\end{vmatrix}=\Delta_1(z)\Delta_2(z)\tag{1.16}$$

Рзрешив теперь систему (1.14) относительно неизвестных $\varphi_j(z)$ $(j=1,2)$ и проделав некоторые преобразования, найдем

$$\begin{gathered}\varphi_1(z)=\frac{1}{\Delta_2(z)}[f_1(\alpha)\{\delta_{22}(z)-\Delta_2(z)\}-f_2(\alpha)\delta_{12}(z)-\\-\varepsilon_{11}(z)\chi_1^*(z)-\varepsilon_{12}(z)\chi_2^*(z)]\\ \varphi_2(z)=\frac{1}{\Delta_2(z)}[-f_1(\alpha)\delta_{21}(z)+f_2(\alpha)\{\delta_{11}(z)-\Delta_2(z)\}-\\-\varepsilon_{21}(z)\chi_1^*(z)-\varepsilon_{22}(z)\chi_2^*(z)]\end{gathered}\tag{1.17}$$

причем положено

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11}(z)=\begin{vmatrix}b_{11}(z)&b_{21}(z)\\\delta_{12}(z)&\delta_{22}(z)\end{vmatrix},\qquad \varepsilon_{12}(z)=\begin{vmatrix}b_{12}(z)&b_{22}(z)\\\delta_{12}(z)&\delta_{22}(z)\end{vmatrix}\\ \varepsilon_{21}(z)=\begin{vmatrix}b_{21}(z)&b_{11}(z)\\\delta_{21}(z)&\delta_{11}(z)\end{vmatrix},\qquad \varepsilon_{22}(z)=\begin{vmatrix}b_{22}(z)&b_{12}(z)\\\delta_{21}(z)&\delta_{11}(z)\end{vmatrix}\end{gathered}\tag{1.18}$$

Из этих формул следует, что при сделанном выше предположении относительно $\Delta_2(z)$ функции $\varphi_j(z)$ $(j=1,2)$ на самом деле являются регулярными[1] в области S.

Перейдя в равенствах (1.17) к пределу $z\to t_0$, где t_0 — точка контура L, и внеся в них выражения для $\varphi_j(t)$ из формул (1.4), найдем затем искомые функции $\omega_j(t)$. После некоторых простых

[1] Как уже указывалось ранее, интегрирование по кривой L' в тех слагаемых формул (1.17), где оно встречается, можно заменить интегрированием по L.

преобразований выражения для этих функций примут вид: (1.19)

$$\omega_1(t)=c_{22}(t)\frac{f_1(t)-f_1(\alpha)}{\Delta_1(t)}-c_{12}(t)\frac{f_2(t)-f_2(\alpha)}{\Delta_1(t)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta_2(t)}[f_1(\alpha)d_{22}(t)-f_2(\alpha)d_{12}(t)+$$

$$+\{b_{21}(t)d_{12}(t)-b_{11}(t)d_{22}(t)\}\chi_1^*(t)+\{b_{22}(t)d_{12}(t)-b_{12}(t)d_{22}(t)\}\chi_2^*(t)]$$

$$\omega_2(t)=c_{11}(t)\frac{f_2(t)-f_2(\alpha)}{\Delta_1(t)}-c_{21}(t)\frac{f_1(t)-f_1(\alpha)}{\Delta_1(t)}+$$

$$+\frac{1}{\Delta_2(t)}[-f_1(\alpha)d_{21}(t)+f_2(\alpha)d_{11}(t)+$$

$$+\{b_{11}(t)d_{21}(t)-b_{21}(t)d_{11}(t)\}\chi_1^*(t)+\{b_{12}(t)d_{21}(t)-b_{22}(t)d_{11}(t)\}\chi_2^*(t)]$$

При выводе формул (1.19), в частности, предполагалось, что функции $a_{kj}(t)$, $b_{kj}(t)$ и $f_k(t)$ — аналитические в точке $t=\alpha$. Однако из этих формул непосредственно ясно, что функции $\omega_j(t)$ непрерывны и удовлетворяют на L условию Гельдера, если указанные функции удовлетворяют на L условию Гельдера, и, кроме того, имеют также удовлетворяющие условию Гельдера первые производные в точке $t=\alpha$.

Далее используя известную формулу Пуанкаре-Бертрана

$$\int_L\frac{dt}{t-t_0}\int_L\frac{\varphi(t,t_1)}{t_1-t}dt_1=-\pi^2\varphi(t_0,t_0)+\int_L dt_1\int_L\frac{\varphi(t,t_1)\,dt}{(t-t_0)(t_1-t)}$$

можно непосредственной подстановкой в (1.1) выражений (1.19) для $\omega_j(t)$ убедиться, что последние (при всех сформулированных выше условиях) действительно удовлетворяют системе (1.1).

Пример I. Пусть задана система сингулярных уравнений

$$\begin{aligned}&(e^{t_0}+t_0)\omega_1(t_0)+\omega_2(t_0)+\frac{t_0}{\pi i}\int_L\frac{\omega_1(t)}{t-t_0}dt+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega_2(t)}{t-t_0}dt=t_0\\&e^{t_0}\omega_1(t_0)+3t_0\omega_2(t_0)+\frac{e^{t_0}}{\pi i}\int_L\frac{\omega_1(t)}{t-t_0}dt+\frac{t_0}{\pi i}\int_L\frac{\omega_2(t)}{i-t_0}dt=2\end{aligned}\qquad(1.20)$$

Здесь

$$\Delta_1(z)=2ze^z,\qquad \Delta_2(z)=4\{2z^2+(z-1)e^z\}\qquad(1.21)$$

Если корень $z=0$ функции $\Delta_1(z)$ лежит вне или на кривой L, а $\Delta_2(z)$ не обращается в нуль в замкнутой области S, то система (1.20) имеет решение

$$\omega_1(t)=\frac{4(t^2-1)}{\Delta_2(t)},\qquad \omega_2(t)=-\frac{1}{2}+\frac{4t(t+1)}{\Delta_2(t)}\qquad(1.22)$$

Пример II. Рассмотрим еще систему уравнений:

$$\begin{aligned}&(3t_0-2)\omega_1(t_0)-\omega_2(t_0)-\frac{t_0}{\pi i}\int_L\frac{\omega_1(t)}{t-i_0}dt+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega_2(t)}{t-t_0}dt=2\\&3\omega_1(t_0)+2(t_0+3)\omega_2(t_0)-\frac{3}{\pi i}\int_L\frac{\omega_1(t)}{t-t_0}dt-\frac{2t_0}{\pi i}\int_L\frac{\omega_2(t)}{t-t_0}dt=2t_0\end{aligned}\qquad(1.23)$$

где

$$\Delta_1(t)=16t(t+1),\qquad \Delta_2(t)=12(t-1)\qquad(1.24)$$

Считая, что корни $z=0$ и $z=-1$ функции $\Delta_1(z)$ лежат вне или на L, а точка $z=1$ лежит вне S, найдем, что приведенная система имеет при этом решение

$$\omega_1(t)=\frac{1}{t-1}, \qquad \omega_2(t)=\frac{t}{3} \tag{1.25}$$

Примечание I. Если функция $\Delta_1(z)$ имеет корни в области S, то, как легко убедиться, в правых частях формул (1.19) при этом появятся дополнительные слагаемые, зависящие, вообще говоря, от нескольких произвольных постоянных. Распоряжаясь последними, часто оказывается возможным в том случае, когда $\Delta_2(z)$ имеет корни в замкнутой области S, число которых не превосходит числа корней $\Delta_1(z)$, лежащих в S, добиться, чтобы функции $\varphi_j(z)$ $(j=1, 2)$ были регулярными в области S и непрерывными вплоть до контура L, а искомое решение $\omega_j(t)$ $(j=1,2)$ непрерывным на L. Поясним сказанное.

Допустим, что в системе (1.20), рассмотренной в примере 1, контур L содержит внутри себя начало координат, так что $\Delta_1(z)$ имеет в области S простой корень $z=0$. В этом случае, если $\Delta_2(z)$ не имеет корней в замкнутой области S, из системы (1.20) найдем

$$\omega_1(t)=4\,\frac{c+t^2}{\Delta_2(t)}, \qquad \omega_2(t)=\frac{1}{2t}\left\{(c+2)-\frac{4(c+t^2)e^t}{\Delta_2(t)}\right\} \tag{1.26}$$

где C — произвольная постоянная. Если же функция $\Delta_2(z)$ имеет в замкнутой области S простой корень $z=z_0$, то, взяв $c=-z_0^2$, мы, как легко видеть, получим непрерывное решение $\omega_j(t)$ системы (1.20).

Предполагая теперь, что в (1.23) контур L содержит внутри себя корень $z=0$ функции $\Delta_1(z)$, причем точка $z=-1$ лежит вне или на L, и считая попрежнему, что $\Delta_2(z)$ не обращается в нуль в замкнутой области S, найдем, что система (1.23) имеет при этом решение

$$\omega_1(t)=\frac{4t-c(t+1)}{4t(t-1)}, \qquad \omega_2(t)=\frac{4t^2+c(2t-3)}{12t} \tag{1.27}$$

где c — произвольная постоянная. При $c=2$ получим (для указанного расположения точек $z=0$ и $z=-1$) решение той же системы для случая, когда корень $z=1$ функции $\Delta_2(z)$ лежит в области S или на контуре L.

Однако произвольные постоянные, если таковые содержатся в решении системы (1.1), разумеется, не всегда можно определить таким образом[1], чтобы найденное решение сохраняло силу также в случае, когда некоторые из корней $\Delta_2(z)$ лежат в замкнутой области S.

Примере III. Пусть задана система уравнений:

$$\begin{aligned} &(t_0^2+1)\,\omega_1(t_0)+2t_0\,\omega_2(t_0)-\frac{(t_0^2-1)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_1(t)}{t-t_0}\,dt-\frac{4}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_2(t)}{t-t_0}\,dt=1 \\ &t_0(t_0-1)\,\omega_1(t_0)+4t_0\omega_2(t_0)-\frac{(t_0^2+t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_1(t)}{t-t_0}\,dt-\frac{2}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_1(t)}{t-t_0}\,dt=t_0 \end{aligned} \tag{1.28}$$

[1] Очевидно, такой выбор постоянных всегда возможен, если существует решение (1.1) при указанных условиях.

Для этой системы

$$\Delta_1(t) = 4t^2(t-1), \qquad \Delta_2(t) = 4(t^2-1)$$

Если точка $z=0$ принадлежит области S, а точки $z=\pm 1$ лежат вне контура L, то из этой системы найдем сначала функции

$$\varphi_1(z) = \frac{2(3z^3+2z^2+5z+2)\ (z+1)(z^2+3)(c_1+c_2 z)}{z^2-1}$$

$$\varphi_2(z) = \frac{2(3z^3+4z^2+4z+1)(z+1)+(z^2+z+2)(c_1+c_2 z)}{z^2-1} \tag{1.29}$$

и затем искомое решение (1.30)

$$\omega_1 = \frac{(5t^3-t^2+t+1)+(t^3+1)(c_1+c_2 t)}{2t^2(t^2-1)}, \qquad \omega_2 = \frac{(t^2+4t+1)+(t+1)(c_1+c_2 t)}{2(t^2-1)}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Считая точку $z=1$, являющуюся одновременно корнем $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$, лежащей на контуре L, мы получим непрерывное решение системы (1.28), положив $c_1+c_2=-4$. Однако ясно, что эта же система неразрешима, если (при указанном расположении точек $z=0$ и $z=1$) точка $z=-1$ лежит в области S или на контуре L, так как в этом случае остающуюся произвольной одну из постоянных c_1 или c_2 нельзя определить из условия непрерывности $\varphi_j(z)$ при $z=-1$.

