

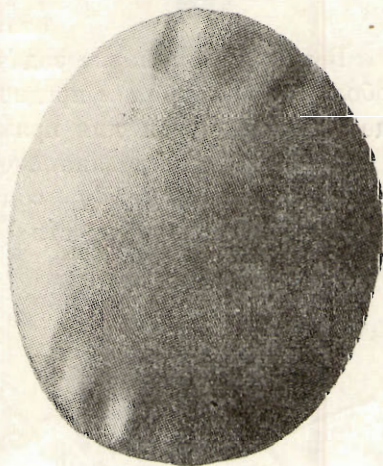
О РАВНОВЕСИИ И ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Д. Ю. Панов, В. И. Феодосьев

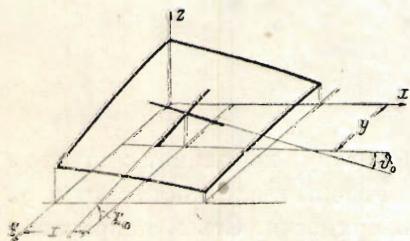
(Москва)

Исследование форм равновесия несимметричных оболочек в больших перемещениях является одной из наиболее интересных для практики задач теории оболочек. К этой задаче сводится вопрос об устойчивости и несущей способности многих промышленных сооружений, котлов, баков и многих деталей машиностроения. Во всех случаях критические нагрузки и несущая способность упругих систем при несимметричных формах потери устойчивости оказывается ниже, чем при симметричных. При исследовании больших прогибов плоских мембран и пологих оболочек приходится сталкиваться с образованием складок. На фиг. 1 изображена круглая мембрана, подвергнутая значительному гидростатическому давлению при жестком закреплении края. На фотографии видны образовавшиеся по краю волны.

В этой работе рассматриваются вопросы, связанные с большими прогибами пологих оболочек. В ней выводятся общие уравнения равновесия несимметричных пологих оболочек в больших перемещениях, а затем рассматривается задача определения закритических прогибов круглой пластины, нагруженной постоянным давлением, и условия перехода форм равновесия, обладающих круговой симметрией, в некоторые несимметричные; в частности, рассматривается вопрос об образовании складок на плоской мембране для простейших граничных условий.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

1. Рассмотрим тонкостенную оболочку (фиг. 2) с малыми углами подъема $\vartheta_0 = \vartheta_0(x, y)$ и $\gamma_0 = \gamma_0(x, y)$. Эти углы будем считать настолько малыми, что можно принять

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \vartheta_0 &\approx \sin \vartheta_0 \approx \vartheta_0 \\ \operatorname{tg} \gamma_0 &\approx \sin \gamma_0 \approx \gamma_0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Пусть уравнение средней поверхности оболочки до деформации будет

$$w_0 = w_0(x, y) \quad (1.2)$$

После нагружения оболочки все точки средней поверхности получают некоторые линейные перемещения, составляющие которых по осям x, y, z обозначим u, v, w . Углы ϑ_0 и γ_0 изменяются на величины ϑ и γ .

Уравнение средней поверхности деформированной оболочки будет

$$w_0 + w = f(x, y)$$

при этом углы подъема определяются как $\vartheta_0 + \vartheta$ и $\chi_0 + \chi$. Для этих углов также предполагается, что

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\vartheta_0 + \vartheta) &\approx \sin(\vartheta_0 + \vartheta) \approx \vartheta_0 + \vartheta \\ \operatorname{tg}(\chi_0 + \chi) &\approx \sin(\chi_0 + \chi) \approx \chi_0 + \chi \end{aligned} \quad (1.3)$$

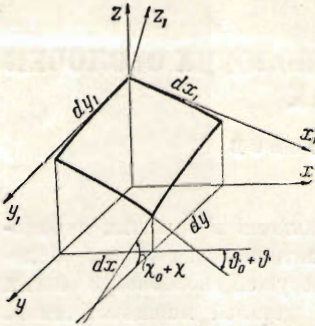
Отсюда следует

$$(\vartheta_0 + \vartheta)^2 \ll 1, \quad (\chi_0 + \chi)^2 \ll 1 \quad (1.4)$$

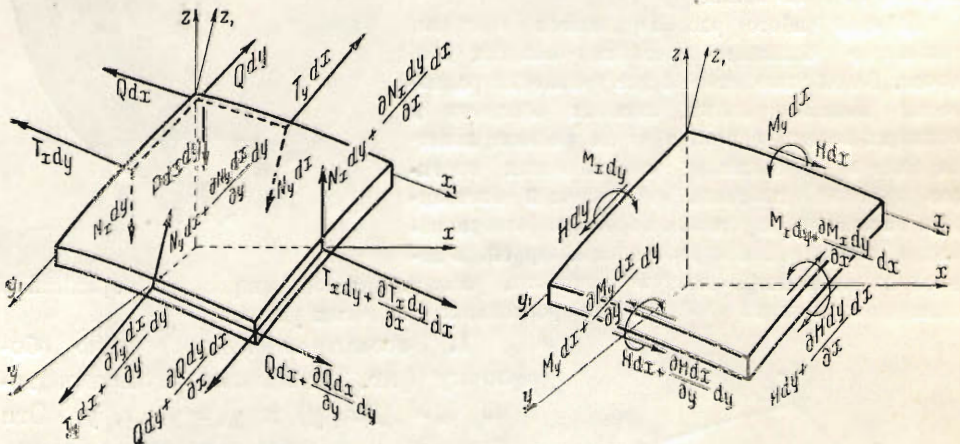
Будем считать, что углы ϑ_0 и ϑ , а также χ_0 и χ являются величинами одного порядка малости. Это означает, что форма деформированной оболочки может существенно отличаться от первоначальной.

