Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика, Том XII, 1948

ИЗГИБ КЛИНОВИДНОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ НАГРУЗКИ

И. Е. Сахаров[1]

(Москва)

§ 1. Постановка и решение краевой задачи. Согласно приближенной теории Кирхгофа определение деформированного и напряженного состояний в пластинке приводится к решению краевой задачи для бигармонического уравнения с правой частью

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D}\, p(x, y) \qquad \left(D = \frac{2Eh^3}{3(1-\sigma^2)}\right) \tag{1.1}$$

где w — прогиб пластинки, D — цилиндрическая жесткость пластинки, $2h$ — толщина пластинки, E, σ — модуль Юнга и коэффициент Пуассона, $p(x, y)$ — действующая на единицу площади нагрузка.

Рассмотрим пластинку в форме бесконечного клина с углом $2\alpha = \pi/\nu$. Будем пользоваться полярными координатами ρ, ϑ с началом в вершине клина и осью, направленной по биссектрисе угла. Стороны клина полагаем защемленными, следовательно, имеем граничные условия

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\rho\,\partial\vartheta} = 0 \qquad \text{при } \vartheta = \pm\alpha \tag{1.2}$$

Найдем прогиб в точке $M(\rho, \vartheta)$ от сосредоточенной силы P, приложенной (фиг. 1) в точке $P(\rho_0, \vartheta_0)$, т. е. построим функцию Грина бигармонического уравнения.

Фиг. 1.

Решение ищем в форме [1]

$$w = \frac{P}{8\pi D}\,(r^2\Gamma + \psi) \tag{1.3}$$

где Γ — функция Грина гармонического уравнения для клина, ψ — произвольная правильная бигармоническая функция и

$$r^2 = \rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) = 2e^{\xi+\xi_0}\,[\operatorname{ch}(\xi - \xi_0) - \cos(\vartheta - \vartheta_0)] \tag{1.4}$$

$$(\ \xi = \log\rho, \quad \xi_0 = \log\rho_0\ )$$

В решении (1.3) первый член дает прогиб пластинки от действия сосредоточенной силы, второй член дает прогиб от изгибающих моментов, возникающих на сторонах клина вследствие защемления.

[1] Кандидатская диссертация. Защищена в Моск. университете 27 VI 1947 г.

Чтобы найти функцию Г, входящую в (1.3), воспользуемся функцией, отображающей область бесконечного клина на круг единичного радиуса:

$$W(z)=\frac{z^{\nu}-z_0^{\nu}}{z^{\nu}-\bar z_0^{\nu}} \qquad \left(z=\rho e^{i\vartheta}, \quad z_0=\rho_0{}^{i\vartheta_0}\right) \tag{1.5}$$

Логарифм $|W(z)|$ будет функцией Грина $\Gamma=\Gamma(\rho, \vartheta; \rho_0 \vartheta_0)$ гармонического уравнения. Имеем

$$\Gamma=\frac{1}{2}\log\frac{\rho^{2\nu}+2\rho^{\nu}\rho_0{}^{\nu}\cos\nu(\vartheta+\vartheta_0)+\rho_0{}^{2\nu}}{\rho^{2\nu}-2\rho^{\nu}\rho_0{}^{\nu}\cos\nu(\vartheta-\vartheta_0)+\rho_0{}^{2\nu}}=\frac{1}{2}\log\frac{\operatorname{ch}\nu(\xi-\xi_0)+\cos\nu(\vartheta+\vartheta_0)}{\operatorname{ch}\nu(\xi-\xi_0)-\cos\nu(\vartheta-\vartheta_0)} \tag{1.6}$$

Граничные условия для функции ψ будут

$$\begin{gathered}
\psi=0 \qquad \text{при } \vartheta=\alpha, \quad \vartheta=-\alpha\\
\frac{\partial\psi}{\rho\partial\vartheta}=-\frac{r^2}{\rho}\frac{\partial\Gamma}{\partial\vartheta}=2\nu\rho_0\cos\nu\vartheta_0\,\frac{\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)-\cos(\alpha-\vartheta_0)}{\operatorname{ch}\nu(\xi-\xi_0)-\cos\nu(\alpha-\vartheta_0)} \qquad \text{при } \vartheta=\alpha\\
\frac{\partial\psi}{\rho\partial\vartheta}=-\frac{r^2}{\rho}\frac{\partial\Gamma}{\partial\vartheta}=-2\nu\rho_0\cos\nu\vartheta_0\,\frac{\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)-\cos(\alpha+\vartheta_0)}{\operatorname{ch}\nu(\xi-\xi_0)-\cos\nu(\alpha-\vartheta_0)} \qquad \text{при } \vartheta=-\alpha
\end{gathered} \tag{1.7}$$