Примечание II. Если коэффициенты $a_{kj}(z)$ и $b_{kj}(z)$ системы (1.1) регулярны во внешности контура L, исключая, быть может, бесконечно удаленной точки, где они имеют особенность в виде полюса, то ее решение (если таковое существует) также может быть получено способом, аналогичным изложенному выше. Следуя ему, нужно систему (1.1) преобразовать к форме, подобной (1.5), но содержащей уже предельные значения интегралов типа Коши извне области S, и свести задачу к определению двух функций $\varphi_j(z)$ $(j=1,2)$, регулярных вне L.

Примечание III. В том случае, когда некоторые из коэффициентов $a_{kj}(z)$ и $b_{kj}(z)$ имеют полюсы в области S, можно, умножив соответствующее или каждое из уравнений (1.1) на специально подобранные полиномы, привести систему (1.1) к форме, рассмотренной выше.

В частном случае, когда функции $a_{kj}(t)$ и $b_{kj}(t)$ рациональные, решение системы (1.1), если только оно существует, всегда может быть получено с помощью указанного приема.

Более полное, нежели приведенное здесь, исследование вопроса дается ниже в применении к одному сингулярному уравнению.

§ 2. Рассмотрим сингулярное уравнение

$$A(t_0)\,\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt = f(t_0) \tag{2.1}$$

где коэффициенты $A(z)$ и $B(z)$ — известные функции, регулярные в области S и дифференцируемые так же, как заданная функция $f(t)$, требуемое число раз на контуре L. В данном случае

$$\Delta_1(t) = A(t) - B(t), \qquad \Delta_2(t) = A(t) + B(t) \tag{2.2}$$

Допустим, что функция $\Delta_1(z)$ имеет корни α_k соответственно кратности λ_k $(k=1, \ldots, m)$ на контуре L и простые корни β_k $(k=1, \ldots, n)$ в области[1] S. Относительно же функции $\Delta_2(z)$ предположим, что число ее корней в замкнутой области S не превосходит n; обозначим эти корни через γ_k $(k=1, \ldots, l)$ и для удобства будем считать их также простыми. Пусть $\delta(z)$ — полином от z степени $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_m-1$, определяемый из условий

$$\delta^{(\nu_{kj})}(\alpha_k)=f^{(\nu_{kj})}(\alpha_k) \qquad (\nu_{kj}=j;\ j=0, 1, \ldots, \lambda_k-1;\ k=1, \ldots, m) \tag{2.3}$$

Предполагая пока, аналогично тому, как прежде, что функции $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ — аналитические в точках α_k $(k=1, \ldots, m)$, положим

$$f(t)=\delta(t)+g(t) \tag{2.4}$$

где, очевидно, функция $g(t)$ имеет в окрестности точек α_k вид

$$g(t)=(t-\alpha_k)^{\lambda_k} g_k(t) \qquad (k=1, \ldots, m) \tag{2.5}$$

причем $g_k(t)$ ограничены на L. Введем функцию

$$\varphi(t)=\frac{\{A(t)-B(t)\}\,\omega(t)-f(t)}{B(t)} \tag{2.6}$$

Она будет регулярна в области S; при этом аналогично формуле (1.5) будем иметь

$$\varphi(z)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt=0 \tag{2.7}$$

для точек z, лежащих в области S'. Подставив в последнее равенство вместо функции $\omega(t)$ ее выражение из (2.6), получим

$$\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{B(t)\,\varphi(t)}{\Delta_1(t)}\frac{dt}{t-z}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{\delta(t)}{\Delta_1(t)}\frac{dt}{t-z}+F(z)=0 \tag{2.8}$$

где

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{g(t)}{\Delta_1(t)}\frac{dt}{t-z}$$

В окрестности точки $z=\beta_k$ имеем

$$\frac{1}{\Delta_1(z)}=\frac{a_k}{z-\beta_k}+\cdots \tag{2.9}$$

при этом a_k — некоторая постоянная и через многоточие обозначена правильная часть разложения. По теореме Коши находим

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{\delta(t)}{\Delta_1(t)}\frac{dt}{t-z}=2\,\frac{\delta(z)}{\Delta_1(z)}-2\sum_{1}^{n}\frac{a_k\,\delta(\beta_k)}{z-\beta_k}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{B(t)\,\varphi(t)}{\Delta_1(t)}\frac{dt}{t-z}=\frac{2\,B(z)\,\varphi(z)}{\Delta_1(z)}-2\sum_{1}^{n}\frac{a_k\,B(\beta_k)\,\varphi(\beta_k)}{z-\beta_k}$$

---

[1] Случай, когда некоторые из корней β_k функции $\Delta_1(z)$ кратные, как ясно из дальнейшего, не вносит каких-либо существенных усложнений.

Учитывая эти формулы, из равенства (2.8) получим

$$\varphi(z)=\frac{1}{\Delta_2(z)}\left[\Delta_1(z)\left\{\sum_1^n \frac{b_k}{z-\beta_k}-F(z)\right\}-2\delta(z)\right] \tag{2.10}$$

где

$$b_k=2a_k\{\delta(\beta)+B(\beta_k)\varphi(\beta_k)\} \qquad (k=1,\ldots,n) \tag{2.11}$$

Отсюда, предполагая, что корни $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$ не совпадают между собой, заключаем, что постоянные b_k для того, чтобы функция $\varphi(z)$ была регулярна в области S, должны удовлетворять соотношениям

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{\gamma_j-\beta_k}=2\frac{\delta(\gamma_j)}{\Delta_1(\gamma_j)}+F(\gamma_j) \qquad (j=1,\ldots,l) \tag{2.12}$$

Из этой системы при $l=n$ могут быть определены все постоянные b_k и затем $\varphi(\beta_k)$. Если же $l<n$, то любые $n-l$ из этих постоянных остаются произвольными.

Считая, что b_k выбраны указанным образом, найдем из формулы (2.6) искомое решение. Оно может быть представлено в форме

$$\omega(t)=\frac{g(t)}{\Delta_1(t)}+\frac{1}{\Delta_2(t)}\left[\delta(t)+B(t)\left\{\sum_1^n \frac{b_k}{t-\beta_k}-F(t)\right\}\right] \tag{2.13}$$

где под $F(t)$ следует понимать предельное значение функции $F(z)$ изнутри области S.

Это выражение для $\omega(t)$ сохраняет смысл, если функции $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют условию Гельдера на кривой L и, кроме того, в точках $t=\alpha_k$ имеют также удовлетворяющие условию Гельдера производные по аргументу t до порядка λ_k включительно.

Легко непосредственно проверить, что найденная функция $\omega(t)$ при этих условиях действительно удовлетворяет уравнению (2.1).

Примечание. Если некоторые из корней β_k и γ_k функций $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$ совпадают между собой, то $\varphi(z)$ остается в них регулярной. В самом деле, пусть, например, $\beta_{k_1}=\gamma_{k_2}$ (где k_1 — какое-либо из чисел $k=1,\ldots,n$, а k_2 — какое-либо число из $k=1,\ldots,l$). Замечая, что при этом

$$A(\beta_{k_1})=B(\beta_{k_1})=0 \qquad b_{k_1}=2a_{k_1}\delta(\beta_{k_1})$$

и учитывая еще формулу (2.10), сразу убеждаемся в справедливости сказанного.

§ 3. Предположим теперь, что функции $A(z)$ и $B(z)$ регулярны всюду вне L, исключая бесконечно удаленной точки, где они, вообще говоря, могут иметь особенность в виде полюса.

Обозначим через α_k корни функции $\Delta_2(t,)$ лежащие на L, и через λ_k их кратность. Далее, через β_k $(k=1,\ldots,n)$ и γ_k $(k=1,\ldots,l)$ обозначим (простые) корни соответственно функций $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$, лежащие вне L.

Положим здесь

$$\varphi(t)=\frac{\{A(t)+B(t)\}\,\omega(t)-f(t)}{B(t)} \tag{3.1}$$

Как легко усмотреть из уравнения (2.1), функция $\varphi(z)$ регулярна вне L и обращается в нуль на бесконечности. Допуская, как прежде, временно, что $A(t)$, $B(t)$ и $f(t)$ регулярны при $t=\alpha_k$, и введя контур L'', весьма мало отличающийся от L в окрестности точек $t=\alpha_k$ и содержащий внутри себя последние, получим (подобно (2.7)) с помощью аналитического продолжения

$$\varphi(z)+\frac{1}{\pi i}\int_{L''}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt=0 \tag{3.2}$$

для всех z, принадлежащих бесконечной области S'', ограниченной кривой L''. Подставив в это равенство вместо функции $\omega(t)$ ее выражение через $\varphi(t)$ из (3.1), будем иметь

$$\varphi(z)+\frac{1}{\pi i}\int_{L''}\frac{B(t)\,\varphi(t)}{\Delta_2(t)}\,\frac{dt}{t-z}+\frac{1}{\pi i}\int_{L''}\frac{\delta(t)}{\Delta_2(t)}\,\frac{dt}{t-z}+F_2(z)=0 \tag{3.3}$$

где

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{L''}\frac{g(t)}{A(t)+B(t)}\,\frac{dt}{t-z}$$

Введем функции

$$\chi_j(z)=\frac{B(z)}{\Delta_j(z)},\qquad \chi(z)=\frac{\delta(z)}{\Delta_2(z)}\qquad (j=1,\,2) \tag{3.4}$$

и предположим, что в окрестности бесконечно удаленной точки $\chi(z)$ имеет полюс порядка ν, а $\chi_2(z)$ — полюс порядка μ. В этом случае, учитывая вблизи $z=\gamma_k$ разложение

$$\frac{1}{\Delta_2(t)}=\frac{a_{2k}}{z-\gamma_k}+\cdots \tag{3.5}$$

где a_{2k} — некоторая постоянная, будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{1}{\pi i}\int_{L''}\frac{B(t)\,\varphi(t)}{\Delta_2(t)}\,\frac{dt}{t-z}=-\frac{2\,B(z)}{\Delta_2(z)}\,\varphi(z)+\sum_{1}^{l}\frac{2\,a_{2k}\,B(\gamma_k)\,\varphi(\gamma_k)}{z-\gamma_k}+\sum_{0}^{\mu-1}c_k{}'z^k\\ \frac{1}{\pi i}\int_{L''}\frac{\delta(t)}{\Delta_2(t)}\,\frac{dt}{t-z}=-\frac{2\,\delta(z)}{\Delta_2(z)}+2\sum_{1}^{l}\frac{a_{2k}\,\delta(\gamma_k)}{z-\gamma_k}+\sum_{0}^{\nu}c_k{}''z^k,\end{gathered} \tag{3.6}$$

где $c_k{}'$ и $c_k{}''$ — некоторые постоянные. Из равенства (3.3) найдем

$$\varphi(z)=\frac{1}{\Delta_1(z)}\left[2\delta(z)-\Delta_2(z)\left\{G(z)+F(z)\right\}\right] \tag{3.7}$$

где

$$G(z)=\sum_{0}^{\varepsilon}c_kz^k+\sum_{1}^{l}\frac{b_{2k}}{z-\gamma_k},\qquad b_{2k}=2a_k\left\{B(\gamma_k)\,\varphi(\gamma_k)+\delta(\gamma_k)\right\} \tag{3.8}$$

причем c_k — новые постоянные и ε — наибольшее из чисел ν и $\mu-1$. Нетрудно видеть, что функция $\varphi(z)$, определяемая последней формулой, обращается в нуль на бесконечности. Действительно, при достаточно больших по модулю значениях z функция $\varphi(z)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(z)=\frac{\Delta_2(z)}{\Delta_1(z)}\left(-\sum_{0}^{\mu-1}c_k{}'z^k+\cdots\right) \tag{3.9}$$

где через многоточие обозначены слагаемые, стремящиеся к нулю с возрастанием модуля z.

С другой стороны, имея в виду разложение $\chi_2(z)$ и соотношение

$$\frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)} = 1 - 2\chi_2(z)$$

заключаем, что $\Delta_1(z)/\Delta_2(z)$ также имеет на бесконечности полюс[1] порядка μ. Отсюда вытекает наше утверждение.