В такой постановке задача решена в настоящее время только для оболочек вращения в предположении сохранения круговой симметрии деформаций [1,2] и для прямоугольной пластинки [3,4] ($\chi_0 = \vartheta_0 = 0$).

2. Из деформированной оболочки четырьмя вертикальными плоскостями $y = \text{const}$, $y + dy = \text{const}$, $x = \text{const}$ и $x + dx = \text{const}$ выделим элемент средней поверхности (фиг. 3) со сторонами dx_1 и dy_1 . Через



Фиг. 3.



Фиг. 4.

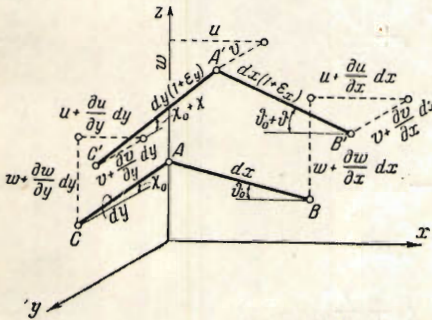
x_1 , y_1 и z_1 обозначим координаты в местной системе координат с началом на средней поверхности. Оси x_1 и y_1 расположены в плоскостях xz и yz и направлены по касательным к средней поверхности. Ось z_1 направлена по нормали к средней поверхности.

Можно показать, что угол между отрезками dx_1 и dy_1 отличается от прямого на величину $(\chi_0 + \chi)(\vartheta_0 + \vartheta)$, которая при принятой оценке (1.4) углов $\vartheta_0 + \vartheta$ и $\chi_0 + \chi$ является величиной малой. Это позволяет угол между отрезками dx_1 и dy_1 с принятой степенью точности считать прямым. В силу условия (1.4) получается, что $dx_1 \approx dx$, $dy_1 \approx dy$.

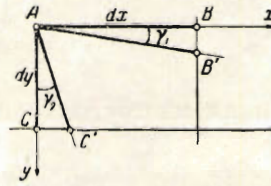
Выделим далее из деформированной оболочки поверхностями, нормальными к средней поверхности и проходящими по дугам dx_1 и dy_1 , элемент с толщиной h (фиг. 4).

В сечениях приложим изгибающие и крутящие моменты, растягивающие, перерезывающие и сдвигающие усилия. Положительные направления усилий и моментов показаны на фиг. 3.

Обозначим через T_x, T_y растягивающие усилия, N_x, N_y перерезывающие усилия, Q сдвигающее усилие, M_x, M_y изгибающие моменты, H крутящий момент, отнесенные к единице длины и действующие соответственно в се-



Фиг. 5.



Фиг. 6.

чениях по осям x и y ; через $p = p(x, y)$ — внешнюю нагрузку, отнесенную к единице площади средней поверхности.

Уравнения равновесия для выделенного элемента могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 & -p + \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - T_y \frac{\partial(\chi_0 + \chi)}{\partial y} - T_x \frac{\partial(\vartheta_0 + \vartheta)}{\partial x} - Q \frac{\partial(\vartheta_0 + \vartheta)}{\partial y} - Q \frac{\partial(\chi_0 + \chi)}{\partial x} = 0 \\
 & N_y \frac{\partial(\vartheta_0 + \vartheta)}{\partial y} + N_x \frac{\partial(\vartheta_0 + \vartheta)}{\partial x} + \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{dQ}{dy} = 0, \quad N_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\
 & N_x \frac{\partial(\chi_0 + \chi)}{\partial x} + N_y \frac{\partial(\chi_0 + \chi)}{\partial y} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad N_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = 0
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Шестое уравнение при условии равенства сдвигающего усилия во взаимно перпендикулярных сечениях удовлетворяется тождественно.

3. Свяжем линейные перемещения u, v и w с угловыми перемещениями χ и ϑ и деформациями ϵ_x, ϵ_y и γ средней поверхности.

Рассмотрим два взаимно перпендикулярных элемента AB и AC (фиг. 5), образованных сечением средней поверхности недеформированной оболочки плоскостями xz и yz . В силу малости углов ϑ_0 и χ_0 полагаем $AB \approx dx, AC \approx dy$.

После деформации оболочки точки A, B и C (фиг. 5) займут положение A', B' и C' ; отрезки AB и AC удлинятся до величин

$$A'B' = dx(1 + \epsilon_x), \quad A'C' = dy(1 + \epsilon_y)$$

Углы между этими отрезками и плоскостью xy увеличатся соответственно на ϑ и χ . Кроме того, отрезки AB и AC повернутся в средней поверхности на углы γ_1 и γ_2 (фиг. 6).

Эти углы в отличие от углов χ и ϑ могут рассматриваться как

бесконечно малые, поскольку они определяются только наличием деформаций сдвига в средней поверхности. Полные перемещения точек A, B и C при переходе в точки A', B' и C' разложим на составляющие u, v и w (фиг. 5).