Функцию ψ ищем в виде интеграла по параметру m от линейной комбинации частных решений [2]

$$\begin{aligned}
\psi_1&=\rho\cos\vartheta\operatorname{ch}m\vartheta\cos m\xi, & \psi_5&=\rho\sin\vartheta\operatorname{ch}m\vartheta\cos m\xi\\
\psi_2&=\rho\cos\vartheta\operatorname{sh}m\vartheta\cos m\xi, & \psi_6&=\rho\sin\vartheta\operatorname{sh}m\vartheta\cos m\xi\\
\psi_3&=\rho\cos\vartheta\operatorname{sh}m\vartheta\sin m\xi, & \psi_7&=\rho\sin\vartheta\operatorname{sh}m\vartheta\sin m\xi\\
\psi_4&=\rho\cos\vartheta\operatorname{ch}m\vartheta\sin m\xi, & \varphi_8&=\rho\sin\vartheta\operatorname{ch}m\vartheta\sin m\xi
\end{aligned} \tag{1.8}$$

бигармонического уравнения, т. е. функцию ψ берем в виде

$$\psi=\int_0^{\infty}\sum_{k=1}^{8}A_k(m)\,\psi_k\,dm \tag{1.9}$$

Для определения функций $A_k(m)$ подставим выражение (1.9) в левые части граничных условий (1.7), а функции, стоящие в правых частях, представим в виде интегралов Фурье [3]. Получаем:

На стороне клина $\vartheta=\alpha$ (1.10)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}&(A_1\cos\alpha\operatorname{ch}m\alpha\cos m\xi+A_2\cos\alpha\operatorname{sh}m\alpha\cos m\xi+\\
&+A_3\cos\alpha\operatorname{sh}m\alpha\sin m\xi+A_4\cos\alpha\operatorname{ch}m\alpha\sin m\xi+\\
&+A_5\sin\alpha\operatorname{ch}m\alpha\cos m\xi+A_6\sin\alpha\operatorname{sh}m\alpha\cos m\xi+\\
&+A_7\sin\alpha\operatorname{sh}m\alpha\sin m\xi+A_8\sin\alpha\operatorname{ch}m\alpha\sin m\xi)\,dm=0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}&[A_1(-\sin\alpha\operatorname{ch}m\alpha+m\cos\alpha\operatorname{sh}m\alpha)\cos m\xi+\\
&+A_2(-\sin\alpha\operatorname{sh}m\alpha+m\cos\alpha\operatorname{ch}m\alpha)\cos m\xi+\\
&+A_3(-\sin\alpha\operatorname{sh}m\alpha+m\cos\alpha\operatorname{ch}m\alpha)\sin m\xi+\\
&+A_4(-\sin\alpha\operatorname{ch}m\alpha+m\cos\alpha\operatorname{sh}m\alpha)\sin m\xi+\\
&+A_5(\cos\alpha\operatorname{ch}m\alpha+m\sin\alpha\operatorname{sh}m\alpha)\cos m\xi+\\
&+A_6(\cos\alpha\operatorname{sh}m\alpha+m\sin\alpha\operatorname{ch}m\alpha)\cos m\xi+\\
&+A_7(\cos\alpha\operatorname{sh}m\alpha+m\sin\alpha\operatorname{ch}m\alpha)\sin m\xi+\\
&+A_8(\cos\alpha\operatorname{ch}m\alpha+m\sin\alpha\operatorname{sh}m\alpha)\sin m\xi]\,dm=\\
=4\rho_0\int_0^{\infty}&\left[\frac{\operatorname{ch}m(3\alpha+\vartheta_0)\cos(\alpha-\vartheta_0)-\operatorname{ch}m(\alpha-\vartheta_0)\cos(3\alpha+\vartheta_0)}{2(\operatorname{ch}^2 2m\alpha-\cos^2 2\alpha)}-\right.\\
&\left.-\frac{\cos(\alpha-\vartheta_0)\operatorname{sh}m(\alpha+\vartheta_0)}{\operatorname{sh}2m\alpha}\right]\cos m(\xi-\xi_0)\,dm
\end{aligned}$$

На стороне клина $\vartheta = -\alpha$

$$\int_0^\infty (A_1 \cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha \cos m\xi - A_2 \cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha \cos m\xi - A_3 \cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha \sin m\xi + A_4 \cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha \sin m\xi - A_5 \sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha \cos m\xi + A_6 \sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha \cos m\xi + A_7 \sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha \sin m\xi - A_8 \sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha \sin m\xi]\, dm = 0$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty [&A_1 (\sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha - m \cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha) \cos m\xi + \\ &+ A_2 (-\sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha + m \cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha) \cos m\xi + \\ &+ A_3 (-\sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha + m \cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha) \sin m\xi + \\ &+ A_4 (\sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha - m \cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha) \sin m\xi + \\ &+ A_5 (\cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha + m \sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha) \cos m\xi + \\ &+ A_6 (-\cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha - m \sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha) \cos m\xi + \\ &+ A_7 (-\cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha - m \sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha) \sin m\xi + \\ &+ A_8 (\cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha + m \sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha) \sin m\xi]\, dm = \\ = -4\rho_0 \int_0^\infty \Bigg[&\frac{\operatorname{ch} m (3\alpha - \vartheta_0) \cos(\alpha + \vartheta_0) - \operatorname{ch}(\alpha + \vartheta_0) \cos(3\alpha - \vartheta_0)}{2(\operatorname{ch}^2 2m\alpha - \cos^2 2\alpha)} - \\ &- \frac{\cos(\alpha + \vartheta_0) \operatorname{sh} m(\alpha - \vartheta_0)}{\operatorname{sh} 2m\alpha} \Bigg] \cos m(\xi - \xi_0)\, dm\end{aligned} \tag{1.11}$$