Если число корней $\Delta_1(z)$, лежащих вне контура L и на нем, не превосходит $\mu + l$, то, определив все или некоторые из коэффициентов c_k' и b_{2k} из условия обращения в нуль выражения, содержащегося в квадратных скобках в формуле (3.7) при $z = \beta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, добьемся регулярности функции $\varphi(z)$ всюду вне L. После этого из (3.6) найдем искомое решение $\omega(t)$.

В том же случае, когда число указанных корней функции $\Delta_1(z)$ превосходит $\mu + l$, уравнение (2.1), вообще говоря, неразрешимо.

Примечание I. Допустим, что при достаточно больших по модулю z имеем

$$\chi_2(z) = \frac{\varepsilon_k}{z^k} + \frac{\varepsilon_{k+1}}{z^{k+1}} + \cdots \quad (k \geqslant 1)$$

где ε_k — постоянные. Тогда в формуле (3.7) следует положить все $c_k' = 0$. При этом функция $\varphi(z)$ попрежнему обращается в нуль на бесконечности и уравнение (2.1) разрешимо, если число корней $\Delta_1(z)$, лежащих в области S^* (внешней к S) и на кривой L, не превосходит l.

Примечание II. Пусть в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\chi_2(z) = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1}{z} + \cdots \tag{3.10}$$

и отсюда

$$\chi_1(z) = (1 - 2\varepsilon_0) - \frac{2\varepsilon_1}{z} + \cdots \tag{3.11}$$

При этом также в (3.7) все $c_k' = 0$.

Если, кроме того, $1 - 2\varepsilon_0 \neq 0$, то функция $\varphi(z)$ здесь также равна нулю на бесконечности и уравнение (2.1) разрешимо при условии, указанном в конце предшествующего примечания.

Допустим, что $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Тогда для достаточно больших по модулю z имеем

$$\frac{\Delta_1(z)}{\Delta_2(z)} = -\frac{2a_1}{z} - \cdots, \qquad \lim_{z\to\infty} \frac{A(z)}{B(z)} = 1$$

и функция $\varphi(z)$ (так как $c_k' = 0$) будет ограниченной, но, вообще говоря, не равной нулю на бесконечности. В этом случае на коэффициенты b_k, помимо условий, вытекающих из требования регулярности $\varphi(z)$ в S^*, нужно наложить еще допол-

---

[1] Между прочим из формулы (3.4) следует, что

$$\chi_1(z) = \frac{\chi_2(z)}{1 - 2\chi_2(z)}$$

и в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\chi_1(z) = -\frac{1}{2} + \cdots$$

где через многоточие обозначена функция, убывающая с возрастанием z по модулю.

нительное условие (оно легко может быть выписано), обеспечивающее обращение функции $\varphi(z)$ в нуль на бесконечности.

Уравнение (2.1) будет резрешимо, если все эти условия удастся соблюсти. Последнее, вообще говоря, всегда возможно, если число корней функции $\Delta_1(z)$, заключающихся в замкнутой области S^*, не превосходит $l-1$.

Поясним сказанное на следующем примере. Пусть задано уравнение

$$t_0(t_0-2)\,\omega(t_0)+\frac{(t_0^2-6t_0+8)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt=\frac{1}{t_0}$$

Здесь

$$\Delta_1(z)=4(z-2),\qquad \Delta_2(z)=2(z-2)^2$$

и в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\frac{z^2-6z+8}{\Delta_2(z)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}-\ldots$$

Считая, что начало координат $z=0$ лежит внутри кривой L, а точка $z=2$ вне ее, получим, что

$$\varphi(z)=\frac{z-2}{8z}-\frac{1}{2(z-2)}\{c_1+c_2(z-2)\}$$

в области S^*. Для того чтобы она была регулярной при $z=2$ и обращалась в нуль на бесконечности, необходимо положить $c_1=0$ и $c_2=1/4$; искомое решение будет

$$\omega(t)=-\frac{t^2-6t+4}{8t(t-2)^2}$$

Примечание III. Изложенный прием можно использовать в применении к некоторым другим сингулярным уравнениям. Рассмотрим, например, уравнение вида

$$a\omega(t_0)+b\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)}{t^n-z^n}\,dt=f(t_0) \tag{3.12}$$

где n—любое целое положительное число, L—окружность единичного радиуса и стремление к пределу в левой части уравнения происходит изнутри L. Коэффициенты a и b для простоты будем считать постоянными величинами[1].

Введя здесь регулярную в единичном круге функцию

$$\varphi(t)=a\omega(t)-f(t) \tag{3.13}$$

и учитывая, что

$$\frac{1}{t^n-z^n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k(z)}{t-\alpha_k z},\qquad c_k(z)=\frac{\beta_k}{z^{n-1}},\qquad \beta_k=\Bigl(\prod_{j=0}^{n-1}{}'(\alpha_k-\alpha_j)\Bigr)^{-1} \tag{3.14}$$

где α_k—корни n-й степени из 1 и штрих над символом произведения указывает на пропуск множителя, отвечающего значению $j=k$, без труда найдем из (3.12)

$$z^{n-1}\varphi(z)+\frac{b}{a}\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k\varphi(\alpha_k z)=F(z) \tag{3.15}$$

где

$$F(z)=-\frac{b}{a}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{f(t)}{t-\alpha_k z}\,dt$$

---

[1] Аналогичным образом можно рассматривать случай, когда $a(z)$ и $b(z)$—любые регулярные в единичном круге функции.

Если стремление к пределу (3.12) происходит извне L, то за коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ можно взять любые регулярные вне единичного круга функции.

Заменяя в этом уравнении последовательно z на $\alpha_j z$ $(j=1, \ldots, n-1)$ и замечая, что $\alpha_k\alpha_j=\alpha_{k+j}$, если $k+j<n$, и $\alpha_k\alpha_j=\alpha_{k+j-n}$, если $k+j\geqslant n$, получим систему n уравнений относительно $\varphi(\alpha_k z)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$, из которой найдем $\varphi(z)$. Если последняя окажется на самом деле регулярной в единичном круге, то решение уравнения (3.12) существует и определяется из формулы (3.13).

§ 4. Рассмотрим систему сингулярных уравнений (4.1)

$$\sum_{j=1}^{2}\left\{a_{lj}(t_0)\,\omega_j(t_0)+\frac{b_{lj}(t_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\omega_j(t}{t-t_0}\,dt+\int\limits_L\omega_j(t)\,K_{lj}(t,t_0)\,dt\right\}=f_l(t_0)\quad(l=1,2)$$

причем будем считать, что $a_{lj}(t_0)$, $b_{lj}(t_0)$, $K_{lj}(t,t_0)$ и $f_l(t_0)$ — любые заданные функции, удовлетворяющие на кривой (из них ядра $K_{ej}(t,t_0)$ — в отдельности по каждой из переменных t и t_0) условию Гельдера. Кроме того, условимся считать их аналитическими в точке $t_0=\alpha$, предполагая, что последняя является корнем функции $\Delta_1(t)$ кратности m. Относительно же $\Delta_2(t)$ предположим, что она отлична от нуля на L.

После несложных преобразований и применения (аналогично предыдущему) принципа аналитического продолжения эту систему в предположении, что она имеет непрерывное решение $\omega_j(t)$, также удовлетворяющее условию Гельдера, можно заменить следующей:

$$\varphi_1(z)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{\omega_1(t)}{t-z}\,dt=0,\qquad\varphi_2(z)+\int\limits_{L'}\frac{\omega_2(t)}{t-z}\,dt=0\tag{4.2}$$

где аргумент z принадлежит области S' и

$$\varphi_k(t_0)=\frac{1}{\Delta(t_0)}\sum_{l=1}^{2}(-1)^{k+l}\,b_{l+1,k+1}(t_0)\left[\sum_{j=1}^{2}\left\{c_{lj}(t_0)\,\omega_j(t_0)+\right.\right.\tag{4.3}$$

$$\left.\left.+\int\limits_L\omega_j(t)\,K_{lj}(t,t_0)\,dt\right\}-f_l(t_0)\right],\quad\Delta(t)=\begin{vmatrix}b_{11}(t)&b_{12}(t)\\b_{21}(t)&b_{22}(t)\end{vmatrix}\qquad(k=1,2)$$

Для простоты, допустим, что определитель $\Delta(t_0)$ нигде на кривой L не обращается в нуль. Разрешив уравнения (4.3) относительно содержащихся в ней явно функций $\omega_j(t)$ $(j=1,2)$, получим

$$\Delta_1(t_0)\,\omega_k(t)=\sum_{j=1}^{2}\left\{\delta_{kj}(t_0)\,\varphi_j(t_0)-\int\limits_L\omega_j(t)\,G_{kj}(t,t_0)\,dt\right\}+g_k(t_0)\qquad(k=1,2)$$

где введены обозначения (4.4)

$$\delta_{kj}(t_0)=\sum_{l=1}^{2}(-1)^{k+l}\,c_{l+1,k+1}(t_0)\,b_{lj}(t_0),$$

$$g_k(t_0)=\sum_{l=1}^{2}(-1)^{k+l}\,c_{l+1,k+1}\,f_l(t_0),\tag{4.5}$$

$$G_{kj}(t,t_0)=\sum_{l=1}^{2}(-1)^{k+l}\,c_{l+1,k+1}\,K_{lj}(t,t_0)$$

Подставим в каждое из уравнений (4.2) под знаком интеграла вместо соответствующей плотности $\omega_k(t)$ ее выражение из (4.4). При этом, положив на кривой L

$$\frac{\delta_{kj}(t_0)}{\Delta_1(t_0)}=\sum_{l=1}^{m}\frac{\delta_{kj}^{(l)}}{(t_0-\alpha)^l}+P_{kj}(t_0)$$

$$\frac{g_k(t_0)}{\Delta_1(t_0)}=\sum_{l=1}^{m}\frac{g_k^{(l)}}{(t_0-\alpha)^l}+\chi_k(t_0) \tag{4.6}$$

$$\frac{G_{kj}(t,t_0)}{\Delta_1(t_0)}=\sum_{l=1}^{m}\frac{G_{kj}^{(l)}(t)}{(t_0-\alpha)^l}+Q_{kj}(t,t_0)$$

где $\delta_{kj}{}^{(l)}$, g_k и $G_{kj}{}^{(l)}$ (из них $\delta_{kj}{}^{(l)}$ и g_k постоянные) — коэффициенты главной части разложения функций, содержащихся в левых частях равенств в окрестности $t_0=\alpha$, и имея в виду легко вытекающие из теоремы Коши соотношения

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{\delta_{kj}(t)}{\Delta_1(t)}\frac{\varphi_j(t)}{t-z}\,dt=2\frac{\delta_{kj}(t_0)}{\Delta_1(t_0)}\varphi_j(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{P_{kj}(t)-P_{kj}(t_0)}{t-t_0}\varphi_j(t)\,dt$$

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{g_k(t)}{\Delta_1(t)}\frac{dt}{t-z}=2\frac{g_k(t)}{\Delta_1(t_0)}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{L'}\frac{\chi_k(t)-\chi_k(t_0)}{t-t_0}\,dt \tag{4.7}$$

$$-\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{1}{\Delta_1(t)}\left\{\int\limits_{L}\omega_j(t_1)G_{kj}(t_1,t)\,dt_1\right\}\frac{dt}{t-z}=$$

$$=-\frac{2}{\Delta_1(t_0)}\int\limits_{L}\omega_j(t)G_{kj}(t,t_0)\,dt-\int\limits_{L}\omega_j(t)\,dt\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{Q_{kj}(t,t_1)-Q_{kj}(t,t_0)}{t_1-t_0}\,dt_1$$

получим после некоторых вычислений

$$\sum_{j=1}^{2}\left\{\eta_{kj}(t_0)\varphi_j(t_0)-2\int\limits_{L}\omega_j(t)G_{kj}(t,t_0)\,dt\right\}+$$
$$+\Delta_1(t_0)M_k\{\omega_1(t),\omega_2(t),t_0\}+2g_k(t_0)=0\qquad(k=1,2) \tag{4.8}$$

Здесь оператор

$$M_k(\omega_1,\omega_2,t_0)=\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{P_{kj}(t)-P_{kj}(t_0)}{-t_0}\varphi_j(t)\,dt\right. \tag{4.9}$$

$$\left.-\int\limits_{L}\omega_j(t)\,dt\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{Q_{kj}(t,t_1)-Q_{kj}(t,t_0)}{t_1-t_0}\,dt_1\right]+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\chi_k(t)-\chi_k(t_0)}{t-t_0}\,dt$$

$$\eta_{kj}(t)=\begin{vmatrix}d_{kj}(t) & c_{k,k+1}(t)\\ d_{k+1,j}(t) & c_{k+1,k+1}(t)\end{vmatrix}\qquad(k,j=1,2)$$

причем, как уже отмечалось ранее, вместо индекса 3 всюду, где он встречается, нужно указывать индекс 1.