Полученные при этом многоугольники $AA'B'B$ и $AA'C'C$ спроектируем поочередно на каждую из осей x, y, z ; получим шесть соотношений между угловыми и линейными перемещениями и деформациями: проекция многоугольника $AA'B'B$ дает

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (3.1)$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\vartheta \quad (3.3)$$

проекция многоугольника $AA'C'C$ дает

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \chi \left(\chi_0 + \frac{\chi}{2} \right) \quad (3.4)$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\chi \quad (3.6)$$

Угол сдвига в средней поверхности будет (фиг. 6)

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.7)$$

Из первых уравнений (3.1), (3.4) и (3.7) исключим перемещения u и v . Для этого (3.1) дифференцируем по y два раза, (3.4) по x два раза и (3.7) дифференцируем по x и y . Складывая первые результаты и вычитая третий, получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\chi \left(\chi_0 + \frac{\chi}{2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\vartheta \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta}{2} \right) \right] \quad (3.8)$$

4. Перейдем к определению перемещений и деформаций в слоях оболочки, отстоящих на расстоянии z_1 от средней поверхности.

Перемещения u', v' и w' в этих слоях будут складываться из соответствующих перемещений u, v и w средней поверхности и дополнительных перемещений, обусловленных поворотом нормали на углы ϑ и χ около осей x и y . В соответствии с общепринятой гипотезой неизменности нормали имеем

$$u' = u + z_1 \vartheta, \quad v' = v + z_1 \chi, \quad w' = w$$

Отсюда согласно (3.1), (3.4) и (3.7)

$$\varepsilon_x' = \varepsilon_x + z_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad \varepsilon_y' = \varepsilon_y + z_1 \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \gamma' = \gamma + z_1 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) \quad (4.1)$$

Напряжения σ_x , σ_y и τ будут связаны с деформациями обычными формулами

$$\begin{aligned}\sigma_x' &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x' + \mu \varepsilon_y') = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + z_1 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \right] \\ \sigma_y' &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y' + \mu \varepsilon_x') = \frac{E}{1-\mu^2} \left[(\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + z_1 \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) \right] \\ \tau' &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma' = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\gamma + z_1 \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) \right]\end{aligned}\quad (4.2)$$

Усилия и моменты определяются через напряжения также по обычным формулам

$$\begin{aligned}T_x &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \tau_x' dz_1, & M_x &= - \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \sigma_x' z_1 dz_1, & Q &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \tau' dz_1 \\ T_y &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \sigma_y' dz_1, & M_y &= - \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \sigma_y' z_1 dz_1, & H &= - \int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} \tau' z_1 dz_1\end{aligned}\quad (4.3)$$

Или согласно (4.2)

$$\begin{aligned}T_x &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y), & M_x &= -D \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \frac{\partial \chi}{\partial y} \right), & Q &= \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma \\ T_y &= \frac{Eh}{1-\mu^2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x), & M_y &= -D \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right), & H &= -D \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right) \\ & & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\end{aligned}\quad (4.4)$$

Таким образом, для определения четырнадцати неизвестных T_x , T_y , N_x , N_y , Q , M_x , M_y , H , ε_x , ε_y , γ , ω , χ , ϑ имеем четырнадцать уравнений: пять уравнений равновесия (2.1)–(2.5), три уравнения (3.3), (3.6) и (3.8) и шесть уравнений (4.3).

5. Из уравнений (4.3) величины ε_x , ε_y и γ подставляем в (3.8)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} (T_x - \mu T_y) - 2(1+\mu) \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T_y - \mu T_x) = \\ = Eh \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\chi \left(\chi_0 + \frac{\chi}{2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\vartheta \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta}{2} \right) \right] \right\}\end{aligned}\quad (5.1)$$

Подставим далее M_x , M_y и H из (4.3) в два последних уравнения равновесия (2.4). Тогда, учитывая (3.3) и (3.6), получим

$$N_x = D \nabla^2 \vartheta, \quad N_y = D \nabla^2 \chi \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)\quad (5.2)$$

Введем обозначения

$$N_x \frac{\partial (\vartheta_0 + \vartheta)}{\partial x} + N_y \frac{\partial (\vartheta_0 + \vartheta)}{\partial y} = N_1, \quad N_x \frac{\partial (\chi_0 + \chi)}{\partial x} + N_y \frac{\partial (\chi_0 + \chi)}{\partial y} = N_2\quad (5.3)$$

и рассмотрим из уравнений равновесия (2.4) следующие

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + N_1 = 0, \quad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} + N_2 = 0\quad (5.4)$$

Первое из этих уравнений дифференцируем по x , а второе по y ; результаты один раз складываем, второй раз вычитаем. Получим

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} + \frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0 \quad (5.6)$$

Из (5.5) и (5.4) имеем

$$\begin{aligned} \nabla^2 (T_x + T_y) = Eh \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\chi \left(\chi_0 + \frac{\chi}{2} \right) \right] \oplus \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\vartheta \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta}{2} \right) \right] \right\} - \\ - (1 + \mu) \left[\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

Согласно (5.2), (3.3) и (3.6) уравнение равновесия (2.1) будет

$$-p - D \nabla^2 \nabla^2 w + T_x \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} + 2Q \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x \partial y} + T_y \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} = 0 \quad (5.8)$$

Решение полученных уравнений можно осуществить методом последовательных приближений, либо воспользоваться для получения приближенного решения методом Галеркина.