Приравнивая коэффициенты у $\cos m\xi$ и $\sin m\xi$, получим (1.12)

$$A_1 \cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha + A_2 \cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha + A_5 \sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha + A_6 \sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha = 0$$

$$A_3 \cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha + A_4 \cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha + A_7 \sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha + A_8 \sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha = 0$$

$$\begin{aligned}&A_1 (-\sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha + m \cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha) + A_2 (-\sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha + m \cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha) + \\ &+ A_5 (\cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha + m \sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha) + A_6 (\cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha + m \sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha) = \\ &= 4\rho_0 \left[\frac{\operatorname{ch} m (3\alpha + \vartheta_0) \cos(\alpha - \vartheta_0) - \operatorname{ch} m(\alpha - \vartheta_0) \cos(3\alpha + \vartheta_0)}{2(\operatorname{ch}^2 2m\alpha - \cos^2 2\alpha)} - \frac{\cos(\alpha - \vartheta_0) \operatorname{sh} m(\alpha + \vartheta_0)}{\operatorname{sh} 2m\alpha} \right] \cos m\xi_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A_3 (-\sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha + m \cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha) + A_4 (-\sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha + m \cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha) + \\ &+ A_7 (\cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha + m \sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha) + A_8 (\cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha + m \sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha) = \\ &= 4\rho_0 \left[\frac{\operatorname{ch} m (3\alpha + \vartheta_0) \cos(\alpha - \vartheta_0) - \operatorname{ch}(\alpha - \vartheta_0) \cos(3\alpha + \vartheta_0)}{2(\operatorname{ch}^2 2m\alpha - \cos^2 2\alpha)} - \frac{\cos(\alpha - \vartheta_0) \operatorname{sh} m(\alpha + \vartheta_0)}{\operatorname{sh} 2m\alpha} \right] \sin m\xi_0\end{aligned}$$

$$A_1 \cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha - A_2 \cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha - A_5 \sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha + A_6 \sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha = 0$$

$$-A_3 \cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha + A_4 \cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha + A_7 \sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha - A_8 \sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha = 0$$

$$\begin{aligned}&A_1 (\sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha - m \cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha) + A_2 (-\sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha + m \cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha) + \\ &+ A_5 (\cos\alpha \operatorname{ch} m\alpha + m \sin\alpha \operatorname{sh} m\alpha) + A_6 (-\cos\alpha \operatorname{sh} m\alpha - m \sin\alpha \operatorname{ch} m\alpha) = \\ &= -4\rho_0 \left[\frac{\operatorname{ch} m (3\alpha - \vartheta_0) \cos(\alpha + \vartheta_0) - \operatorname{ch} m(\alpha + \vartheta_0) \cos(3\alpha - \vartheta_0)}{2(\operatorname{ch}^2 2m\alpha - \cos^2 2\alpha)} - \frac{\cos(\alpha + \vartheta_0) \operatorname{sh} m(\alpha - \vartheta_0)}{\operatorname{sh} 2m\alpha} \right] \cos m\xi_0\end{aligned}$$

$$A_3(-\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,m\alpha + m\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,m\alpha) + A_4(\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,m\alpha - m\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,m\alpha) +$$
$$+ A_7(-\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,m\alpha - m\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,m\alpha) + A_8(\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,m\alpha + m\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,m\alpha) =$$
$$= -4\rho_0\left[\frac{\mathrm{ch}\,m(3\alpha-\vartheta_0)\cos(\alpha+\vartheta_0) - \mathrm{ch}\,m(\alpha+\vartheta_0)\cos(3\alpha-\vartheta_0)}{2(\mathrm{ch}^2 2m\alpha - \cos^2 2\alpha)} - \right.$$
$$\left. - \frac{\cos(\alpha+\vartheta_0)\,\mathrm{sh}\,m(\alpha-\vartheta_0)}{\mathrm{sh}\,2m\alpha}\right]\sin m\xi_0$$

Решение этой системы восьми линейных алгебраических уравнений с восемью неизвестными дает (1.13)

$$A_1 = -\frac{4\rho_0\cos m\xi_0\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,m\alpha\,(\mathrm{sh}\,2m\alpha - m\sin 2\alpha)(b_1+b_2)}{\mathrm{sh}^2 2m\alpha - m^2\sin^2 2\alpha}$$

$$A_2 = -\frac{4\rho_0\cos m\xi_0\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,m\alpha\,(\mathrm{sh}\,2m\alpha + m\sin 2\alpha)(b_1-b_2)}{\mathrm{sh}^2 2m\alpha - m^2\sin^2 2\alpha}$$

