

**СМЕШАННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
 ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ**

Б. Л. Минцберг

(Ленинград)

Метод решения смешанных граничных задач теории упругости, разработанный Н. И. Мухелишвили^[1] и И. Н. Карцивадзе^[2] для упругой полуплоскости и круга, может быть легко распространен на случай плоскости с круговым отверстием.

Ниже приводится решение основной смешанной граничной задачи¹, когда на части контура отверстия L_1 заданы декартовы компоненты смещения, на остальной части контура L_2 заданы напряжения. Кроме того, известны главные напряжения на бесконечности и главный вектор всех усилий, приложенных к L_1 .

1. Общее решение плоской задачи для бесконечной плоскости с круговым отверстием. Обозначим область, внешнюю к кругу единичного радиуса, через S^+ , внутреннюю область через S^- , контур отверстия через L , точки разграничения дуг L_1 и L_2 через a и b .

Пусть $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — функции Колосова-Мухелишвили, решающие данную задачу. Эти функции должны быть голоморфными в S^+ , ограниченными на бесконечности и при больших $|z|$ иметь вид:

$$\Phi(z) = B + iC - \frac{X + iY}{2\pi(1+z)} \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \quad \left(x = \frac{3-\sigma}{1+\sigma}\right) \quad (1.1)$$

$$\Psi(z) = B' + iC' + \frac{z(X - iY)}{2\pi(1+z)} \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \quad (1.2)$$

Здесь B, C, B', C' выражаются через главные напряжения на бесконечности, (X, Y) — главный вектор приложенных к контуру L усилий. Следуя И. Н. Карцивадзе^[2], введем функцию

$$\Omega(z) = \begin{cases} \Phi(z) - \frac{D_1}{z} - \frac{D_2}{z^2} & \text{в области } S^+ \\ -\bar{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\bar{\Phi}'\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z^2}\bar{\Psi}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{D_1}{z} - \frac{D_2}{z^2} & \text{в области } S^- \end{cases} \quad (1.3)$$

Здесь D_1 и D_2 — пока произвольные постоянные².

Заметим, что для голоморфности $\Omega(z)$ в S^+ достаточно положить

$$D_1 = \frac{z(X + iY)}{2\pi(1+z)}, \quad D_2 = B' - iC' \quad (1.4)$$

¹ Общее решение такой задачи для случая конечной области дано иным методом Шерманом^[5].

² Здесь приняты следующие обозначения: если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$, если

$\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то $\bar{\Phi}(z) = \overline{\Phi(z)} = u(x, -y) - iv(x, -y)$

Заменяя в (1.3) переменную z на $\frac{1}{z}$, получим в области S^+

$$\overline{\Phi(z)} - z \overline{\Phi'(z)} = -\Omega\left(\frac{1}{z}\right) + z^2 \overline{\Psi(z)} - D_1 z - D_2 z^2 \quad (1.5)$$

Переходя к сопряженным величинам, будем иметь

$$\Psi(z) = \frac{1}{z^2} \overline{\Omega\left(\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{z^2} \Phi(z) - \frac{1}{z} \Phi'(z) + \frac{\overline{D_1}}{z} + \overline{D_2} \quad (1.6)$$

Напряжения σ_r , σ_θ , $\tau_{r\theta}$ определяются по известным формулам

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4\operatorname{Re} \Phi(z), \quad \sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{-2i\theta} [z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}] \quad (1.7)$$

а смещения u и v из формулы

$$2\mu(u + iv) = z\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \psi(z) \quad (1.8)$$

Заменяя здесь $e^{-2i\theta} = \bar{z}/z$ и воспользовавшись (1.5), будем иметь

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Omega(z) - \Omega\left(\frac{1}{z}\right) + D_1\left(\frac{1}{z} - \bar{z}\right) + D_2\left(\frac{1}{z^2} - \bar{z}^2\right) + z\overline{\Psi(z)}\left(\bar{z} - \frac{1}{z}\right)$$