Задавая формой упругой поверхности оболочки $w = w(x, y)$, из уравнения (5.7) можно найти

$$T = T_x + T_y \quad (5.9)$$

Действительно, величины N_1 и N_2 определяются формулами (5.3), в которых N_x и N_y выражаются через w согласно (5.2). Таким образом, для определения T_x и T_y из (5.6) и (5.9) получаются уравнения

$$\nabla^2 T_x = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y}, \quad \nabla^2 T_y = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \oplus \frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_2}{\partial y} \quad (5.10)$$

Далее, одно из уравнений (5.4) позволяет определить Q .

Найденные функции T_x , T_y и Q могут быть затем подставлены в уравнение (5.8), после чего функция w может быть определена снова и весь процесс подстановок повторен сколь угодно много раз.

Если задаться формой поверхности, содержащей свободные параметры, то на последнем этапе подстановок эти свободные параметры функции могут быть подобраны методом Галеркина

Проследим за теми преобразованиями, которые претерпевают величины N_1 и N_2 при указанных подстановках

После подстановки выражений (5.2) для N_x и N_y в (5.3) получим

$$N_1 = D \left[\nabla^2 \vartheta \frac{\partial (\vartheta_0 + \vartheta)}{\partial x} \oplus \nabla^2 \chi \frac{\partial (\chi_0 + \chi)}{\partial y} \right]$$

$$N_2 = D \left[\nabla^2 \vartheta \frac{\partial (\chi_0 + \chi)}{\partial x} + \nabla^2 \chi \frac{\partial (\chi_0 + \chi)}{\partial y} \right]$$

Рассмотрим последнее слагаемое уравнения (5.7). Оно будет представлять собой, очевидно, некоторый линейный однородный оператор

от попарных произведений производных от углов $\vartheta, \vartheta_0, \chi, \chi_0$ по x и y . При этом операторе будет стоять общий множитель D . Соответствующие операторы с множителем жесткости D получатся также в выражениях T_x, T_y и Q при решении уравнений (5.4) и (5.10).

Наконец, после подстановки T_x, T_y и Q в уравнение (5.8) легко заметить, что соответствующие слагаемые с множителем D образуют новый однородный многочлен с произведениями третьей степени относительно производных от углов $\vartheta_0, \vartheta, \chi_0, \chi$. Но поскольку основной член $D\nabla^2\nabla^2 w$ уравнения (5.8) представляет собой линейный дифференциальный оператор от углов χ и ϑ , то добавочными членами с множителем D , внесенными в уравнение (5.8) при подстановке T_x, T_y и Q , можно пренебречь, если только оценка углов (1,3) может считаться справедливой и для их производных, поскольку можно считать, что оболочка при своих деформациях не получает резких перегибов и изломов. Таким образом, приходим к выводу, что членами, содержащими N_1 и N_2 в уравнениях равновесия (5.4), можно пренебречь заранее.

Заметим между прочим, что аналогичными членами в уравнениях равновесия прямоугольных пластин, работающих при больших прогибах, обычно пренебрегают, считая это бесспорно допустимым [3,5].

Таким образом, для решения задачи получаем уравнения

$$\begin{aligned} \vartheta &= -\frac{\partial w}{\partial x}, & \chi &= -\frac{\partial w}{\partial y} \\ \nabla^2 T &= Eh \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\chi \left(\chi_0 + \frac{\chi}{2} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\vartheta \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta}{2} \right) \right] \right\} \\ \nabla^2 T_x &= \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, & \nabla^2 T_y &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, & \frac{\partial Q}{\partial y} &= -\frac{\partial T_x}{\partial y} \\ p + D\nabla^2\nabla^2 w &= T_x \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x^2} + 2Q \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial x \partial y} + T_y \frac{\partial^2 (w_0 + w)}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

6. Преобразуем уравнения (5.11) к полярной системе координат.

$$\vartheta = -\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \chi = -\frac{\partial w}{r \partial \varphi} \quad (6.1)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad (6.2)$$

$$\nabla^2 T = -Eh \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\vartheta \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta}{2} \right) - \chi \left(\chi_0 + \frac{\chi}{2} \right) \right] \right\} \quad (6.3)$$

$$\nabla^2 (T_1 r^2) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ r^2 \left[T + Eh \vartheta \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta}{2} \right) \right] \right\} \quad (6.4)$$

$$T_1 = T - T_2 + Eh \vartheta \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta}{2} \right) \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial r} (T_1 r) - T_2 \quad (6.6)$$

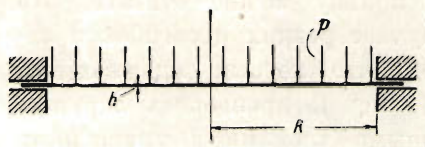
$$\begin{aligned} p + D\nabla^2\nabla^2 w &= \\ &= Q \frac{\partial (\chi_0 + \chi)}{\partial r} + Q \frac{\partial (\vartheta_0 + \vartheta)}{r \partial \varphi} - T_1 \frac{\partial (\vartheta_0 + \vartheta)}{\partial r} - T_2 \frac{1}{r} (\vartheta_0 + \vartheta) - T_2 \frac{\partial (\chi_0 + \chi)}{r \partial \varphi} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Здесь T_1 радиальное, а T_2 окружное растягивающее усилия. Обозначения других величин полностью соответствуют введенным выше. Исключение представляет

$$T = T_1 + T_2 - E h \vartheta \left(\vartheta_0 + \frac{\vartheta}{2} \right)$$

Уравнения (6.4) — (6.7), так же как и (5.11), приведены к такому виду, чтобы к ним можно было применить изложенный выше прием последовательного определения усилий T_1 , T_2 и Q и дальнейшего уточнения вида функции w .