$$A_3 = -\frac{4\rho_0\sin m\xi_0\sin\alpha\,\mathrm{ch}\,m\alpha\,(\mathrm{sh}\,2m\alpha + m\sin 2\alpha)(b_1-b_2)}{\mathrm{sh}^2 2m\alpha - m^2\sin^2 2\alpha}$$

$$A_4 = -\frac{4\rho_0\sin m\xi_0\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,m\alpha\,(\mathrm{sh}\,2m\alpha - m\sin 2\alpha)(b_1+b_2)}{\mathrm{sh}^2 2m\alpha - m^2\sin^2 2\alpha}$$

$$A_5 = \frac{4\rho_0\cos m\xi_0\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,m\alpha\,(\mathrm{sh}\,2m\alpha + m\sin 2\alpha)(b_1-b_2)}{\mathrm{sh}^2 2m\alpha - m^2\sin^2 2\alpha}$$

$$A_6 = \frac{4\rho_0\cos m\xi_0\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,m\alpha\,(\mathrm{sh}\,2m\alpha - m\sin 2\alpha)(b_1+b_2)}{\mathrm{sh}^2 2m\alpha - m^2\sin^2 2\alpha}$$

$$A_7 = \frac{4\rho_0\sin m\xi_0\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,m\alpha\,(\mathrm{sh}\,2m\alpha - m\sin 2\alpha)(b_1+b_2)}{\mathrm{sh}^2 2m\alpha - m^2\sin^2 2\alpha}$$

$$A_8 = \frac{4\rho_0\sin m\xi_0\cos\alpha\,\mathrm{sh}\,m\alpha\,(\mathrm{sh}\,2m\alpha + m\sin 2\alpha)(b_1-b_2)}{\mathrm{sh}^2 2m\alpha - m^2\sin^2 2\alpha}$$

Здесь введены обозначения (1.14)

$$b_1 = \frac{(\mathrm{ch}\,m\vartheta_0\,\mathrm{ch}\,m\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_0 + \mathrm{sh}\,m\vartheta_0\,\mathrm{sh}\,m\alpha\sin\alpha\sin\vartheta_0)(\mathrm{ch}\,2m\alpha - \cos 2\alpha)}{\mathrm{ch}^2 2m\alpha - \cos^2 2\alpha} +$$
$$+ \frac{(\mathrm{sh}\,m\vartheta_0\,\mathrm{sh}\,m\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_0 + \mathrm{ch}\,m\vartheta_0\,\mathrm{ch}\,m\alpha\sin\alpha\sin\vartheta_0)(\mathrm{ch}\,2m\alpha + \cos 2\alpha)}{\mathrm{ch}^2 2m\alpha - \cos^2 2\alpha} -$$
$$- \frac{\mathrm{ch}\,m\vartheta_0\,\mathrm{sh}\,m\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_0 + \mathrm{sh}\,m\vartheta_0\,\mathrm{ch}\,m\alpha\sin\alpha\sin\vartheta_0}{\mathrm{sh}\,2m\alpha} -$$
$$- \frac{\mathrm{sh}\,m\vartheta_0\,\mathrm{ch}\,m\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_0 + \mathrm{ch}\,m\vartheta_0\,\mathrm{sh}\,m\alpha\sin\alpha\sin\vartheta_0}{\mathrm{sh}\,2m\alpha}$$

$$b_2 = \frac{(\mathrm{ch}\,m\vartheta_0\,\mathrm{ch}\,m\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_0 + \mathrm{sh}\,m\vartheta_0\,\mathrm{sh}\,m\alpha\sin\alpha\sin\vartheta_0)(\mathrm{ch}\,2m\alpha - \cos 2\alpha)}{\mathrm{ch}^2 2m\alpha - \cos^2 2\alpha} -$$
$$- \frac{(\mathrm{sh}\,m\vartheta_0\,\mathrm{sh}\,m\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_0 + \mathrm{ch}\,m\vartheta_0\,\mathrm{ch}\,m\alpha\sin\alpha\sin\vartheta_0)(\mathrm{ch}\,2m\alpha + \cos 2\alpha)}{\mathrm{ch}^2 2m\alpha - \cos^2 2\alpha} -$$
$$- \frac{\mathrm{ch}\,m\vartheta_0\,\mathrm{sh}\,m\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_0 + \mathrm{sh}\,m\vartheta_0\,\mathrm{ch}\,m\alpha\sin\alpha\sin\vartheta_0}{\mathrm{sh}\,2m\alpha} +$$
$$+ \frac{\mathrm{sh}\,m\vartheta_0\,\mathrm{ch}\,m\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_0 + \mathrm{ch}\,m\vartheta_0\,\mathrm{sh}\,m\alpha\sin\alpha\sin\vartheta_0}{\mathrm{sh}\,2m\alpha}$$

$$b_1 + b_2 = 4(\mathrm{ch}\,m\vartheta_0\,\mathrm{sh}\,m\alpha\sin^2\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_0 - \mathrm{sh}\,m\vartheta_0\,\mathrm{ch}\,m\alpha\sin\alpha\cos^2\alpha\sin\vartheta_0)$$

$$b_1 - b_2 = 4(\mathrm{ch}\,m\vartheta_0\,\mathrm{sh}\,m\alpha\sin\alpha\cos^2\alpha\sin\vartheta_0 - \mathrm{sh}\,m\vartheta_0\,\mathrm{ch}\,m\alpha\sin^2\alpha\cos\alpha\cos\vartheta_0)$$