Пусть теперь z стремится к точке t на дуге L_2 . Тогда $1/z - \bar{z} \rightarrow 0$ и предполагая, что $\lim_{r \rightarrow 0} (1-r)\Psi(re^{i\theta}) = 0$ при $r \rightarrow 0$, получим

$$\sigma_r(t) + i\tau_{r\theta}(t) = \Omega^+(t) - \Omega^-(t) \quad (1.9)$$

где

$$\Omega^+(t) = \lim_{z \rightarrow t} \Omega(z), \quad \Omega^-(t) = \lim_{z \rightarrow t} \Omega\left(\frac{1}{z}\right)$$

представляют собой предельные значения функции $\Omega(z)$ при стремлении z к точке t на контуре круга соответственно из S^+ и S^- . Дифференцируя (1.8) по θ и применяя вновь (1.5), получим после предельного перехода к точкам t на L_1 , где заданы компоненты смещения:

$$\Omega^+(t) + \frac{1}{z} \Omega^-(t) = h(t) \quad (1.10)$$

Здесь

$$h(t) = \frac{2\mu g'(t)}{z} - \frac{z+1}{zt} D_1 - \frac{z+1}{zt^2} D_2, \quad g(t) = u + iv \quad (1.11)$$

Если дуга $L_2 \equiv L$ или $L_1 \equiv L$, то (1.9) и соответственно (1.10) позволяют просто решить первую и вторую основные задачи для плоскости с круговым отверстием. Возвращаясь к поставленной смешанной задаче, отметим, что, умея решать первую основную задачу, можно без ограничения общности считать дугу L_2 свободной от напряжений.

Для решения такой смешанной задачи нужно, следовательно, определить $\Omega(z)$, граничные значения которой подчинены условиям

$$\Omega^+(t) + \frac{1}{x} \Omega^-(t) = h(t) \quad \text{на } L_1, \quad \Omega^+(t) = \Omega^-(t) \quad \text{на } L_2 \quad (1.12)$$

Последнее соотношение показывает, что, определив $\Omega(z)$ различно в S^+ и S^- , мы имеем дело в действительности с единой функцией, голоморфной на всей плоскости, разрезанной вдоль дуги L_1 .

Граничная задача (1.12), является частным случаем решенной Мусхелишвили [4] задачи Гильберта. В нашем случае $G(t) = -1/z$, и поэтому получим

$$\Omega(z) = \frac{\Omega_0(z)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{h(t) dt}{\Omega_0(t)(t-z)} + (c_0 z + c_1) \Omega_0(z) \quad (1.13)$$

Здесь c_0 и c_1 — произвольные постоянные величины, функция

$$\Omega_0(z) = \frac{(z-b)^{i\gamma-\frac{1}{2}}}{(z-a)^{i\gamma+\frac{1}{2}}} \quad \left(\gamma = \frac{\log z}{2\pi} \right) \quad (1.14)$$

представляет собой решение однородной задачи Гильберта

$$\Omega_0^+(t) + \frac{1}{z} \Omega_0^-(t) = 0$$

Формула (1.13) и решает основную смешанную задачу для рассматриваемой области.

2. Пример 1. Пластина с круговым отверстием равномерно растягивается на бесконечности (фиг. 1). Дуга контура L_2 свободна, а с дугой L_1 неподвижно сцеплена жесткая накладка так, что вся эта дуга может смещаться лишь как целое.

Приняв, что растяжение пластины происходит в направлении оси x , будем рассматривать только такие положения накладки, для которых дуга L_1 смещается лишь поступательно. Центральный угол дуги L_1 обозначим 2θ , а угол между осью x и радиусом, проведенным в ее середину, обозначим β . По предположению $\beta = \frac{1}{2}\pi k$ ($k=0, 1, 2, 3$). Следовательно, на L_1 имеем

$$g(t) = \text{const}, \quad X + iY = 0 \quad (2.1)$$

Отсюда, пользуясь (1.4) и (1.1), получим

$$h(t) = -\frac{(x+1)D_2}{z} \frac{1}{t^2} \quad (2.2)$$

Плотность интеграла типа Коши в (1.13) в данном случае имеет вид:

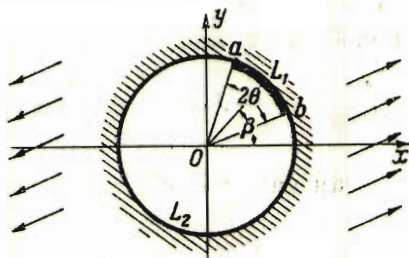
$$f(t) = \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}}{t^2} \left(\frac{t-b}{t-a} \right)^{-i\gamma} \quad (2.3)$$

Для вычисления самого интеграла рассматривается контур, изображенный на фиг. 2. Легко видеть, что интегралы по малым окружностям γ_a, γ_b с центрами в a и b стремятся к нулю.

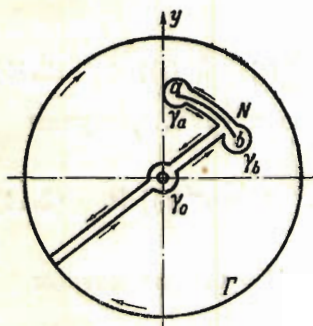
Далее, функция $f(z)$ при больших $|z|$ имеет вид $f(z) = O(z^{-1})$ и, следовательно, интеграл по окружности Γ стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Вблизи нуля $f(z)$ имеет вид:

$$f(z) = -\frac{e^{i\beta} F}{z^2} + \frac{FH_1}{z} + f^*(z) \quad (2.4)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

где $J^*(z)$ — функция, голоморфная вблизи нуля, а F и H_1 — постоянные:

$$F = e^{-2\theta\gamma}, \quad H_1 = \cos \theta + 2\gamma \sin \theta \quad (2.5)$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{f(t) dt}{t-z} = \frac{e^{i\beta} F}{z^2} - \frac{FH_1}{z}$$

Учитывая, что $f(z)$ при обходе точки a против часовой стрелки приобретает множитель $\exp[2\pi i(\frac{1}{2} + i\gamma)]$, получим, по теореме Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ -J + J \exp 2\pi i \left(\frac{1}{2} + i\gamma \right) + \oint_{\gamma_0} \frac{f(t) dt}{t-z} \right\} = -f(z) \quad \left(J = \int_{L_1} \frac{f(t) dt}{t-z} \right)$$

Замечая, что $e^{2\pi i\gamma} = x$ и подставляя J в (1.13), имеем

$$\Omega(z) = -\frac{D_2}{z^2} + \Omega_0(z) \left\{ -\frac{e^{i\beta} F D_2}{z^2} + \frac{F H_1 D_2}{z} + c_0 z + c_1 \right\} \quad (2.6)$$

Постоянная c_0 определяется из условия

$$c_0 = \Omega(\infty) = B + iC \quad (2.7)$$

Постоянную c_1 определяем так, чтобы в разложении $\Phi(z)$ при больших $|z|$ отсутствовал член z^{-1} . Учитывая, что при больших $|z|$

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z\Omega_0(z) = 1 + \left\{ \left(i\gamma + \frac{1}{2}\right)a + \left(-i\gamma + \frac{1}{2}\right)b \right\} \frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

получим условие для определения c_1 :

$$c_1 + c_0 e^{i\beta} H_2 = 0 \quad (H_2 = \cos \theta - 2\gamma \sin \theta) \quad (2.9)$$

Зная $\Omega(z)$, можно определить напряжения:

$$\sigma_r = \operatorname{Re} \{ \Omega^+(t) - \Omega^-(t) \}, \quad \tau_{r\theta} = \operatorname{Im} \{ \Omega^+(t) - \Omega^-(t) \} \quad (2.10)$$

и σ_θ из (1.7). Суммируя усилия, действующие на дугу L_1 , получим

$$N + iT = \int_{\beta+\theta}^{\beta-\theta} e^{(\theta-\beta)t} (\sigma_r + i\tau_{r\theta}) d\vartheta = ie^{-i\beta} \int_{L_1} [\Omega^+(t) - \Omega^-(t)] dt \quad (2.11)$$