7. В качестве простейшего примера применения выведенных уравнений рассмотрим круглую пластину радиуса R , нагруженную равномерно распределенной нагрузкой интенсивности p (фиг. 7).



Фиг. 7.

Задача об определении прогибов такой пластинки в предположении симметрии деформаций решалась уже неоднократно. Теперь мы рассмотрим этот вопрос в более широкой постановке, допуская возможность возникновения складок, нарушающих круговую симметрию.

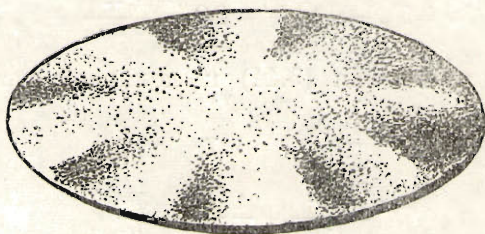
Будем считать, что пластинка (фиг. 7) закреплена так, что на ее контуре углы поворота ϑ и χ отсутствуют. В то же время защемление не является настолько плотным, чтобы удерживать оболочку на контуре от проскальзывания в окружном и радиальном направлениях. Полагая это проскальзывание идеально свободным, будем считать, что

растягивающее и сдвигающее усилия T_1 и Q на контуре равны нулю. Для пластинки имеем

$$\vartheta_0 = \chi_0 = 0$$

Уравнения (6.4) — (6.7) будем решать методом Галеркина, задаваясь формой упругой поверхности оболочки, т. е. функцией $w = w(r, \varphi)$.

Примем, что несимметричная складчатость оболочки носит периодический характер для каждого взятого радиуса r при обходе пластинки по кругу (фиг. 8). Именно такой характер имеет форма потери устойчивости пластинки при достаточно больших прогибах (фиг. 1)



Фиг. 8.

Пусть

$$w = -(R^2 - r^2)^2 (A + Br^4 \cos n\varphi) \quad (7.1)$$

Здесь A и B — неопределенные постоянные, n — целое, пока неопределенное число, определяющее количество складок. При $B = 0$, приходим к обычной симметричной форме прогиба пластинки в малых перемещениях.

Согласно (7.1) будем иметь

$$\begin{aligned} \delta &= A(-4R^2r + 4r^3) + B(4R^4r^3 - 12R^2r^5 + 8r^7) \cos n\varphi \\ \chi &= -Bn(R^4r^3 - 2R^2r^5 + r^7) \sin n\varphi \end{aligned} \quad (7.2)$$

Из (7.3) получим

$$\frac{1}{Eh} \nabla^2 T = R_0 + R_n \cos n\varphi + R_{2n} \cos 2n\varphi \quad (7.3)$$

где R_0 , R_n , R_{2n} — функции r , имеющие вид

$$\begin{aligned} R_0 &= -A^2(48R^4 - 320R^2r^2 + 336r^4) - \\ &\quad - B^2(168R^8r^4 - 1728R^6r^6 + 5720R^4r^8 - 7488R^2r^{10} + 3360r^{12}) + \\ &\quad + B^2n^2 \left(\frac{1}{2} 21R^8r^4 - 72R^6r^6 + 165R^4r^8 - 156R^2r^{10} + \frac{1}{2} 105r^{12} \right) \end{aligned}$$

$$R_n = -AB(-320R^6r^2 + 2688R^4r^4 - 5760R^2r^6 + 3520r^8)$$

$$\begin{aligned} R_{2n} &= -B^2(168R^8r^4 - 1728R^6r^6 + 5720R^4r^8 - 7488R^2r^{10} + 3360r^{12}) - \\ &\quad - B^2n^2 \left(\frac{1}{2} 21R^8r^4 - 72R^6r^6 + 165R^4r^8 - 156R^2r^{10} + \frac{1}{2} 105r^{12} \right) \end{aligned}$$

Решение уравнения (7.3) ищем в виде

$$T = \sum_0^{\infty} T_{(k)} \cos k\varphi \quad (7.4)$$

где $T_{(k)}$ зависит только от r . После подстановки этого выражения в уравнение (7.3) получаем систему уравнений для определения $T_{(k)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{(0)}}{\partial r} &= EhR_0 \\ \frac{\partial^2 T_{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{(1)}}{\partial r} - 1^2 \frac{T_{(1)}}{r^2} &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 T_{(n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial r} - n^2 \frac{T_{(n)}}{r^2} = EhR_n$$

$$\frac{\partial^2 T_{(2n)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{(2n)}}{\partial r} - 2n^2 \frac{T_{(2n)}}{r^2} = EhR_{2n}$$

Каждое из этих уравнений решается в квадратурах, так как

$$\frac{\partial^2 [*]}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial [*]}{\partial r} - k^2 \frac{[*]}{r^2} = r^{k-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^{1-2k} \frac{\partial [*r^k]}{\partial r} \right]. \quad (7.5)$$