После подстановки значений $A_k(m)$ в выражение (1.9) получим

$$\psi = -4\rho\rho_0 \int_0^\infty \frac{\cos m(\xi-\xi_0)}{\operatorname{sh}^2 2m\alpha - m^2\sin^2 2\alpha}\left[(b_1 \operatorname{sh} 2m\alpha - b_2 m\sin 2\alpha)\sin(\alpha-\vartheta)\operatorname{sh} m(\alpha+\vartheta) + \right.$$

$$\left. + (b_2 \operatorname{sh} 2m\alpha - b_1 m \sin 2\alpha)\sin(\alpha+\vartheta)\operatorname{sh} m(\alpha-\vartheta)\right] dm \tag{1.15}$$

Тогда для прогиба пластинки будем иметь

$$w = \frac{P}{8\pi D}\left\{\frac{r^2}{2}\log\frac{\operatorname{ch}\nu(\xi-\xi_0)+\cos\nu(\vartheta+\vartheta_0)}{\operatorname{ch}\nu(\xi-\xi_0)-\cos\nu(\vartheta-\vartheta_0)} - \right.$$

$$-4\rho\rho_0\int_0^\infty \frac{\cos m(\xi-\xi_0)}{\operatorname{sh}^2 2m\alpha - m^2\sin^2 2\alpha}\left[(b_1\operatorname{sh}2m\alpha - b_2 m\sin 2\alpha)\sin(\alpha-\vartheta)\operatorname{sh} m(\alpha+\vartheta) + \right.$$

$$\left.\left. + (b_2\operatorname{sh}2m\alpha - b_1 m\sin 2\alpha)\sin(\alpha+\vartheta)\operatorname{sh} m(\alpha-\vartheta)\right] dm\right\} \tag{1.16}$$

Изучим поведение решения на бесконечности в зависимости от угла $\alpha\,(\alpha=\pi/2\nu)$. Для этого следует точку приложения силы поместить на биссектрису ($\vartheta_0=0$) и рассмотреть прогибы на биссектрисе ($\vartheta=0$). В предположении, что $\nu\neq 1$, имеем

$$\lim_{\rho\to\infty} w = \frac{P}{8\pi D}\lim_{\rho\to\infty} c\rho_0^{\nu-1}\rho^{1-\nu} \qquad (c=\text{const}) \tag{1.17}$$

отсюда видно, что прогиб на бесконечности стремится к нулю, если $\nu>1$, т. е. решение имеет место для клина с углом, меньшим π.

В случае действия на пластинку распределенной нагрузки прогиб получим из формулы (1.17) при помощи квадратур

$$w_1(\rho,\vartheta) = \iint\limits_{T^*} w(\rho,\vartheta;\ \rho_0^*,\ \vartheta_0^*)\,p(\rho_0^*,\ \vartheta_0^*)\,\rho_0^*\,d\rho_0^*\,d\vartheta_0^* \tag{1.18}$$

где T^* — область действия распределенной нагрузки $p(\rho,\vartheta)$.

Дифференцируя формулу (1.16), можно получить прогиб пластинки под действием сосредоточенного момента.

§ 2. Исследование полученного решения для пластинки в форме четверти плоскости. При $\nu=2$ формула (1.16) принимает вид:

$$w = \frac{P}{8\pi D}\left\{\frac{r^2}{2}\log\frac{\operatorname{ch}2(\xi-\xi_0)+\cos 2(\vartheta+\vartheta_0)}{\operatorname{ch}2(\xi-\xi_0)-\cos 2(\vartheta-\vartheta_0)} + \right. \tag{2.1}$$

$$+ 8\rho\rho_0\sin\theta^-\sin\theta_0^-\int_0^\infty \frac{\cos m(\xi-\xi_0)\operatorname{sh} m\theta^+\operatorname{sh} m\theta_0^+\, m\,dm}{(\operatorname{sh}^2 {}^1/_2\, m\pi - m^2)\operatorname{sh} m\pi} -$$

$$- 8\rho\rho_0\sin\theta^-\sin\theta_0^+\int_0^\infty \frac{\cos m(\xi-\xi_0)\operatorname{sh} m\theta^+\operatorname{sh} m\theta_0^-\operatorname{sh} {}^1/_2\, m\pi\,dm}{(\operatorname{sh}^2 {}^1/_2\, m\pi - m^2)\operatorname{sh} m\pi} +$$

$$+ 8\rho\rho_0\sin\theta^+\sin\theta_0^+\int_0^\infty \frac{\cos m(\xi-\xi_0)\operatorname{sh} m\theta^-\operatorname{sh} m\theta_0^-\, m\,dm}{(\operatorname{sh}^2 {}^1/_2\, m\pi - m^2)\operatorname{sh} m\pi} -$$

$$\left. - 8\rho\rho_0\sin\theta^+\sin\theta_0^-\int_0^\infty \frac{\cos m(\xi-\xi_0)\operatorname{sh} m\theta^-\operatorname{sh} m\theta_0^+\operatorname{sh} m\, {}^1/_2\, m\pi\,dm}{(\operatorname{sh}^2 {}^1/_2\, m\pi - m^2)\operatorname{sh} m\pi}\right\}$$