Покажем, что для c_1 , определяемого (2.9), $N + iT = 0$. Рассмотрим

$$J = \int_{L_1} [\Omega^+(t) - \Omega^-(t)] dt$$

Так как $\Omega_0(t)$ есть решение однородной задачи Гильберта, то

$$\Omega_0^+(t) - \Omega_0^-(t) = -\frac{1+x}{x} \Omega_0^-(t) \quad (2.12)$$

и, следовательно,

$$J = -\frac{1+x}{x} \left\{ -e^{i\beta} F D_2 J_{-2} + F H_1 D_2 J_{-1} + c_0 J_1 + c_1 J_0 \right\} \quad (2.13)$$

где

$$J_j = \int_{L_1} t^j \Omega_0^-(t) dt \quad (2.14)$$

Легко видеть, что интегрирование по дуге L может быть (если $\theta < \frac{1}{2}\pi$) заменено интегрированием по отрезку ab . Тогда, полагая

$$a = e^{i\beta}(d+if), \quad b = e^{i\beta}(d-if), \quad t = e^{i\beta}(d+i\xi)$$

и вводя новую переменную $x^2 = (f+\xi)/(f-\xi)$, получим [3]

$$J_0 = 2ie^{\gamma\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{2i\gamma}}{1+x^2} dx = 2ie^{\pi\gamma} E_0 \quad \left(E_0 = \int_0^{\infty} \frac{x^{2i\gamma}}{1+x^2} dx = \frac{\pi\sqrt{x}}{1+x} \right) \quad (2.15)$$

Далее, получим

$$J_1 = 2ie^{i\beta} e^{\pi\gamma} H_2 E_0, \quad J_{-1} = 2ie^{-i\beta} e^{\pi\gamma} \frac{E_0}{F}, \quad J_{-2} = 2ie^{-2i\beta} e^{\pi\gamma} \frac{H_1 E_0}{F} \quad (2.16)$$

Подставляя J_j в (2.13), в силу (2.9) получим

$$J = -\frac{1+x}{x} 2ie^{\pi\gamma} E_0 (c_1 + c_0 e^{i\beta} H_2) = 0$$

Пусть теперь для определенности $\beta = \frac{1}{2}\pi$ и пластина растягивается на бесконечности усилиями интенсивностью p вдоль оси x . Имеем

$$B = \frac{p}{4}, \quad B' = -\frac{p}{2}, \quad C' = 0, \quad C = 0$$

$$c_0 = \frac{p}{4}, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = -\frac{p}{2}, \quad c_1 = -\frac{ip}{4} H_2$$

Для точек дуги L получим:

на L_1 (2.17)

$$\sigma_r = -\frac{(1+x)p}{x} \left[-\frac{F}{2} \operatorname{Im} \frac{\Omega_0^-(t)}{t^2} - \frac{FH_1}{2} \operatorname{Re} \frac{\Omega_0^-(t)}{t} + \frac{1}{4} \operatorname{Re} t\Omega_0^-(t) + \frac{H_2}{4} \operatorname{Im} \Omega_0^-(t) \right]$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{(1+x)p}{x} \left[\frac{F}{2} \operatorname{Re} \frac{\Omega_0^-(t)}{t^2} - \frac{FH_1}{2} \operatorname{Im} \frac{\Omega_0^-(t)}{t} + \frac{1}{4} \operatorname{Im} t\Omega_0^-(t) - \frac{H_2}{4} \operatorname{Re} \Omega_0^-(t) \right]$$

$$\sigma_\theta = \frac{3-x}{1+x} \sigma_r$$

на L_2 (2.18)

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$$

$$\sigma_\theta = 4p \left[-\frac{F_2}{2} \operatorname{Im} \frac{\Omega_0(t)}{t^2} - \frac{FH_1}{2} \operatorname{Re} \frac{\Omega_0(t)}{t} + \frac{1}{4} \operatorname{Re} t\Omega_0(t) + \frac{H_2}{4} \operatorname{Im} \Omega_0(t) \right]$$

При $\theta = 0$ эти решения переходят в известное решение о растяжении плоскости со свободным отверстием.