После интегрирования получим

$$\begin{aligned} \frac{T_{(0)}}{Eh} &= a_0 \log r + b_0 - A^2 \left(12R^4 r^2 - 20R^2 r^4 + \frac{28}{3} r^6 \right) - \\ &- B^2 \left(\frac{14}{3} R^8 r^6 - 27R^6 r^8 + \frac{286}{5} R^4 r^{10} - 52R^2 r^{12} + \frac{120}{7} r^{14} \right) + \\ &+ B^2 n^2 \left(\frac{7}{24} R^8 r^6 - \frac{9}{8} R^6 r^8 + \frac{33}{20} R^4 r^{10} - \frac{13}{12} R^2 r^{12} + \frac{15}{56} r^{14} \right) \\ \frac{T_{(1)}}{Eh} &= a_1 r + \frac{b_1}{r} \\ \frac{T_{(2)}}{Eh} &= a_2 r^2 + \frac{b_2}{r^2} \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\frac{T_{(n)}}{Eh} = a_n r^n + b_n r^{-n} - AB \left(-\frac{320R^6 r^4}{16-n^2} + \frac{2688R^4 r^6}{36-n^2} - \frac{5760R^2 r^8}{64-n^2} + \frac{3520r^{10}}{100-n^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{(2n)}}{Eh} &= a_{2n} r^{2n} + b_{2n} r^{-2n} - B^2 \left(\frac{42R^8 r^6}{9-n^2} - \frac{432R^6 r^8}{16-n^2} + \frac{1430R^4 r^{10}}{25-n^2} - \right. \\ &- \left. \frac{1872R^2 r^{12}}{36-n^2} + \frac{840r^{14}}{49-n^2} \right) - B^2 n^2 \left(\frac{21}{8} \frac{R^8 r^6}{9-n^2} - \frac{18R^6 r^8}{16-n^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{165}{4} \frac{R^4 r^{10}}{25-n^2} - \frac{39R^2 r^{12}}{36-n^2} + \frac{105}{8} \frac{r^{14}}{49-n^2} \right) \end{aligned}$$

Произвольные постоянные $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ определены ниже. Обратимся к уравнению (7.4), которое после подстановки в правую часть T из (7.4) и ϑ из (7.2) примет вид:

$$\nabla^2 (T_2 r^2) = Eh \sum_0^{\infty} t_{2(k)} \cos k\varphi$$

где $t_{2(k)}$ зависит только от r . Как и в предыдущем случае, решение этого уравнения будем искать в виде

$$T_2 = \sum_0^{\infty} T_{2(k)} \cos k\varphi \quad (7.7)$$

После интегрирования получим:

при $k \neq 0, k \neq n, k \neq 2n$

$$\frac{T_{2(k)}}{Eh} = a_k \frac{k+2}{4} r^k - b_k \frac{k-2}{4} r^{-k} + c_k r^{k-2} + d_k r^{-k-2}$$

при $k=0, k=n, k=2n$

$$\begin{aligned} \frac{T_{2(0)}}{Eh} &= a_0 \left(\frac{1}{2} \log r + \frac{1}{4} \right) + \frac{b_0}{2} + c_0 \frac{\log r}{r^2} + \frac{d_0}{r^2} + \\ &+ A^2 \left(-3R^4 r^2 + \frac{10}{3} R^2 r^4 - \frac{7}{6} r^6 \right) + \\ &+ B^2 \left(-\frac{7}{12} R^8 r^6 + \frac{27}{10} R^6 r^8 - \frac{143}{30} R^4 r^{10} + \frac{26}{7} R^2 r^{12} - \frac{15}{14} r^{14} \right) + \\ &+ B^2 n^2 \left(\frac{49}{192} R^8 r^6 - \frac{81}{80} R^6 r^8 + \frac{121}{80} R^4 r^{10} - \frac{169}{168} R^2 r^{12} + \frac{225}{896} r^{14} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{2(n)}}{Eh} = & a_n \frac{n+2}{4} r^n - b_n \frac{n-2}{4} r^{-n} + c_n r^{n-2} + d_n r^{-n-2} + \\ & + AB \left[\frac{480(4+n^2)}{(16-n^2)(36-n^2)} R^6 r^4 - \frac{3584(6+n^2)}{(36-n^2)(64-n^2)} R^4 r^6 + \right. \\ & \left. + \frac{7200(8+n^2)}{(64-n^2)(100-n^2)} R^2 r^8 - \frac{4224(10+n^2)}{(100-n^2)(144-n^2)} r^{10} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{2(2n)}}{Eh} = & a_{2n} \frac{2n+2}{4} r^{2n} - b_{2n} \frac{2n-2}{4} r^{-2n} + c_{2n} r^{2n-2} + d_{2n} r^{-2n-2} - \\ & - B^2 \left[\frac{56(3/2+n^2)}{(9-n^2)(16-n^2)} R^2 r^6 - \frac{540(2+n^2)}{(16-n^2)(25-n^2)} R^6 r^8 + \frac{1716(5/2+n^2)}{(25-n^2)(36-n^2)} R^4 r^{10} - \right. \\ & - \frac{2184(3+n^2)}{(36-n^2)(49-n^2)} R^2 r^{12} + \frac{960(7/2+n^2)}{(49-n^2)(64-n^2)} r^{14} \left. \right] - B^2 n^2 \left[\frac{147}{4(9-n^2)(16-n^2)} R^8 r^6 - \right. \\ & - \frac{405 R^6 r^8}{(16-n^2)(25-n^2)} + \frac{5445 R^4 r^{10}}{4(25-n^2)(36-n^2)} - \frac{3549 R^2 r^{12}}{2(36-n^2)(49-n^2)} + \left. \frac{1575 r^{14}}{2(49-n^2)(64-n^2)} \right] \end{aligned}$$