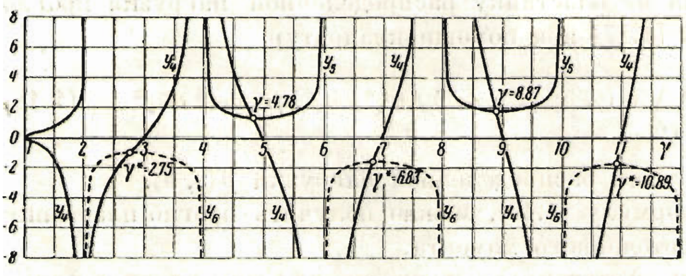
Здесь и в дальнейшем введены обозначения

$$\frac{\pi}{4}-\vartheta=\theta^-,\quad \frac{\pi}{4}+\vartheta=\theta^+,\quad \frac{\pi}{4}-\vartheta_0=\theta_0^-\quad \frac{\pi}{4}+\vartheta_0=\theta_0^+$$

В формуле (2.1) подинтегральные функции — функции четные, поэтому при исследовании интервал интегрирования можно распространить на всю ось m. В нуле ($m=0$) подинтегральные функции ограничены. Для достаточно больших значений m мажорантой подинтегральных функций при $\vartheta<{}^1/_4\pi$, $\vartheta_0<{}^1/_4\pi$ является $C\exp(-{}^1/_2 m\pi)$, где $C=\mathrm{const}$. Так как ρ входит под знак ограниченной функции, то все интегралы сходятся равномерно относительно ρ. Для вычисления интегралов подинтегральные функции будем рассматривать как действительные части функций комплексного переменного $m=\beta+i\gamma$ следующих видов:

$$\frac{\exp\left[im(\xi-\xi_0)\right] m \operatorname{sh} m\,\theta^+ \operatorname{sh} m\,\theta_0^+}{(\operatorname{sh}^2 {}^1/_2 m\pi-m^2)\operatorname{sh} m\pi},\qquad \frac{\exp\left[im(\xi-\xi_0)\right] \operatorname{sh} {}^1/_2 m\pi \operatorname{sh} m\,\theta^+ \operatorname{sh} m\,\theta_0^+}{(\operatorname{sh}^2 {}^1/_2 m\pi-m^2)\operatorname{sh} m\pi}$$

При $\rho<\rho_0$ ($\xi<\xi_0$) интегралы от этих функций по полуокружности бесконечного радиуса стремятся к нулю, если полуокружность лежит в нижней полуплоскости (при $\rho>\rho_0$ то же происходит, если брать верхнюю полуплоскость). Поэтому остается рассмотреть лишь интегралы по действительной оси. Определим полюсы подинтегральных функций, т. е. нули знаменателя, в верхней и нижней полуплоскостях.



Фиг. 2.

Знаменатель есть произведение трех функций

$$\operatorname{sh} m\pi$$

$$\operatorname{sh} {}^1/_2 m\pi - m$$

$$\operatorname{sh} {}^1/_2 m\pi + m$$

Нули функции $\operatorname{sh} m\pi$ будут

$$m=\pm ik\ (k=1,2,\ldots)$$

Нули m функции $\operatorname{sh} {}^1/_2 m\pi-m$ и нули m^* функции $\operatorname{sh} {}^1/_2 m\pi+m$ находим графически соответственно из систем уравнений:

$$\begin{aligned}&\operatorname{ch}\frac{\pi\beta}{2}\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\operatorname{sh}^2 {}^1/_2\pi\beta}}-\frac{2}{\pi}\arccos\frac{\beta}{\operatorname{sh} {}^1/_2\pi\beta}=0\\&\cos\frac{\pi\gamma}{2}\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sin^2 {}^1/_2\pi\gamma}-1}-\frac{2}{\pi}\operatorname{Ar\,ch}\frac{\gamma}{\sin {}^1/_2\pi\gamma}=0\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{ch}\frac{\pi\beta}{2}\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\operatorname{sh}^2 {}^1/_2\pi\beta}}+\frac{2}{\pi}\arccos\left(-\frac{\beta}{\operatorname{sh} {}^1/_2\pi\beta}\right)=0\\&\cos\frac{\pi\gamma}{2}\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sin^2 {}^1/_2\pi\gamma}-1}+\frac{2}{\pi}\operatorname{Ar\,ch}\left(-\frac{\gamma}{\sin {}^1/_2\pi\gamma}\right)=0\end{aligned}\tag{2.3}$$

На фиг. 2 и 3 построены кривые

$$y_1 = \operatorname{ch}\frac{\pi\beta}{2}\sqrt{1-\frac{\beta^2}{\operatorname{sh}^2 {}^1/_2\pi\beta}}$$