Интегрирование по кривой L' в формулах (4.7), как ясно из последних равенств, мы заменили интегрированием по L, что, очевидно, возможно в силу регулярности функций $P_{kj}(t_0)$, $Q_{kj}(t_0)$ и $\chi_k(t_0)$ при

$t_0 = \alpha$. Кроме того, в дальнейшем будем считать, что вместо функций $\varphi_j(t)$ $(j=1,2)$, заключающихся под знаками некоторых из интегралов в формулах (4.9), для операторов M_k подставлены их выражения из равенств (4.3). Разрешив далее систему (4.8) относительно (содержащихся в ней явно) функций $\varphi_k(t)$, будем иметь

$$\Delta_2(t_0)\varphi_k(t_0) - \sum_{l=1}^{2}(-1)^{k+l}\, 2d_{l+1,k+1}(t_0)\left\{\sum_{j=1}^{2}\int_L \omega_j(t)\, K_{lj}(t, t_0)\, dt - f_l(t_0)\right\} -$$
$$- \lambda_{kl}(t_0) M_l(\omega_1, \omega_2, t_0)] = 0 \qquad (k=1,\ 2) \qquad (4.10)$$

где

$$\lambda_{kl}(t) = \begin{vmatrix} c_{kl}(t) & c_{k+1,l}(t) \\ d_{k,k+1}(t) & d_{k+1,k+1}(t) \end{vmatrix} \qquad (k,\ l=1,\ 2) \qquad (4.11)$$

Наконец, подставив сюда вместо функций $\varphi_k(t)$ их выражения из (4.3) и проделав некоторые вычисления, получим окончательно следующую систему уравнений Фредгольма:

$$\omega_k(t_0) + \frac{(-1)^k}{\Delta_2(t_0)}\sum_{l=1}^{2}\Big[(-1)^l d_{l+1,k+1}(t_0)\left\{\sum_{j=1}^{2}\int_L \omega_j(t)\, K_{lj}(t, t_0)\, dt -\right.$$
$$\left. - f_l(t_0)\right\} - \mu_{kl}(t_0) M_l(\omega_1, \omega_2, t_0)\Big] = 0 \qquad (4.12)$$

при этом положено

$$\mu_{kl}(t) = \begin{vmatrix} b_{1l}(t) & d_{1,k+1}(t) \\ b_{2l}(t) & d_{2,k+1}(t) \end{vmatrix} \qquad (k,\ l=1,\ 2) \qquad (4.13)$$

Примечание I. Приведенное здесь изложение (равно как опущенные промежуточные выкладки) значительно упрощается, если вместо системы (4.1) мы имеем одно сингулярное уравнение. Поскольку именно этот случай преимущественно служил предметом особенно многочисленных исследований различных авторов, мы позволим себе кратко на нем остановиться.

Пусть сингулярное уравнение имеет вид:

$$A(t_0)\,\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t_0)}{t-t_0}\, dt + \int_L \omega(t)\, K(t, t_0)\, dt = f(t_0) \qquad (4.14)$$

где $A(t_0)$, $B(t_0)$, $K(t, t_0)$ и $f(t_0)$ — любые функции, удовлетворяющие вместе с $\Delta_j(t)$ $(j=1,\ 2)$, определяемыми формулой (2.2), тем же условиям, что аналогичные функции для системы (4.1). Будем также считать, что коэффициент $B(t)$ (в который вырождается определитель $\Delta(t)$) всюду на L отличен от нуля[1]. Введя здесь функцию

$$\varphi(t) = \frac{1}{B(_0)}\left[\{A(t_0) - B(t_0)\}\,\omega(t_0) + \int_L \omega(t)\, K(t, t_0)\, dt - f(t_0)\right] \qquad (4.15)$$

преобразуем уравнение (4.14) к форме

$$\varphi(z) + \frac{1}{\pi i}\int_{L'} \frac{\omega(t)}{t-z}\, dt = 0 \qquad (4.16)$$

---

[1] В последующих примечаниях этого же параграфа мы рассмотрим уравнение (4.14) при иных предположениях относительно функций $\Delta_j(t)$ $(j=1,\ 2)$ и коэффициента $B(t)$.

где z—любая точка области S'. Положим затем

$$\frac{B(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(t_0-\alpha)^k}+Q(t_0)$$

$$\frac{f(t_0)}{A(t_0)-B(t^0)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{(t_0-\alpha)^k}+g(t_0)$$

$$\frac{K(t,t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{r_k(t)}{(t_0-\alpha)^k}+R(t,t_0) \qquad (4.17)$$

где $r_k(t)$, $g(t_0)$, $Q(t_0)$ и $R(t,t_0)$ - некоторые функции и a_k, b_k - постоянные, причем первые слагаемые в правых частях этих равенств имеют тот же смысл, что в формулах (4.6). Используя далее вытекающие из (4.17) соотношения

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{B(t)}{A(t)-B(t)}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt=\frac{2B(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}\varphi(t)\,dt$$

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{1}{A(t)-B(t)}\frac{K(t_1,t)}{t-z}dt=2\frac{K(t_1,t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{R(t_1,t)-R(t_1,t_0)}{t-t_0}dt \qquad (4.18)$$

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi t}\int_{L'}\frac{f(t)}{A(t)-B(t)}\frac{dt}{t-z}=2\frac{f(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}dt$$

и повторяя рассуждения, совершенно аналогичные предыдущим, получим для $\omega(t)$ уравнение Фредгольма

$$\omega(t_0)+\int_L\omega(t)G(t,t_0)\,dt=F(t_0) \qquad (4.19)$$

где ядро и свободный член соответственно равны:

$$G(t,t_0)=\frac{1}{A(t_0)+B(t_0)}\Bigg[K(t,t_0)+B(t_0)\left\{\frac{1}{\pi i}\left(\frac{A(t)-B(t)}{B(t)}\right)\left(\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\frac{K(t,t_1)}{B(t_1)}\left(\frac{Q(t_1)-Q(t_0)}{t_1-t_0}\right)-\frac{R(t,t_1)-R(t,t_0)}{t_1-t_0}\right]dt_1\right\}\Bigg] \qquad (4.20)$$

$$F(t_0)=\frac{1}{A(t_0)+B(t_0)}\left[f(t_0)+B(t_0)\frac{1}{\pi i}\int_L\left\{\frac{f(t)}{B(t)}\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}-\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right\}dt\right]$$

Примечание II. Преобразование сингулярной системы (4.1) к системе Фредгольма (4.12) было проведено в предположении, что определитель $\Delta(t)$ нигде на кривой L не обращается в нуль. (Подобно этому в предыдущем примечании для одного сингулярного уравнения мы считали, что коэффициент $B(t)\neq 0$.)

Рассуждения сохраняют силу, когда упомянутый определитель (коэффициент $B(t)$) обращается в нуль в некоторых точках контура L, но так, что при этом система (4.12) (уравнение (4.19)) остается в классе уравнений Фредгольма.

Однако нетрудно видеть, что даже в том случае, когда определитель $\Delta(t)$ (коэффициент $B(t)$) обращается в некоторых точках контура L в нуль таким образом, что указанная система (уравнение) перестает быть фредгольмовой, можно, несколько видоизменяя рассуждения, все же притти к уравнению Фредгольма. Поясним сказанное на примере одного сингулярного уравнения при указанных в примечании 1 предположениях относительно $\Delta_j(t)$ $(j=1,2)$.

Пусть $B(t)$ обращается в нуль в точках $t=\beta_k$, так что в окрестности их

$$B(t)=(t-\beta_k)^{\lambda_k}\,\Omega_k(t) \qquad (k=1,\ldots,s) \qquad (4.21)$$

где λ_k — некоторое, вообще говоря, комплексное число с превосходящей или равной единице вещественной частью и $\Omega_k(t)$ — функция, ограниченная в точке $t=\beta_k$. Обозначим через n_k наибольшее целое число, содержащееся в вещественной части λ_k, и через $E(t)$ — полином степени $n=n_1+\ldots+n_k$, имеющий корни $t=\beta_k$ соответственно кратности n_k.

Полагая $B(t)=B^*(t)\,E(t)$ и введя взамен (4.15) функцию

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{B^*(t_0)}\left[\{A(t_0)-B(t_0)\}\,\omega(t_0)+\int\limits_L\omega(t)\,K(t,t_0)\,dt-f(t_0)\right] \tag{4.22}$$

получим вместо (4.16) уравнение

$$\varphi(z)+\frac{E(z)}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt=0 \tag{4.23}$$

Поступая далее так же, как выше, придем к уравнению Фредгольма (4.19), в котором ядро и свободный член будут равны:

$$G(t,t_0)=\frac{1}{A(t)+B(t_0)}\left[K(t,t_0)+B(t_0)\left\{\frac{1}{\pi i}\left(\frac{A(t)-B(t)}{B^*(t)}\right)\left(\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\left[\frac{K(t,t_1)}{B^*(t_1)}\,\frac{Q(t_1)-Q(t_0)}{t_1-t_0}-\frac{R(t,t_1)-R(t,t_0)}{t_1-t_0}\right]dt_1\right\}\right] \tag{4.24}$$

$$F(t_0)=\frac{1}{A(t_0)+B(t_0)}\left[f(t_0)+B(t_0)\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\left\{\frac{f(t)}{B^*(t)}\,\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}-\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right\}dt\right]$$

Примечание III. Предположим теперь, что в уравнении (4.14) функция $\Delta_1(t)\neq 0$ на L, но $\Delta_2(t)$ имеет в точке $t=\alpha$ нуль m-го порядка.

Введем в этом случае, допуская для простоты, что $B(t)\neq 0$, функцию

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{B(t_0)}\left[\{A(t_0)+B(t_0)\}\,\omega(t_0)+\int\limits_L\omega(t)\,K(t,t_0)\,dt-f(t_0)\right] \tag{4.25}$$

регулярную вне L и равную нулю на бесконечности. Аналогично (4.16) имеем

$$\varphi(z)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L''}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt=0 \tag{4.26}$$

для всех z, лежащих вне контура L'', сколь угодно мало отличающегося от L лишь в окрестности точки $t=\alpha$ и заключающего внутри себя последнюю. Положим далее

$$\frac{B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(t_0-\alpha)^k}+Q(t_0)$$

$$\frac{f(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{(t_0-\alpha)^k}+g(t_0) \tag{4.27}$$

$$\frac{K(t,t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}=\sum_{k=1}^{m}\frac{r_k(t)}{(t_0-\alpha)^k}+R(t,t_0)$$

где смысл равенств очевиден, причем для удобства в правых частях приняты те же обозначения, что в аналогичных формулах (4.17).