Согласно (6.5) определяем

$$T_1 = \sum_{k=0}^{\infty} T_{1(k)} \cos k\varphi \quad (7.8)$$

Вычисления дают:

при $k \neq 0, k \neq n, k \neq 2n$

$$\frac{T_{1(k)}}{Eh} = a_k \frac{2-k}{4} r^k + b_k \frac{2+k}{4} r^{-k} - c_k r^{k-2} - d_k r^{-k-2}$$

при $k = 0, k = n, k = 2n$

$$\begin{aligned} \frac{T_{1(0)}}{Eh} = & a_0 \left(\frac{\log r}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{b_0}{2} - c_0 \frac{\log r}{r^2} - \frac{d_0}{r^2} + A^2 \left(-R^4 r^2 + \frac{2R^2}{3} r^4 - \frac{1}{6} r^6 \right) + \\ & + B^2 \left(-\frac{1}{12} R^8 r^6 + \frac{3}{10} R^6 r^8 - \frac{13}{30} R^4 r^{10} + \frac{2}{7} R^2 r^{12} - \frac{1}{14} r^{14} \right) + \\ & + B^2 n^2 \left(\frac{7}{192} R^8 r^6 - \frac{9}{80} R^6 r^8 + \frac{11}{80} R^4 r^{10} - \frac{13}{168} R^2 r^{12} + \frac{15}{896} r^{14} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{1(n)}}{Eh} = & a_n \frac{2-n}{4} r^n + b_n \frac{2+n}{2} r^{-n} - c_n r^{n-2} - d_n r^{-n-2} + \\ & + AB \left[\frac{16(6-n^2)(4+n^2)}{(16-n^2)(36-n^2)} R^6 r^4 - \frac{64(8-n^2)(6+n^2)}{(36-n^2)(64-n^2)} R^4 r^6 + \right. \\ & \left. + \frac{80(10-n^2)(8+n^2)}{(64-n^2)(100-n^2)} R^2 r^8 - \frac{32(12-n^2)(10+n^2)}{(100-n^2)(144-n^2)} r^{10} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{1(2n)}}{Eh} = & a_{2n} \frac{2-2n}{4} r^{2n} + b_{2n} \frac{2+2n}{4} r^{-2n} - c_{2n} r^{2n-2} - d_{2n} r^{-2n-2} - \\ & - B^2 \left[\frac{4(2-n^2)(3/2+n^2)}{(9-n^2)(16-n^2)} R^8 r^6 - \frac{24(5/2-n^2)(2+n^2)}{(16-n^2)(25-n^2)} R^6 r^8 + \right. \\ & + \frac{52(3-n^2)(5/2+n^2)}{(25-n^2)(36-n^2)} R^4 r^{10} - \frac{48(7/2-n^2)(3+n^2)}{(36-n^2)(49-n^2)} R^2 r^{12} + \\ & + \frac{16(4-n^2)(7/2+n^2)}{(49-n^2)(64-n^2)} r^{14} \left. \right] - B^2 n^2 \left[\frac{21(2-n^2) R^8 r^6}{8(9-n^2)(16-n^2)} - \frac{18(5/2-n^2) R^6 r^8}{(16-n^2)(25-n^2)} + \right. \\ & \left. + \frac{165(3-n^2)}{4(25-n^2)(36-n^2)} R^4 r^{10} - \frac{39(7/2-n^2)}{(36-n^2)(49-n^2)} R^2 r^{12} + \frac{105(4-n^2)}{8(49-n^2)(64-n^2)} r^{14} \right] \end{aligned}$$

Из (7.6) получим

$$Q = Q_{(0)}\varphi + \sum_0^{\infty} Q_{(k)} \sin k\varphi \quad (7.9)$$

Вычисления дают:

при $k \neq 0, k \neq n, k \neq 2n$

$$Q_{(k)} = -a_k \frac{k}{4} r^k - b_k \frac{k}{4} r^{-k} - c_k r^{k-2} + d_k r^{-k-2}$$

при $k=0, k=n, k=2n$

$$\frac{Q_{(0)}}{Eh} = -\frac{c_0}{r^2}$$

$$\frac{Q_{(n)}}{Eh} = -a_n \frac{n}{4} r^n - b_n \frac{n}{4} r^{-n} - c_n r^{n-2} + d_n r^{-n-2} + AB \left[-\frac{80n(4+n^2)R^6 r^4}{(16-n^2)(36-n^2)} + \right. \\ \left. + \frac{448n(6+n^2)R^4 r^6}{(36-n^2)(64-n^2)} - \frac{720n(8+n^2)}{(64-n^2)(100-n^2)} R^2 r^8 + \frac{352n(10+n^2)}{(100-n^2)(144-n^2)} r^{10} \right]$$