Для случая $\theta \neq 0$ будем для точек дуги L_1 отсчитывать текущий угол α от положительного направления оси y . Имеем

$$\frac{\sigma_\theta(\alpha)}{p} = \frac{(x-3)x^{(\theta-\pi)/2\pi}}{2\sqrt{\sin^{1/2}(\theta+\alpha)\sin^{1/2}(\theta-\alpha)}} \sum_j B_j \cos\left(\varphi_1 + j\frac{\alpha}{2}\right) \quad (2.19)$$

где индекс $j = -1, 1, 3, 5$, а

$$B_{-1} = -\frac{1}{4}, \quad B_1 = \frac{H_2}{4}, \quad B_3 = -\frac{FH_1}{2}, \quad B_5 = \frac{F}{2} \quad (2.20)$$

$$\varphi_1 = \frac{\log x}{2\pi} \log \frac{\sin^{1/2}(\theta-\alpha)}{\sin^{1/2}(\theta+\alpha)}$$

В точках дуги L_2 , отсчитывая угол α от отрицательного направления оси y , имеем

$$\frac{\sigma_{\theta}(z)}{P} = \frac{2z^{\theta/2\pi}}{\sqrt{\cos^{1/2}(\theta+x)\cos^{1/2}(\theta-x)}} \sum_j E_j \cos\left(\varphi_2 + j \frac{\alpha}{2}\right) \quad (2.21)$$

где

$$\varphi_2 = \frac{\log z}{2\pi} \log \frac{\cos^{1/2}(\theta-x)}{\cos^{1/2}(\theta+x)}, \quad E_{-1} = \frac{1}{4}, \quad E_1 = \frac{H_2}{4}, \quad E_3 = \frac{FH_1}{2}, \quad E_5 = \frac{F}{2}$$

На фиг. 3. представлено распределение напряжения σ_{θ} в точках контура L . Пунктирной линией изображено σ_{θ} для свободного отверстия. Напряжения отложены вдоль лучей, исходящих из центра.

3. Пример 2. На дугу отверстия L_1 действует жесткий штамп, неподвижно сцепленный с этой дугой и сдавливаемый радиальной силой P . Усилия на бесконечности отсутствуют. В данном случае

$$g'(t) = 0, \quad X = 0, \quad Y = P, \quad D_1 = \frac{ixP}{2\pi(1+x)}, \quad D_2 = 0 \quad (3.1)$$

Отсюда

$$h(t) = -\frac{iP}{2\pi} \frac{1}{t} \quad (3.2)$$

Для решения, исчезающего на бесконечности, $\Omega(z)$ дается интегралом типа Коши

$$\Omega(z) = -\frac{iP}{2\pi} \frac{\Omega_0(z)}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{dt}{t(z-t)} \Omega_0(t) + c_1 \Omega_0(z) \quad (3.3)$$

Плотность интеграла имеет вид: при больших $|t|$

$$f_1(t) = \frac{1}{t\Omega_0(t)} = 1 + O(t^{-1}) \quad (3.4)$$

вблизи нуля

$$f_1(t) = -\frac{F}{t} e^{i\theta} + f_1^*(t) \quad (3.5)$$

где F дается (2.5), а f_1^* голоморфна вблизи нуля. Обозначим

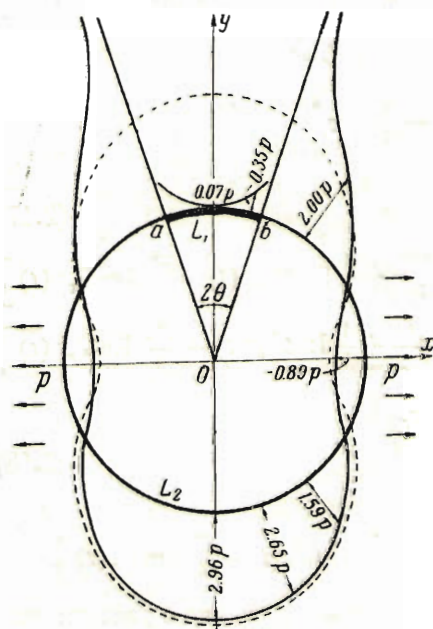
$$J = \int_{L_1} \frac{f_1(t) dt}{t-z}$$