Используя затем легко выводимые с помощью (4.27) соотношения[1]

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L''}\frac{B(t)}{A(t)+B(t)}\,\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt=-\frac{2B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}\,\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}\,\varphi(t)\,dt$$

---

[1] В формулах (4.28) предполагается, что точка t_0 лежит на кривой L''.

$$-\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int_{L''}\frac{1}{A(t)+B(t)}\left\{\int_L \omega(t_1)K(t_1,t)\,dt_1\right\}\frac{dt}{t-z}=2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(t_0-\alpha)^k}\int_L \omega(t)\,r_k(t)\,dt-$$
$$-\int_L \omega(t)\,dt\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{R(t,t_1)-R(t,t_0)}{t_1-t_0}\,dt_1$$

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int_{L''}\frac{f(t)}{A(t)+B(t)}\,\frac{dt}{t-z}=-2\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{(t_0-\alpha)^k}+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}dt \qquad (4.28)$$

получим для определения $\omega(t)$ уравнение Фредгольма (4.19), в котором

$$G(t,t_0)=\frac{1}{A(t_0)-B(t_0)}\Bigg[K(t,t_0)-B(t_0)\Bigg\{2R(t,t_0)-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\left(\frac{A(t)+B(t)}{B(t)}\right)\left(\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}\right)-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\frac{K(t,t_1)}{B(t_1)}\,\frac{Q(t_1)-Q(t_0)}{t_1-t_0}-\frac{R(t,t_1)-R(t,t_0)}{t_1-t_0}\right]dt_1\Bigg\}\Bigg]$$

$$F(t_0)=\frac{1}{A(t_0)-B(t_0)}\Bigg[f(t_0)-B(t_0)\Bigg\{2g(t_0)-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\frac{f(t)}{B(t)}\,\frac{Q(t)-Q(t_0)}{t-t_0}-\frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}\right]dt\Bigg\}\Bigg] \qquad (4.29)$$

Примечание IV. Отметим, что изложенный прием преобразования сингулярного уравнения в уравнение Фредгольма сохраняет без изменения силу также в том случае, когда в окрестности $t=\alpha$ на кривой L имеем

$$A(t)-B(t)=(t-\alpha)^{\lambda}\,\Omega(t)$$

где λ — комплексное число с положительной вещественной частью, функция $\Omega(t)$ регулярна при $t=\alpha$ и под $(t-\alpha)^{\lambda}$ понимается предельное значение изнутри области S какой-либо ветви $(z-\alpha)^{\lambda}$, выбранной на плоскости z с разрезом, не пересекающим S (при этом попрежнему предполагается, что $A(t)+B(t)\neq 0$ всюду на L).

Если же, наоборот, в окрестности $t=\alpha$ имеет место равенство

$$A(t)+B(t)=(t-\alpha)^{\lambda}\,\Omega(t)$$

причем $A(t)-B(t)\neq 0$ на L, то, представляя уравнение, сопряженное с заданным сингулярным, в виде

$$A^*(t_0)\,\omega^*(t_0)-\frac{B^*(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\omega^*(t)}{t-t_0}\,dt+\int_L \omega^*(t)\,K^*(t,t_0)\,dt=f^*(t_0)$$

где

$$K^*(t,t_0)=\overline{K(t,t_0)}\,\frac{\overline{dt}}{dt}+\frac{1}{\pi i}\frac{d}{dt}\log\frac{\overline{t-t_0}}{t-t_0}$$

(смысл остальных обозначений очевиден), мы (допуская для простоты, что кривая L аналитическая вблизи $t=\alpha$) снова придем к случаю, отмеченному выше.

§ 5. В теории сингулярных уравнений большое внимание уделяется исследованию вопроса об эквивалентности одного или системы сингулярных уравнений с уравнением Фредгольма, в которое они преобразуются.

Ограничиваясь для простоты изложения случаем одного сингулярного уравнения и остановившись для определенности на предположениях относительно

$\Delta_j(t)$ $(j=1, 2)$, принятых в примечании I предыдущего параграфа, выясним, при каких условиях оно будет эквивалентно уравнению Фредгольма (4.19), к которому с помощью указанного здесь приема нам удалось его привести.

При выводе уравнения (4.19) мы предполагали, что функция $\varphi(t)$, определяемая по формуле (4.15), аналитически продолжима в область S и в ней регулярна. Однако, как мы увидим, не всегда решение $\omega(t)$ уравнения (4.19) (если таковое существует), будучи подставлено в формулу (4.15), приводит к функции $\varphi(t)$, обладающей указанным свойством. Ниже мы покажем, что сингулярное уравнение (4.14) будет либо эквивалентно, либо неэквивалентно уравнению (4.19) в зависимости от того, обладает или не обладает решение последнего указанным свойством. Одновременно мы установим условия, при которых это свойство имеет место.

Проследив процесс построения уравнения (4.19), нетрудно усмотреть, что оно может быть представлено в форме

$$\{A(t_0)+B(t_0)\}\varphi(t_0)-B(t_0)\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt=\{A(t_0)-B(t_0)\}\chi(t_0) \tag{5.1}$$

где в левой части предельное значение интеграла типа Коши берется изнутри L' и $\chi(z)$ — регулярная в области S' функция, равная

$$\chi(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(z-\alpha)^k}+Q(t)\right\}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt-$$
$$-\frac{1}{\pi i}\int_{L'}\frac{1}{A(t)-B(t)}\left\{f(t)-\int_{L}\omega(t_1)K(t_1,t)\,dt_1\right\}\frac{dt}{t-z} \tag{5.2}$$

Введя обозначение

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt, \tag{5.3}$$

будем иметь из (5.1)

$$\Omega_i(t)-\frac{A(t)+B(t)}{A(t)-B(t)}\Omega_e(t)=\chi(t) \tag{5.4}$$

Здесь индексы i и e, приписанные к функции Ω, как обычно, указывают, что берется предельное значение последней соответственно изнутри и извне L'. Положим

$$\left[\log\frac{A(t)+B(t)}{A(t)-B(t)}\right]_{L'}=-2\pi i\varkappa \tag{5.5}$$

где левая часть обозначает приращение выражения, заключающегося в квадратных скобках, при обходе кривой L' в положительном направлении, и $\varkappa$ — некоторое целое число или нуль. Предположим сперва, что $\varkappa\geqslant 0$, и будем искать, следуя[2] Ф. Д. Гахову, функцию $\Omega(z)$ в виде

$$\Omega(z)=e^{\psi(z)}\Phi(z) \tag{5.6}$$

где $\Phi(z)$ и $\psi(z)$ — новые неизвестные функции; выбором одной из них можно распорядиться наиболее удобным для нас образом.

Подставив выражение (5.6) для $\Omega(z)$ в равенство (5.4), будем иметь

$$\Phi_i(t)\exp\psi_i(t)-\frac{A(t)+B(t)}{A(t)-B(t)}\Phi_e(t)\exp\psi_e(t)=\chi(t) \tag{5.7}$$

Определим $\psi(z)$ из условия

$$\exp\psi_i(t)=\frac{A(t)+B(t)}{A(t)-B(t)}t^{\varkappa}\exp\psi_e(t)$$

считая начало координат лежащим в области S'. Отсюда найдем, что

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{\mu(t)}{t-z}dt,\qquad \mu(t)=\log\left\{t^{\varkappa}\frac{A(t)+B(t)}{A(t)-B(t)}\right\} \tag{5.8}$$

и соотношение (5.7) примет вид:

$$\Phi_i(t) - \frac{\Phi_e(t)}{t^{\varkappa}} = \chi(t)\exp[-\psi_i(t)] \tag{5.9}$$

Из этого равенства, в силу регулярности $\chi(z)$ в области S', вытекает, что $\Phi_e(t)=0$, или, что то же самое, $\Omega_e(t)=0$. Последнее же в свою очередь означает, что функция $\varphi(z)$ будет регулярна в S' и, как следует из (5.1), равна $\chi(z)$.

Принимая далее во внимание равенство

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(z-\alpha)^k}+Q(t)\right\}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{B(t)}{A(t)-B(t)}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt$$

и имея в виду формулу (5.2), придем к уравнению

$$\varphi(z)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{1}{A(t)-B(t)}\left[B(t)\varphi(t)-\int\limits_{L}\omega(t_1)K(t_1, t)\,dt_1+f(t)\right]\frac{dt}{t-z}=0$$

которое в силу (4.15) эквивалентно исходному сингулярному уравнению (4.14).

Допустим теперь, что $\varkappa < 0$. Для удобства возьмем $\varkappa = -n$, где $n > 0$.

В этом случае, определив $\psi(z)$ из того же условия (5.8), получим вместо (5.9) равенство

$$\Phi_i(t) - t^n\Phi_e(t) = \chi(t)\exp[-\psi_i(t)] \tag{5.10}$$

Выделив первые n членов в разложении функции в окрестности бесконечно удаленной точки, будем иметь

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{z_k} + \Phi^*(z) \tag{5.11}$$

При этом из (5.10) получим

$$\Phi_i(t) - t^n\Phi_e^*(t) = \chi(t)\exp[-\psi_i(t)] + \sum_{k=1}^{n} b_k t^{n-k} \tag{5.12}$$

Отсюда в силу обращения функции $z^n\Phi^*(z)$ в нуль на бесконечности ясно, что $\Phi^*(z)=0$ и, следовательно,

$$\Phi(z) = \sum_{1}^{n}\frac{b_k}{z^k} \qquad \text{вне } L'$$

$$\Phi(z) = \chi(z)\exp[-\psi(z)] + \sum_{k=1}^{n} b_k z^{n-k} \qquad \text{внутри } L'$$

Введя затем функцию

$$\varepsilon(t) = \mu(t) + m\log(t-\alpha) \tag{5.13}$$

регулярную при $t=\alpha$, обозначим для удобства $\Omega = T(z)$ вне L, где

$$T(z) = e^{\psi(z)}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{z^k}, \qquad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varepsilon(t)}{t-z}\,dt \tag{5.14}$$

При этом, очевидно, функция $T(z)$ будет регулярна в точке $t=\alpha$. Из формулы (5.3) следует, что функция

$$\varphi^*(t) = \varphi(t) + T(t) \tag{5.15}$$

на кривой L' будет аналитически продолжима и регулярна в области S'.

Учитывая соотношения

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt=2\varphi^*(z)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{Q(t)\,\varphi(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{B(t)}{A(t)-B(t)}\,\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt-$$

$$-2\varphi^*(z)\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(z-\alpha)^k}+2\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(z-\alpha)^k}\sum_{k_1=0}^{k-1}\frac{T^{(k_1)}(\alpha)\,(z-\alpha)^{k_1}}{k_1!}$$

в области S', преобразуем (5.1) к виду

$$\varphi(t_0)+\lim_{z\to t_0}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{1}{A(t)-B(t)}\Big\{B(t)\,\varphi(t)-$$

$$-\int\limits_{L}\omega(t_1)\,K(t_1,\,t)\,dt_1+f(t)\Big\}\frac{dt}{t-z}=E(t_0)$$

где

$$E(t)=2Q(t)\,T(t)+2\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{(t-\alpha)^k}\left\{T(t)-\sum_{k_1=0}^{k-1}T^{(k_1)}(\alpha)\,\frac{(t-\alpha)^{k_1}}{k_1!}\right\}$$

Наконец, принимая во внимание формулу (4.15), придем к заключению, что уравнение Фредгольма (4.19) в рассматриваемом случае эквивалентно, вообще говоря, не (4.14), а следующему сингулярному уравнению: (5.16)

$$A(t_0)\,\omega(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt+\int\limits_{L}\omega(t)\,K(t,\,t_0)\,dt_0=f(t_0)+B(t_0)\,E(t_0)$$

Примечание. Отметим, что сведе́ние одного сингулярного уравнения к уравнению Фредгольма может быть также (хотя в несколько более сложной форме) проведено с помощью метода Карлемана.