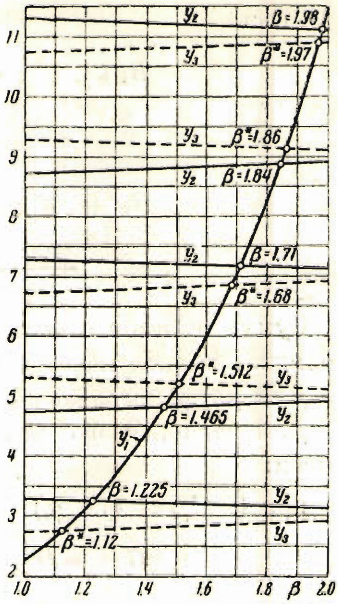
$$y_2 = \frac{2}{\pi}\arccos\frac{\beta}{\operatorname{sh} {}^1/_2\pi\beta}$$

$$y_3 = -\frac{2}{\pi}\arccos\left(-\frac{\beta}{\operatorname{sh} {}^1/_2\pi\beta}\right)$$

$$y_4 = \cos\frac{\pi\gamma}{2}\sqrt{\frac{\gamma^2}{\sin^2 {}^1/_2\pi\gamma}-1}$$

$$y_5 = \frac{2}{\pi}\operatorname{Ar\,ch}\frac{\gamma}{\sin {}^1/_2\pi\gamma}$$

$$y_6 = -\frac{2}{\pi}\operatorname{Ar\,ch}\left(-\frac{\gamma}{\sin {}^1/_2\pi\gamma}\right)$$



Фиг. 3.

Пересечения кривых $y_1 = y_1(\beta)$ и $y_2 = y_2(\beta)$ на фиг. 3 и пересечения кривых $y_4 = y_4(\gamma)$ и $y_5 = y_5(\gamma)$ на фиг. 2 дают соответственно корни уравнений (2.2).

Пересечения кривых $y_1 = y_1(\beta)$ и $y_3 = y_3(\beta)$ на фиг. 3 и пересечения кривых $y_4 = y_4(\gamma)$ и $y_6 = y_6(\gamma)$ на фиг. 2 дают соответственно корни уравнений (2.3).

Таким образом, для $m = \beta + i\gamma$ имеем:

в верхней полуплоскости

$$\begin{array}{llll}
m_1 = i, & m_2 = 1.225 + i\,4.78, & m_4 = 1.465 + i\,8.87, & \ldots \\
& m_3 = -1.225 + i\,4.78, & m_5 = -1.465 + i\,8.87, & \ldots \\
& m_2^* = 1.12 + i\,2.75, & m_4^* = 1.512 + i\,6.83 & m_6^* = 1.68 + i\,10.89, \ \ldots \\
& m_3^* = -1.12 + i\,2.75, & m_5^* = -1.512 + i\,6.83, & m_7^* = -1.68 + i\,10.89, \ \ldots
\end{array}$$

в нижней полуплоскости

$$\begin{array}{llll}
m_1 = -i, & m_2 = 1.225 - i\,4.78, & m_4 = 1.465 - i\,8.87 \ \ldots & \\
& m_3 = -1.225 - i\,4.78, & m_5 = -1,465 - i\,8.87, \ \ldots & \\
& m_2^* = 1.12 - i\,2.75, & m_4^* = 1.512 - i\,6.83, & m_6^* = 1.68 - i\,10.89, \ldots \\
& m_3^* = -1.12 - i\,2.75, & m_5^* = -1.512 - i\,6.83, & m_7^* = -1.68 - i\,10.89, \ldots
\end{array}$$

Представим выражение для прогибов в виде ряда по вычетам полюсов подинтегральных функций ($\rho < \rho_0$). Имеем (2.4)

$$\begin{aligned}
w = \frac{P}{8\pi D}\Bigg\{ & \frac{r^2}{2}\log\frac{\operatorname{ch}2(\xi-\xi_0)+\cos 2(\vartheta+\vartheta_0)}{\operatorname{ch}2(\xi-\xi_0)-\cos 2(\vartheta-\vartheta_0)} - 2\rho^2\cos 2\vartheta\cos 2\vartheta_0 + \\
& + 4\rho\rho_0\sin\theta^-\sin\theta_0^-\operatorname{Re}2\pi i\sum_{k=2}^{\infty}\left[B_k(\rho,\theta^+;\rho_0,\theta_0^+) - B_k^*(\rho,\theta^+;\rho_0,\theta_0^+)\right] - \\
& - 4\rho\rho_0\sin\theta^-\sin\theta_0^+\operatorname{Re}2\pi i\sum_{k=2}^{\infty}\left[B_k(\rho,\theta^+;\rho_0,\theta_0^-) + B_k^*(\rho,\theta^+;\rho_0,\theta_0^-)\right] + \\
& + 4\rho\rho_0\sin\theta^+\sin\theta_0^+\operatorname{Re}2\pi i\sum_{k=2}^{\infty}\left[B_k(\rho,\theta^-;\rho_0,\theta_0^-) - B_k^*(\rho,\theta^-;\rho_0,\theta_0^-)\right] - \\
& - 4\rho\rho_0\sin\theta^+\sin\theta_0^-\operatorname{Re}2\pi i\sum_{k=2}^{\infty}\left[B_k(\rho,\theta^-;\rho_0,\theta_0^+) + B_k^*(\rho,\theta^-;\rho_0,\theta_0^+)\right]\Bigg\}
\end{aligned}$$