Тогда, рассматривая снова контур λ (фиг. 2), получим

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ -\frac{1+x}{z} J + \oint_{\gamma_0} \frac{f_1(t) dt}{t-z} + \oint_{\Gamma} \frac{f_1(t) dt}{t-z} \right\} = -f_1(z) \quad (3.6)$$

Легко заметить, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f_1(t) dt}{t-z} = -1, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_0} \frac{f_1(t) dt}{t-z} = \frac{F}{z} e^{i\theta} \quad (3.7)$$



Фиг. 3.

Отсюда

$$\Omega(z) = -\frac{D_1}{z} + \Omega_0(z) \left[-\frac{FD_1}{z} e^{i\beta} + \frac{iPx}{2\pi(1+z)} + c_1 \right] \quad (3.8)$$

Для определения постоянной c_1 заметим, что функция $\Phi(z)$ согласно формулы (1.4) имеет при больших $|z|$ вид:

$$\Phi(z) = -\frac{iP}{2\pi(1+z)} \frac{1}{z} + O(z^{-2})$$

Из (1.3) и (3.8) следует

$$\Phi(z) = \left(\frac{iPx}{2\pi(1+z)} + c_1 \right) \frac{1}{z} + O(z^{-2})$$

Следовательно,

$$-\frac{iP}{2\pi(1+z)} = \frac{iPx}{2\pi(1+z)} + c_1,$$

или

$$c_1 = -\frac{iP}{2\pi} \quad (3.9)$$

Условия статики для штампа автоматически выполняются. Действительно, по (2.11) имеем

$$N + iT = -\frac{1+z}{z} \left\{ -\frac{iPe^{i\beta}F}{2\pi} J_{-1} + \frac{iP}{2\pi} J_0 \right\} - \frac{1+z}{z} c_1 J_0$$

В силу (2.15) и (2.16) выражение в фигурных скобках равно нулю. Подставляя значение J_0 , получим

$$N + iT = -P, \quad \text{или} \quad N = -P, \quad T = 0$$

Напряжения имеем из (1.7) и (2.10):

$$\text{на } L_1 \quad (3.10)$$

$$\frac{\sigma_r}{P} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ F \operatorname{Re} \frac{\Omega_0^-(t)}{t} + \frac{1}{z} \operatorname{Im} \Omega_0^-(t) \right\}$$

$$\frac{\tau_{r\theta}}{P} = -\frac{1}{2\pi} \left\{ F \operatorname{Im} \frac{\Omega_0^-(t)}{t} - \frac{1}{z} \operatorname{Re} \Omega_0^-(t) \right\}$$

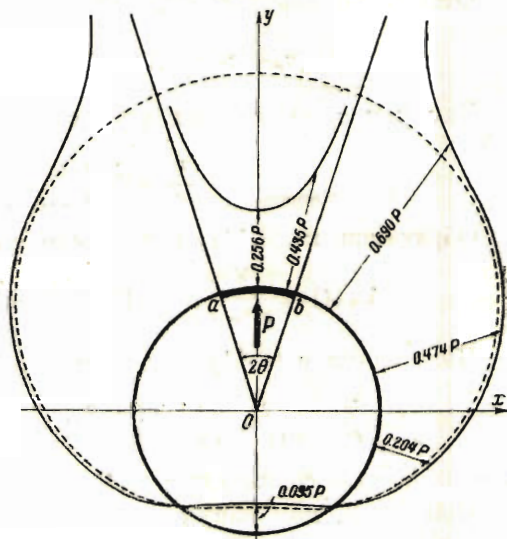
$$\frac{\sigma_\theta}{P} = \frac{3-z}{1+z} \frac{\sigma_r}{P}$$

на L_2

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$$

$$\frac{\sigma_\theta}{P} = \frac{2z}{\pi(1+z)} \left\{ F \operatorname{Re} \frac{\Omega_0(t)}{t} + \frac{1}{z} \operatorname{Im} \Omega_0(t) \right\} \quad (3.11)$$

Если $\theta = 0$, то (3.11) дает напряжения, возникающие в плоскости с круговым отверстием, к которому приложена сосредоточенная сила, действующая по нормали к контуру. Решение последней задачи легко получим из решенной Мусхелишвили задачи об эллиптическом отверстии, часть контура которого подвергнута равномерному давлению^[4]. Положив в полученных им формулах $m = 0$, $R = 1$ и перейдя к пределу



Фиг. 4.