Преобразовав уравнение (4.14) к виду

$$\{A(t_0)+B(t_0)\}\,\varphi_i(t_0)-\{A(t_0)-B(t_0)\}\,\varphi_e(t_0)=G\{\omega(t),\,t_0\}\qquad(5.17)$$

где

$$\varphi_i(t)-\varphi_e(t)=\omega(t),\qquad G=f(t_0)-\int\limits_{L}\omega(t)\,K(t,\,t_0)\,dt\qquad(5.18)$$

допустим, что $A(t)+B(t)\neq 0$ на кривой L, а $A(t)-B(t)$ имеет на ней корень $t=\alpha$ кратности n. Далее, положим

$$\varphi(z)=e^{\psi(z)}\,\Phi(z),\qquad c(t)=\frac{A(t)-B(t)}{(t-\alpha)^n\,[A(t)+B(t)]}\qquad(5.19)$$

и примем для простоты, что функция $\log.\,c(t)$ не получает приращения при обходе L. Тогда, взяв

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\log c(t)}{t-z}\,dt$$

получим из (5.17)

$$\Phi_i(t)-(t-\alpha)^n\,\Phi_e(t)=M\{\omega(t),\,t_0\}$$

$$M=\frac{1}{A(t)+B(t)}\,G\{\omega(t),\,t_0\}\exp\left[-\psi_i(t)\right]\qquad(5.20)$$

Выделив, как в (5.11) из функции $\Phi(z)$ первые n членов ее разложения в окрестности бесконечно удаленной точки, легко найдем:
в области S

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{M(\omega, t)}{t-z}\,dt+\sum_{k=0}^{n-1} z^k \sum_{k_1=0}^{n-k-1}(-1)^{k_1} c_n^{k_1} a^{k_1}\bar{b}_{n-k-k_1}$$

в области S^* (5.21)

$$\Phi(z)=\frac{1}{(z-a)^n}\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{M(\omega, t)}{t-z}\,dt+\sum_{k=0}^{n-1} z^k \sum_{k_1=0}^{n-k-1}(-1)^{k_1} c_n^{k_1} a^{k_1}\bar{b}_{n-k-k_1}\right]$$

Функция $\Phi(z)$, определяемая из последнего равенства, должна оставаться ограниченной при $z\to a$. Поэтому выражение, содержащееся в его квадратных скобках, должно вместе со своими производными до порядка $n-1$ (включительно) обращаться в нуль при $t=a$. Из этого условия найдем все постоянные b_k в виде некоторых функционалов. После этого, используя первое из соотношений (5.18), придем к уравнению Фредгольма.

Предположим теперь, что $A+B$ имеет нуль $t=a$ кратности n, а $A-B$ всюду на L отлична от нуля. Положим при этом

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\log k(t)}{t-z}\,dt, \qquad k(t)=\frac{[A(t)-B(t)](t-a)^n}{A(t)+B(t)} \tag{5.22}$$

считая, что $\log k(t)$ не получает приращения при обходе L. Тогда получим

$$(t_0-a)^n\Phi_i(t_0)-\Phi_e(t)=T\{\omega(t_0),\ t_0\}$$

$$T=\frac{(t-a)^n}{A(t)-B(t)}\,G(\omega, t)\exp[-\psi_i(t)] \tag{5.23}$$

Отсюда найдем

$$\Phi(z)=\frac{1}{(z-a)^n}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{T(\omega, t)}{t-z}\,dt \qquad \text{в области } S \tag{5.24}$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{T(\omega, t)}{t-z}\,dt \qquad \text{в области } S^*$$

Эти формулы, очевидно, не приводят нас непосредственно к уравнению Фредгольма для рассматриваемого случая. Однако, предполагая, что $\omega(t)$ удовлетворяет некоторым функциональным соотношениям, обеспечивающим непрерывность $\Phi(z)$ при $z\to a$ (которые без труда могут быть выписаны), мы после несложных преобразований получим для $\omega(t)$ уравнение Фредгольма.

Указанный здесь прием сведе́ния (4.14) к уравнению Фредгольма тесно связан с решением задачи Гильберта для функции $\varphi(z)$. Он приводит к цели благодаря тому, что мы умеем решать эту задачу в конечном виде для одной неизвестной функции. Использование аналогичного приема для сведе́ния системы сингулярных уравнений к уравнению Фредгольма представляется нам затруднительным.

§ 6. Многие важные задачи математической физики могут быть приведены к системе сингулярных уравнений вида (1.1) с незамкнутым контуром L. Мы остановимся здесь преимущественно на случае, когда коэффициенты a_{kj} и b_{kj} в ней являются постоянными числами. При этом в целях упрощения выкладок, как прежде, проведем общее исследование лишь для системы двух сингулярных уравнений.

К указанным уравнениям может быть, например, сведена следующая задача.

Определить две функции $\varphi_j(z) = u_j + iv_j$ $(j = 1, 2)$, регулярные в круге, вещественные и мнимые части которых связаны на дугах γ_j $(j = 1, 2)$, составляющих окружность, соотношениями

$$A_{1k}u_1 + B_{1k}v_1 + A_{2k}u_2 + B_{2k}v_2 = f_{1k} \qquad (k = 1, 2) \tag{6.1}$$

на γ_1 и

$$C_{1k}u_1 + D_{1k}v_1 + C_{2k}u_2 + D_{2k}v_2 = f_{2k} \qquad (k = 1, 2) \tag{6.2}$$

на γ_2, где $A_{kj}, \ldots$ и D_{kj} — постоянные вещественные величины.

Равенства (6.1) могут быть записаны в следующей форме:

на γ_1

$$c_{1k}\varphi_1(t) + \overline{c_{1k}\varphi_1(t)} + c_{2k}\varphi_2(t) + \overline{c_{2k}\varphi_2(t)} = 2f_{1k}(t) \qquad (k = 1, 2) \tag{6.3}$$

на γ_2

$$d_{1k}\varphi_1(t) + \overline{d_{1k}\varphi_1(t)} + d_{2k}\varphi(t) + \overline{d_{2k}\varphi_2(t)} = 2f_{2k}(t) \qquad (k = 1, 2) \tag{6.4}$$

где $c_{11}, \ldots, d_{22}$ — некоторые комплексные постоянные.

Разрешив каждую из этих систем относительно $\overline{\varphi_1(t)}$ и $\overline{\varphi_2(t)}$, получим:

на γ_1

$$\overline{\varphi_k(t)} = \varepsilon_{1k}\varphi_1(t) + \varepsilon_{2k}\varphi_2(t) + f_k(t) \qquad (k = 1, 2) \tag{6.5}$$

на γ_2

$$\overline{\varphi_k(t)} = \mu_{1k}\varphi_1(t) + \mu_{2k}\varphi_2(t) + g_k(t) \qquad (k = 1.2) \tag{6.6}$$

где ε_{kj} и μ_{kj} — некоторые постоянные, а $f_1(t), \ldots$ и $g_2(t)$ — новые известные функции [1].

Умножим каждое из равенств (6.5) и (6.6) на ядро Коши $1/(t - z)$, где z — любая точка круга, и проинтегрируем по соответственной из дуг γ_j $(j = 1, 2)$. После этого, почленно их сложив и устремляя точку z к некоторой точке t_0 дуги γ_1, получим на основании теоремы Коши

---

[1] При этом, очевидно, мы предполагаем, что определители

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \begin{vmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Допустим, например, что первый из них обращается в нуль. Тогда, положив $c_{11}/c_{12} = c_{21}/c_{22} = \mu$, увидим, что система (6.3) либо несовместна, либо вырождается в одно уравнение, так что задача либо неразрешима, либо неопределенна. При комплексном μ система (6.3) (двух вещественных уравнений) эквивалентна одному комплексному уравнению

$$c_{11}\varphi_1(t) + c_{21}\varphi_2(t) = \frac{2(f_2 - \bar{\mu}f_1)}{\mu - \bar{\mu}}$$

из которого следует, что для разрешимости задачи функция, содержащаяся в его правой части, должна быть аналитически продолжима внутрь круга. Если это на самом деле имеет место, то, продолжив обе части последнего равенства внутрь круга, выразим одну из неизвестных функций через другую и сведем, таким образом, задачу к определению уже одной регулярной функции.

для определения $\varphi_j(t)$ $(j=1, 2)$ следующую (аналогичную (1.1)) систему сингулярных уравнений:

$$
\begin{gathered}
(\varepsilon_{11}+\mu_{11})\varphi_1(t_0)+(\varepsilon_{21}+\mu_{21})\varphi_2(t_0)+\frac{(\varepsilon_{11}-\mu_{11})}{\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\varphi_1(t)}{t-t_0}\,dt+\\
+\frac{(\varepsilon_{21}-\mu_{21})}{\pi t}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\Gamma\varphi_2(t)}{t-i_0}\,dt=F_1(t_0)+\overline{a}_0^{(1)}\\
(\varepsilon_{12}+\mu_{12})\varphi_1(t_0)+(\varepsilon_{22}+\mu_{22})\varphi_2(t_0)+\frac{(\varepsilon_{12}-\mu_{12})}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\varphi_1(t)}{t-t_0}\,dt+\\
+\frac{(\varepsilon_{22}-\mu_{22})}{\pi i}\int\limits_{\gamma_1}\frac{\varphi_2(t)}{t-t_0}\,dt=F_2(t_0)+\overline{a}_0^{(2)}
\end{gathered}
\tag{6.7}
$$

где $F_j(t)$ — предельные значения интегралов типа Коши с плотностями, зависящими от функций $f_1(t), \ldots$ и $g_2(t)$, и $a_0^{(1)}$, $a_0^{(2)}$ — постоянные.

Как известно, задача определения одной неизвестной функции $\varphi(z)$, регулярной в круге, при условиях, подобных (6.1) и (6.2), может быть сведена к одному сингулярному уравнению (с постоянными же коэффициентами) и затем решена методом Карлемана [3].

В том случае, когда на одной из дуг γ_j $(j=1, 2,)$ задана вещественная, а на другой мнимая часть искомой функции $\varphi(z)$, выражение для последней может быть сразу выписано с помощью формулы [4] М. Келдыша и Л. Седова.

Отметим, что к сингулярным интегральным уравнениям упомянутого же вида приводится так называемая задача Римана, заключающаяся в определении функций, регулярных на плоскости вне некоторого отрезка кривой, при условии, что их предельные значения на верхней и нижней сторонах кривой удовлетворяют линейным соотношениям с постоянными коэффициентами.

§ 7. Займемся теперь решением системы сингулярных уравнений вида (1.1) для незамкнутого контура L и при условии, что коэффициенты a_{kj} и b_{kj} — постоянные величины. Обозначим через a и b аффиксы концов кривой L.