Здесь (2.5)

$$B_k(\rho, \theta^{\pm}; \rho_0, \theta_0^{\pm}) = (-1)^k \frac{\rho^k}{\rho_0^k} \frac{\sin k\theta^{\pm} \sin k\theta_0^{\pm}}{\sin {}^1/_2 k\pi - k} +$$

$$+ \frac{\exp[im_k(\xi - \xi_0)] \operatorname{sh} m_k \theta^{\pm} \operatorname{sh} m_k \theta_0^{\pm}}{({}^1/_2\pi \operatorname{ch} {}^1/_2 m_k\pi - 1) \operatorname{sh} m_k\pi}$$

$$B_k^*(\rho, \theta^{\pm}; \rho_0, \theta_0^{\pm}) = (-1)^k \frac{\rho^k}{\rho_0^k} \frac{\sin k\theta^{\pm} \sin k\theta_0^{\pm}}{\sin {}^1/_2 k\pi + k} +$$

$$+ \frac{\exp[im_k^*(\xi - \xi_0)] \operatorname{sh} m_k^*\theta^{\pm} \operatorname{sh} m_k^*\theta_0^{\pm}}{({}^1/_2\pi \operatorname{ch} {}^1/_2 m_k^*\pi + 1) \operatorname{sh} m_k^*\pi}$$

Сумма вычетов относительно $m_1 = -i$, где имеется полюс второго порядка, вычислена отдельно и равна $2\rho^2 \cos 2\theta \cos 2\theta_0$.

Для $\rho > \rho_0$ выражение прогиба получается аналогично.

Для изгибающего момента, возникающего на стороне пластинки, имеем:

при $\theta = {}^1/_4\pi \quad (\rho < \rho_0)$

$$G = -D\frac{\partial^2 w}{\rho^2 \partial\theta^2} = -\frac{P}{8\pi}\left(2\frac{\partial r^2}{\rho\,\partial\theta}\frac{\partial\Gamma}{\rho\,\partial\theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right) = \tag{2.6}$$

$$= \frac{P}{8\pi}\left\{4\frac{\rho_0}{\rho}\sin\theta_0^- \left[\int_0^\infty \frac{\cos m(\xi-\xi_0) \operatorname{sh} m\theta_0^+ \, dm}{\operatorname{sh} {}^1/_2 m\pi - m} + \int_0^\infty \frac{\cos m(\xi-\xi_0) \operatorname{sh} m\theta_0^+ \, dm}{\operatorname{sh} {}^1/_2 m\pi + m}\right] - \right.$$

$$\left. - 4\frac{\rho_0}{\rho}\sin\theta_0^+ \left[\int_0^\infty \frac{\cos m(\xi-\xi_0) \operatorname{sh} m\theta_0^- \, dm}{\operatorname{sh} {}^1/_2 m\pi - m} - \int_0^\infty \frac{\cos m(\xi-\xi_0) \operatorname{sh} m\theta_0^-}{\operatorname{sh} {}^1/_2 m\pi + m}\right]\right\} =$$

$$= \frac{P}{8\pi}\left\{2\frac{\rho_0}{\rho}\sin\theta_0^- \operatorname{Re} 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty}\left[Б_k(\rho, \rho_0, \theta_0^+) + Б_k^*(\rho, \rho_0, \theta_0^+)\right] - \right.$$

$$\left. - 2\frac{\rho_0}{\rho}\sin\theta_0^+ \operatorname{Re} 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty}\left[Б_k(\rho, \rho_0, \theta_0^-) - Б_k^*(\rho, \rho_0, \theta_0^-)\right]\right\}$$

Здесь

$$Б_k(\rho, \rho_0, \theta_0^{\pm}) = \frac{\exp[im_k(\xi - \xi_0)] \operatorname{sh} m_k \theta_0^{\pm}}{{}^1/_2\pi \operatorname{ch} {}^1/_2 m_k\pi - 1}$$

$$Б_k^*(\rho, \rho_0, \theta_0^{\pm}) = \frac{\exp[im_k^*(\xi - \xi_0)] \operatorname{sh} m_k^* \theta^{\pm}}{{}^1/_2\pi \operatorname{ch} {}^1/_2 m_k^*\pi + 1} \tag{2.7}$$

Так как γ_k и γ_k^* больше единицы, то изгибающий момент при $\rho = 0$ обращается в нуль. Выражение изгибающего момента для $\rho > \rho_0$ получается аналогично. Крутящий момент на сторонах пластинки равен нулю вследствие защемления сторон.

Поступила в редакцию
8 V 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. К теории безбалочных покрытий. Труды отделения физических наук общества любителей естествознания. 1915. Т. XVIII Вып. 1.
2. Brahtz J. H. A. Stress Distribution in Wedges with Arbitrary Boundary Forces. Physics. 1933. Jan.
3. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат. М.—Л. 1943.