при беспредельном уменьшении длины дуги, по которой действуют усилия, получим

$$\Phi(\zeta) = \frac{P}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - i} - \frac{z}{1 + z} \frac{1}{\zeta} \right) \quad (3.12)$$

Отсюда на контуре L ($\zeta = e^{i\theta}$)

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \Phi(\zeta) = \frac{2P}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{z}{1+z} \sin \theta \right\}$$

Так как $\sigma_r = 0$ во всех точках контура, кроме $\zeta = i$, то

$$\frac{\sigma_\theta}{P} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{z}{1+z} \sin \theta \right\} \quad (3.13)$$

Обратимся к (3.11) и положим в ней $\theta = 0$. Пусть $t = e^{i\theta}$, тогда

$$\Omega_0(t) = \frac{1}{e^{i\theta} - i}, \quad \operatorname{Re} \frac{\Omega_0(t)}{t} = \frac{1 + 2 \sin \theta}{2}, \quad \operatorname{Im} \Omega(t) = \frac{1}{2}$$

Подставляя в (3.11), получим, учитывая, что $F = 1$:

$$\frac{\sigma_\theta}{P} = \frac{2z}{\pi(1+z)} \left\{ \frac{1 + 2 \sin \theta}{2} + \frac{1}{2z} \right\} = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{z}{1+z} \sin \theta \right\}$$

что полностью совпадает с (3.13).

При $\theta \neq 0$, для напряжения σ_θ получим:

$$\text{в точках дуги } L_1 \quad (3.14)$$

$$\frac{\sigma_\theta(z)}{kP} = \frac{(3-z)z^{(\theta-\pi)/2\pi}}{4\pi(1+z)\sqrt{\sin^{1/2}(\theta+z)\sin^{1/2}(\theta-z)}} \left\{ F \cos\left(\varphi_1 + \frac{3z}{2}\right) + \frac{1}{z} \cos\left(\varphi_1 + \frac{z}{2}\right) \right\}$$

$$\text{в точках дуги } L_2 \quad (3.15)$$

$$\frac{\sigma_\theta(z)}{P} = \frac{z^{\theta/2\pi+1}}{\pi(1+z)\sqrt{\cos^{1/2}(\theta+z)\cos^{1/2}(\theta-z)}} \left\{ -F \cos\left(\varphi_2 + \frac{3z}{2}\right) + \frac{1}{z} \cos\left(\varphi_2 + \frac{z}{2}\right) \right\}$$

Углы φ_1 и φ_2 определяются соответственно (2.20) и (2.22).

На фиг. 4 представлено распределение напряжения σ_θ по контуру L . Пунктирной линией дано σ_θ для сосредоточенной нормальной силы (3.13). Напряжения отложены вдоль лучей, исходящих из центра.

Поступила в редакцию
12 V 1948

Ленинградский политехнический
институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. ОГИЗ. Гостехиздат. 1945.
2. Карцивадзе И. Н. Основные задачи теории упругости для упругого круга. Труды Тбилисского математического ин-та; 1943. Т. XII.
3. Минцберг Б. Л. Расчет напряженного состояния, возникающего в полуплоскости при воздействии на нее жесткого штампа; Труды Ленинградского политехнического ин-та. 1947. № 3.
4. Мусхелишвили Н. И. [Некоторые задачи теории упругости. Академия Наук СССР. 1933.
5. Шерман Д. И. Плоская задача теории упругости со смешанными предельными условиями. Труды Сейсмического ин-та АН СССР. 1938. № 88.