Умножим каждое из уравнений (1.1) на неопределенную пока постоянную λ_k $(k=1, 2)$ и почленно их сложим. Тогда получим

$$
\begin{gathered}
(\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{21})\,\omega_1(t_0)+(\lambda_1 a_{12}+\lambda_2 a_{22})\,\omega_2(t_0)+\frac{(\lambda_1 b_{11}+\lambda_2 b_{21})}{\pi i}\int\limits_L\frac{\omega_1(t)}{t-t_0}\,dt+\\
+\frac{(\lambda_1 b_{12}+\lambda_2 b_{22})}{\pi i}\int\limits_L\frac{\omega_2(t)}{t-t_0}\,dt=\lambda_1 f_1(t_0)+\lambda_2 f_2(t_0)
\end{gathered}
\tag{7.1}
$$

Положим

$$
\frac{\lambda_1 a_{12}+\lambda_2 a_{22}}{\lambda_1 a_{11}+\lambda_2 a_{21}}=\frac{\lambda_1 b_{12}+\lambda_2 b_{22}}{\lambda_1 b_{11}+\lambda_2 b_{21}}=\mu \tag{7.2}
$$

где μ — новая постоянная. Отсюда для λ_k $(k=1, 2)$ будем иметь систему уравнений:

$$
\begin{gathered}
\lambda_1(a_{12}-\mu a_{11})+\lambda_2(a_{22}-\mu a_{21})=0\\
\lambda_1(b_{12}-\mu b_{11})+\lambda_2(b_{22}-\mu b_{21})=0
\end{gathered}
\tag{7.3}
$$

Для того чтобы система (7.3) имела решение λ_k $(k=1, 2)$ не равное тождественно нулю, необходимо

$$\begin{vmatrix} a_{12}-\mu a_{11} & a_{22}-\mu a_{21} \\ b_{12}-\mu b_{11} & b_{22}-\mu b_{21} \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.4)$$

откуда

$$\mu_{1,2}=\frac{C\pm\sqrt{D}}{2(a_{21}b_{11}-a_{11}b_{21})}, \qquad \begin{aligned} C&=(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{11}-a_{11}b_{22}-a_{12}b_{21}) \\ D&=C^2-4(a_{21}b_{11}-a_{11}b_{21})(a_{22}b_{12}-a_{12}b_{22}) \end{aligned} \qquad (7.5)$$

Допустим сначала, что $D\neq 0$. При этом уравнение (7.4) будет иметь два различных корня μ_j $(j=1,2)$. Обозначая через $\lambda_k^{(j)}$ $(k=1, 2)$ решение системы (7.3), соответствующее μ_j $(j=1, 2)$, и положив (7.6)

$$\omega_1(t)+\mu_j\omega_2(t)=\chi_j(t), \quad \lambda_1^{(j)}f_1(t)+\lambda_2^{(j)}f_2(t)=F_j(t) \quad (j=1,2)$$

получим из системы (7.1) два разделяющиуся относительно каждой из функции $\chi_j(t)$ уравнения (7.7)

$$(\lambda_1^{(j)}a_{11}+\lambda_2^{(j)}a_{21})\chi_j(t_0)+\frac{(\lambda_1^{(j)}b_{11}+\lambda_2^{(j)}b_{21})}{\pi i}\int_L\frac{\chi_j(t)}{t-t_0}dt=F_j(t_0) \qquad (j=1,2)$$

Определив отсюда методом Карлемана функции $\chi_j(t)$ $(j=1, 2)$, найдем из первых двух уравнений (7.6) искомое решение $\omega_j(t)$ $(j=1, 2)$.

Пример. Рассмотрим систему сингулярных уравнений

$$a_k\omega_k(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega_{k+1}(t)}{t-t_0}dt=f_k(t_0) \quad (k=1,\ldots,n) \qquad (7.8)$$

где a_k — постоянные числа и индекс $n+1$ следует заменить на 1. Для нее вместо равенств (7.2) и (7.4) соответственно имеем

$$\frac{\lambda_1}{a_2\lambda_2}=\frac{\lambda_2}{a_3\lambda_3}=\ldots=\frac{\lambda_{n-1}}{a_n\lambda_n}=\frac{\lambda_n}{a_1\lambda_1}=\mu \qquad (7.9)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -\mu a_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mu a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\mu a_n \\ -\mu a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7.11)$$

Раскрывая последний определитель, получим

$$a_1a_2\ldots a_n\mu^n-1=0 \qquad (7.10)$$

Пусть μ_j — корни этого уравнения и $\lambda_k^{(j)}$ — соответствующие им значения λ_k $(k=1,\ldots,n)$. Тогда, введя функции

$$\chi_j(t)=\sum_{k=1}^{n}a_k\lambda_k^{(j)}\omega_k(t), \quad F_j(t)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(j)}(t)f_k(t) \quad (j=1,\ldots,n) \qquad (7.12)$$

будем иметь для каждой из них уравнение

$$\chi_j(t_0)+\frac{\mu_j}{\pi i}\int_L\frac{\chi_j(t)}{t-t_0}dt=F_j(t_0) \quad (j=1,\ldots,n) \qquad (7.13)$$

Определив отсюда все $\chi_j(t)$, найдем затем искомые функции $\omega_j(t)$ $(j=1,\ldots,n)$.

Примечание. Указанный прием может быть в некоторых частных случаях использован для решения системы сингулярных уравнений с переменными коэффициентами. В виде примера рассмотрим систему

$$\sqrt{t_0}\,\omega_1(t_0)+\frac{\exp t_0}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_1(t)}{t-t_0}\,dt-\frac{2\log t_0}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_2(t)}{t-t_0}\,dt=f_1(t_0) \tag{7.14}$$

$$t_0\omega_2(t_0)+\frac{\sqrt{t_0}\log t_0}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_1(t)}{t-t_0}\,dt+\frac{\sqrt{t_0}\,(\exp t_0+3\log t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_2(t)}{t-t_0}\,dt=f_2(t_0)$$

считая, что кривая L не проходит через начало координат. При этом из характеристического уравнения (7.4) найдем, что $\mu_1=1$ и $\mu_2=2$, и [взяв $\lambda_1^{(j)}=1$ в формулах (7.3)], вместо системы (7.14) получим два разделяющихся уравнения

$$\sqrt{t_0}\,\chi_j(t_0)+\frac{\exp t_0+\mu_j\log t_0}{\pi i}\int\limits_L \frac{\chi_j(t)}{t-t_0}\,dt=F_j(t_0) \qquad (j=1,2) \tag{7.15}$$

После этого определение $\omega_j(t)$ $(j=1,2)$ не представляет затруднений.

Отметим, что решение системы вида (1.1) с переменным коэффициентами может быть с помощью указанного приема получено также в тех случаях, когда μ_j являются полиномами или рациональными функциями от аргумента t. В самом деле, допустим, что

$$\mu_j=\sum_{k=0}^{n_j} c_{kj}t^k \qquad (j=1,2)$$

где c_{kj} — некоторые постоянные. Тогда, учитывая соотношение

$$\frac{\mu(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_2(t)}{t-t_0}\,dt=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,\omega_2(t)}{t-t_0}\,dt-\sum_{k=0}^{n_j-1}\beta_k\sum_{k_1=k+1}^{n_j} c_{k_1 j}\,t_0^{k_1-k-1}$$

$$\beta_k=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L t^k\omega_2(t)\,dt$$

и перенеся в (7.1) [по использовании (7.2)] члены, зависящие от функционалов β_k, в правые части, снова придем к разделяющимся уравнениям. Разрешив их, легко составим затем требуемое число алгебраических уравнений для определения функционалов β_k.

§ 8. Перейдем теперь к случаю, когда корень уравнения (7.4) кратный. Система (7.7), очевидно, при этом вырождается в одно уравнение и предыдущие рассуждения непосредственно не приводят к цели.

Для того чтобы получить решение системы (1.1) в данном случае, поступим следующим образом. Принимая для удобства[1]

$$a_{12}=a_{21}=0 \tag{8.1}$$

и обозначая через μ (опуская индексы) корень уравнения (7.4), имеем

$$\mu=\frac{a_{11}b_{22}+a_{22}b_{11}}{2a_{11}a_{22}} \tag{8.2}$$

[1] Это допущение несущественно, так как система (1.1) линейным преобразованием всегда к такому случаю может быть приведена.

Соотношение, которому должны удовлетворять коэффициенты системы (1.1) для того, чтобы уравнение (7.4) имело кратный корень, заметно упрощается при условии (8.1) и принимает вид:

$$(a_{11}b_{22} - a_{22}b_{11})^2 + 4a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} = 0 \tag{8.3}$$

Введем параметр ε, принимающий сколь угодно малые значения, и рассмотрим вместо (1.1) другую весьма близкую к ней систему, некоторые из коэффициентов которой отличаются от соответственных коэффициентов в (1.1) на малые величины, стремящиеся к нулю одновременно с ε. Подобные модификации системы (1.1) могут быть осуществлены различным образом. Выберем одну из наиболее простых. К такой мы, повидимому, придем, заменив в (1.1) коэффициент b_{12} на

$$b_{12}' = b_{12} + \frac{a_{11}a_{22}}{b_{21}}\varepsilon^2 \tag{8.4}$$

и оставив без изменения все остальные коэффициенты.

Корни уравнения, аналогичного (7.4), для видоизмененной указанным образом системы будут равны:

$$\mu_{1,2} = \frac{a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11}}{2a_{11}a_{22}} \pm \varepsilon \tag{8.5}$$

Соответствующие им значения λ_k возьмем равными

$$\lambda_1^{(j)} = b_{21}, \qquad \lambda_2^{(j)} = -(b_{11} - \mu_j a_{11}) \qquad (j = 1, 2) \tag{8.6}$$

При этом

$$\chi_j(t) = b_{21}a_{11}\omega_1(t) - a_{22}(b_{11} - \mu_j a_{11})\,\omega_2(t) \tag{8.7}$$

Определив из уравнений (7.7) (при соотношениях (8.1), (8.4) и (8.5)) функции $\chi_j(t)$, найдем далее из (8.7) функции $\omega_j(t)$ $(j = 1, 2)$. Перейдя затем в последних к пределу $\varepsilon \to 0$, получим после некоторых вычислений требуемое решение системы (1.1). Оно имеет вид:

$$\omega_1(t_0) = \frac{1}{a_{11}^2 b_{21}(1-\mu^2)^2}\Bigg[\Big\{2\mu b_{11} + a_{11}(1-3\mu^2)b_{21}\Big\}f_1(t_0) - 2\mu(b_{11}-\mu a_{11})^2 f_2(t) -$$

$$-\left(\frac{b-t_0}{a-t_0}\right)^\theta \frac{1}{\pi i}\int_L \left(\frac{a-t}{b-t}\right)^\theta \frac{b_{21}\{(1+\mu^2)b_{11} - 2\mu^3 a_{11}\}f_1(t) - (1+\mu^2)(b_{11}-\mu a_{11})^2 f_2(t)}{t-t_0}\,dt -$$

$$-\frac{\mu(b_{11}-\mu a_{11})}{\pi^2}\left(\frac{b-t_0}{a-t_0}\right)^\theta \int_L \left(\frac{a-t}{b-t}\right)^\theta \left\{\log\frac{b-t_0}{a-t_0} + \log\frac{a-t}{b-t}\right\}\frac{g(t)}{t-t_0}\,dt\Bigg]$$

$$\omega_2(t_0) = \frac{1}{a_{11}a_{22}(1-\mu^2)^2}\Bigg[2\mu b_{21}f_1(t_0) + \{a_{11}(1+\mu^2) - 2\mu b_{11}\}f_2(t_0) -$$

$$-\left(\frac{b-t_0}{a-t_0}\right)^\theta \frac{1}{\pi i}\int_L \left(\frac{a-t}{b-t}\right)^\theta \frac{(1+\mu^2)b_{21}f_1(t) + \{2\mu a_{11} - (1+\mu^2)b_{11}\}f_2(t)}{t-t_0}\,dt -$$

$$-\frac{\mu}{\pi^2}\left(\frac{b-t_0}{a-t_0}\right)^\theta \int_L \left(\frac{a-t}{b-t}\right)^\theta \left\{\log\frac{b-t_0}{a-t_0} + \log\frac{a-t}{b-t}\right\}\frac{g(t)}{t-t_0}\,dt \tag{8.8}$$

где введены обозначения (8.9)

$$g(t) = b_{21}f_1(t) - (b_{11} - \mu a_{11})f_2(t), \quad \theta = \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1-\mu}{1+\mu}\quad\left(0 \leqslant \arg\lg\frac{1-\mu}{1+\mu} < 2\pi\right)$$

Между прочим, принимая во внимание соотношения

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\left(\frac{b-t}{a-t}\right)^\theta\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L\left(\frac{a-t_1}{b-t_1}\right)^\theta\log\frac{a-t_1}{b-t_1}\frac{g(t_1)}{t_1-t}dt_1\right\}\frac{dt}{t-t_0}=$$

$$=g(t_0)\log\frac{a-t_0}{b-t_0}-\frac{1}{\pi i\mu}\int_L\left\{\left(\frac{b-t_0}{a-t_0}\right)^\theta\left(\frac{a-t_1}{b-t_1}\right)^\theta-1\right\}\log\frac{a-t_1}{b-t_1}\frac{g(t_1)}{t_1-t_0}dt_1$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\left(\frac{b-t}{a-t}\right)^\theta\log\frac{b-t}{a-t}\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L\left(\frac{a-t_1}{b-t_1}\right)^\theta\frac{g(t_1)}{t_1-t}dt_1\right\}\frac{dt}{t-t_0}=$$

$$=g(t_0)\log\frac{b-t_0}{a-t_0}-\frac{(1-\mu^2)}{\mu^2}\int_L\left\{\left(\frac{b-t_0}{a-t_0}\right)^\theta\left(\frac{a-t_1}{b-t_1}\right)^\theta-1\right\}\frac{g(t_1)}{t_1-t_0}dt_1-$$

$$-\frac{1}{\pi i\mu}\int_L\left[\left(\frac{b-t_0}{a-t_0}\right)^\theta\left(\frac{a-t_1}{b-t_1}\right)^\theta\log\frac{b-t_0}{a-t_0}-\log\frac{b-t_1}{a-t_1}\right]\frac{g(t_1)}{t_1-t_0}dt_1 \tag{8.10}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\left(\frac{b-t}{a-t}\right)^\theta\frac{dt}{t-t_0}\frac{1}{\pi i}\int_L\left(\frac{a-t_1}{b-t_1}\right)^\theta\frac{g(t_1)}{t_1-t}dt_1=$$

$$-\frac{1-\mu}{\mu}g(t_0)-\frac{1}{\pi i\mu}\int_L\left\{\left(\frac{b-t_0}{a-t_0}\right)^\theta\left(\frac{a-t_1}{b-t_1}\right)^\theta-1\right\}\frac{g(t_1)}{t_1-t_0}dt_1$$

справедливость которых нетрудно установить, можно непосредственной подстановкой убедиться, что найденные выражения (8.8) для $\omega_j(t)$ $(j=1,2)$ действительно удовлетворяют системе (1.1).

Пример I. Рассмотрим систему трех сингулярных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\omega_1(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega_1(t)-2\omega_2(t)+\omega_3(t)}{t-t_0}dt=f_1(t_0)\\
&\omega_2(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{2\omega_1(t)+\omega_2(t)-\omega_3(t)}{t-t_0}dt=f_2(t_0)\\
&\omega_3(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{2\omega_1(t)-2\omega_2(t)+\omega_3(t)}{t-t_0}dt=f_3(t_0)
\end{aligned} \tag{8.11}$$

Нетрудно убедиться, что характеристическое уравнение (7.4) для этой системы имеет тройной корень $\mu=1$. В соответствии со сказанным выше видоизменим несколько ее, введя малый параметр ε. Именно, сохранив без изменения два первых ее уравнения, возьмем вместо третьего уравнения следующее:

$$\omega_3(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{2(1+\varepsilon^3)-2(1-\varepsilon^3)\,\omega_2(t)+\omega_3(t)}{t-t_0}dt=f_3(t_0) \tag{8.12}$$

Уравнение (7.4) для новой системы имеет корни

$$\mu_j=1+2\varepsilon\alpha_j \qquad (j=1,2,3) \tag{8.13}$$

где α_j—кубический корень из 1. Выбрав далее решение $\lambda_k^{(j)}$ системы (7.3) в виде

$$\lambda_1^{(j)}=-1+2\varepsilon^2\alpha_j^2+\varepsilon^3,\quad \lambda_2^{(j)}=-1-2\varepsilon\alpha_j+\varepsilon^3,\quad \lambda_3^{(j)}=1+\varepsilon\alpha_j \qquad (j=1,2,3)$$

придем к разделяющимся уравнениям (8.14)

$$\chi_j(t_0)+\frac{1+2\varepsilon\alpha_j}{2\pi i}\int_L\frac{\chi_j(t)}{t-t_0}dt=F_j(t_0) \quad (j=1,2,3) \tag{8.15}$$

Определив отсюда $\chi_j(t)$ и затем из (7.6) функции $\omega_j(t)$, перейдем в выражениях для последних к пределу $\varepsilon \to 0$. Проделав при этом некоторые вычисления, получим решение системы (8.11). Оно имеет вид:

$$\omega_1(t_0) = -\frac{4}{27}\{5f_1(t_0) + 66f_2(t_0) - 20f_3(t_0)\} +$$
$$+\frac{2}{9\pi i}\left(\frac{t_0-b}{t_0-a}\right)^\theta \int_L \left(\frac{t-a}{t-b}\right)^\theta \Big[17\{5f_1(t) + 56f_2(t) - 41f_3(t)\} -$$
$$-\frac{2}{\pi i}\{4f_1(t) + 6f_2(t) - 5f_3(t)\}\left(\log\frac{t_0-b}{t_0-a} + \log\frac{t-a}{t-b}\right) -$$
$$-\frac{4}{3\pi^2}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\}\left(\log\frac{t_0-b}{t_0-a} + \log\frac{t-a}{t-b}\right)^2\Big]\frac{dt}{t-t_0}$$

$$\omega_2(t_0) = -\frac{4}{27}\{2f_1(t_0) + 5f_2(t_0) - 8f_3(t_0)\} +$$
$$+\frac{2}{9\pi i}\left(\frac{t_0-b}{t_0-a}\right)^\theta \int_L \left(\frac{t-a}{t-b}\right)^\theta \Big[\frac{1}{3}\{-4f_1(t) + 17f_2(t) - 11f_3(t)\} -$$
$$-\frac{2}{\pi i}\{2f_1(t) + 4f_2(t) - 3f_3(t)\}\left(\log\frac{t_0-b}{t_0-a} + \log\frac{t-a}{t-b}\right) -$$
$$-\frac{4}{3\pi^2}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\}\left(\log\frac{t_0-b}{t_0-a} + \log\frac{t-a}{t-b}\right)^2\Big]\frac{dt}{t-t_0}$$

$$\omega_3(t_0) = -\frac{4}{27}\{16f_1(t_0) + 40f_2(t_0) - 37f_3(t_0)\} +$$
$$+\frac{2}{9\pi i}\left(\frac{t_0-b}{t_0-a}\right)^\theta \int_L \left(\frac{t-a}{t-b}\right)^\theta \Big[\frac{1}{3}\{22f_1(t) + 82f_2(t) - 61f_3(t)\} -$$
$$-\frac{4}{\pi i}\{3f_1(t) + 5f_2(t) - 4f_3(t)\}\left(\log\frac{t_0-b}{t_0-a} + \log\frac{t-a}{t-b}\right) -$$
$$-\frac{8}{3\pi^2}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\}\left(\log\frac{t_0-b}{t_0-a} + \log\frac{t-a}{t-b}\right)^2\Big]\frac{dt}{t-t_0}$$

где

$$\theta = \frac{1}{2}\log\frac{1}{3}$$

Пример II. Этот же прием иногда приводит к цели для системы (1.1) с переменными коэффициентами в случаях, отмеченных выше. Рассмотрим систему:

$$\begin{aligned} &\omega_1(t_0) + \frac{\sqrt{t_0}}{\pi i}\int_L \frac{\omega_1(t)}{t-t_0}dt - \frac{t_0}{\pi i}\int_L \frac{\omega_2(t)}{t-t_0}dt = f_1(t_0) \\ &4\omega_2(t_0) + \frac{t_0}{\pi i}\int_L \frac{\omega_1(t)}{t-t_0}dt - \frac{4\sqrt{t_0}(1+\sqrt{t_0})}{\pi i}\int_L \frac{\omega_2(t)}{t-t_0}dt = f_2(t_0) \end{aligned} \tag{8.16}$$

Для нее уравнение (7.4) имеет кратный корень $\mu = 2$. Положим в этой системе $b_{12} = -t(1-\varepsilon^2/4)$ и оставим без изменения все остальные коэффициенты. Уравнение (7.4) для новой системы будет иметь корни $\mu_{1,2} = 2 \pm \varepsilon$. Отсюда (взяв $\lambda_1^{(j)} = 4$, $\lambda_2^{(j)} = \mu_j$) получим уравнения

$$4\chi_j(t_0) + \frac{(4\sqrt{t_0} + \mu_j t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\chi_j(t)}{t-t_0}dt = F_j(t_0) \qquad (j = 1, 2)$$

Поступая далее так же, как выше, без труда найдем решение системы (8.16).

В формулах (8.8) опущено решение однородной системы (1.1) [при условии же (8.3)], к выводу которого мы сейчас перейдем.

Обозначая через $\chi_j^*(t)$ $(j=1,2)$ абсолютно интегрируемое на отрезке L решение однородных уравнений (7.7), соответствующих однородной же [модифицированной относительно (1.1)] системе, будем иметь

$$\chi_j^*(t)=\frac{c_j^*(\varepsilon)}{(t-a)^{\theta_j}(t-b)^{1-\theta_j}} \qquad (j=1,2) \tag{8.17}$$

где

$$\theta_j=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{1-\mu_j}{1+\mu_j}, \qquad 0\leqslant \arg\log\frac{1-\mu_j}{1+\mu_j}<2\pi \qquad (j=1,2) \tag{8.18}$$

и c_j^* — постоянные, зависящие, вообще говоря, от параметра ε.

Снабжая во избежание смешения неизвестные однородной системы также звездочкой сверху, найдем из соотношений (7.7) (8.19)

$$\omega_1^*(t)=\frac{1}{a_{11}b_{21}}\left[\frac{(b_{11}-\mu_2 a_{11})}{2a_{11}\varepsilon}\left\{\frac{c_1^*(\varepsilon)}{(t-a)^{\theta_1}(t-b)^{1-\theta_1}}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{c_2^*(\varepsilon)}{(t-a)^{\theta_2}(t-b)^{1-\theta_2}}\right\}+\frac{c_2^*(\varepsilon)}{(t-a)^{\theta_2}(t-b)^{1-\theta_2}}\right]$$

$$\omega_2^*(t)=\frac{1}{2a_{11}a_{22}\varepsilon}\left[\frac{c_1^*(\varepsilon)}{t-b}\left\{\left(\frac{t-b}{t-a}\right)^{\theta_1}-\left(\frac{t-b}{t-a}\right)^{\theta_2}\right\}+\right.$$
$$\left.+\{c_1^*(\varepsilon)-c_2^*(\varepsilon)\}\frac{1}{(t-a)^{\theta_2}(t-b)^{1-\theta_2}}\right]$$

Допуская, что $c_1^*(0)=c_2^*(0)$, и введя постоянные

$$c_1=-\frac{c_1^*(0)}{\pi i a_{11}(1-\mu^2)}, \qquad c_2=\frac{c_1^{*\prime}(0)-c_2^{*\prime}(0)}{2a_{11}}$$

найдем после перехода в (8.19) к пределу $\varepsilon\to 0$ решение $\omega_j^{(0)}(t)$ однородной системы (1.1): (8.20)

$$\omega_1^{(0)}(t)=\frac{1}{a_{11}b_{21}(t-a)^{\theta}(t-b)^{1-\theta}}\Big[c_2(b_{11}-\mu a_{11})-$$
$$\left.-\pi i a_{11}(1-\mu^2)c_1+c_1(b_{11}-\mu a_{11})\log\frac{t-b}{t-a}\right],$$

$$\omega_2^{(0)}(t)=\frac{1}{(t-a)^{\theta}(t-b)^{1-\theta}}\left(c_2+c_1\log\frac{t-b}{t-a}\right)$$

где

$$\theta=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{1-\mu}{1+\mu}, \qquad 0\leqslant\arg\log\frac{1-\mu}{1+\mu}<2\pi$$

Сложив найденное частное решение (8.8) неоднородной системы (1.1) [при условии (8.3)] с решением (8.20) соответствующей однородной системы, получим общее решение.

Поступила в редакцию
1 III 1948

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. 1946.
2. Гахов Ф. Д. Математический сборник, новая серия. 1937. Т. II (44). № 4.
3. Carleman T. Arkiv för matematik, astronomi och fysik. 1922. Bd. 16. Nr 26.
4. Келдыш М., Седов Л. Доклады Академии Наук. 1937. Т. XVI. № 1.