$$\frac{Q_{(2n)}}{Eh} = -a_{2n} \frac{2n}{4} r^{2n} - b_{2n} \frac{2n}{4} r^{-2n} - c_{2n} r^{2n-2} + d_{2n} r^{-2n-2} - \\ - B^2 \left[-\frac{14n(3/2+n^2)R^8 r^6}{(9-n^2)(16-n^2)} + \frac{108n(2+n^2)R^6 r^8}{(16-n^2)(25-n^2)} - \frac{286n(5/2+n^2)R^4 r^{10}}{(25-n^2)(36-n^2)} + \right. \\ \left. + \frac{312n(3+n^2)R^2 r^{12}}{(36-n^2)(49-n^2)} - \frac{120n(7/2+n^2)r^{14}}{(49-n^2)(64-n^2)} \right] - \\ - B^2 n^2 \left[-\frac{147nR^8 r^6}{16(9-n^2)(16-n^2)} + \frac{81nR^6 r^8}{(16-n^2)(25-n^2)} - \frac{1815nR^4 r^{10}}{8(25-n^2)(36-n^2)} + \right. \\ \left. + \frac{507nR^2 r^{12}}{2(36-n^2)(49-n^2)} - \frac{1575nr^{14}}{16(49-n^2)(64-n^2)} \right]$$

Перейдем к определению констант a_k, b_k, c_k, d_k в формулах (7.6).

При любых условиях закрепления усилия T_1, T_2, Q в центре пластинки должны иметь конечную величину. Следовательно, конечными должны быть также $T_{1(k)}, T_{2(k)}, Q_{(k)}$. Это возможно только тогда, когда $b_k=0$ и $d_k=0$ при любом k и, кроме того, когда $a_0=0$. Случай $n=1$ требует особого исследования и здесь не рассматривается.

По условиям закрепления на контуре $r=R$ величины T_1 и Q равны нулю при любом φ . Следовательно, для $k \neq 0, k \neq n, k \neq 2n$ при $r=R$ получаем

$$a_k \frac{2-k}{4} R^k - c_k R^{k-2} = 0, \quad -a_k \frac{k}{4} R^k - c_k R^{k-2} = 0$$

Отсюда

$$a_k = c_k = 0$$

Выражения (7.7), (7.8) и (7.9) принимают вид:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{1(0)} + T_{1(n)} \cos n\varphi + T_{1(2n)} \cos 2n\varphi \\ T_2 &= T_{2(0)} + T_{2(n)} \cos n\varphi + T_{2(2n)} \cos 2n\varphi \\ Q &= Q_{(n)} \sin n\varphi + Q_{(2n)} \sin 2n\varphi \end{aligned} \quad (7.10)$$

Полученные выражения для T_1 , T_2 и Q являются конечными суммами, что освобождает нас от исследования сходимости формально написанных рядов (7.4), (7.3), (7.8) и (7.9). Остается определить константы b_0 , a_n , c_n , a_{2n} , c_{2n} . Первая из них определяется из условия

$$[T_{1(0)}]_{r=R} = 0$$

Отсюда

$$\frac{b_0}{2} = A^2 \frac{1}{2} R^6 + B^2 \frac{1}{420} R^{14} - B^2 n^2 \frac{11}{13440} R^4$$

Таким образом, получаем

$$\mathcal{T}_{1(0)} = Eh(A^2 f_1 + B^2 f_2 + B^2 n^2 f_3) \quad \mathcal{T}_{2(0)} = Eh(A^2 f_4 + B^2 f_5 + B^2 n^2 f_6) \quad (7.11)$$

где

$$f_1 = \frac{1}{2} R^6 - R^4 r^2 + \frac{2}{3} R^2 r^4 - \frac{1}{6} r^6 \quad (7.12)$$

$$f_2 = \frac{1}{420} R^{14} - \frac{1}{12} R^8 r^6 + \frac{3}{10} R^6 r^8 - \frac{13}{30} R^4 r^{10} + \frac{2}{7} R^2 r^{12} - \frac{1}{14} r^{14}$$

$$f_3 = -\frac{11}{13440} R^{14} + \frac{7}{192} R^8 r^6 - \frac{9}{80} R^6 r^8 + \frac{11}{80} R^4 r^{10} - \frac{13}{168} R^2 r^{12} + \frac{15}{896} r^{14}$$

$$f_4 = \frac{1}{2} R^6 - 3R^4 r^2 + \frac{10}{3} R^2 r^4 - \frac{7}{6} r^6$$

$$f_5 = \frac{1}{420} R^{14} - \frac{7}{12} R^8 r^6 + \frac{27}{10} R^6 r^8 - \frac{143}{30} R^4 r^{10} + \frac{26}{7} R^2 r^{12} - \frac{15}{14} r^{14}$$

$$f_6 = -\frac{11}{13440} R^{14} + \frac{49}{192} R^8 r^6 - \frac{81}{80} R^6 r^8 + \frac{121}{80} R^4 r^{10} - \frac{169}{168} R^2 r^{12} + \frac{225}{896} r^{14}$$

Далее, при $r = R$

$$T_{1(n)} = Eh \left(ABz_1 R^{10} + a_n \frac{2-n}{4} R^n - c_n R^{n-2} \right)$$

$$\mathcal{T}_{1(2n)} = Eh \left(-B^2 z_2 R^{10} - B^2 n^2 z_3 R^{14} + a_{2n} \frac{2-2n}{4} R^{2n} - c_{2n} R^{2n-2} \right)$$

$$Q_{(n)} = Eh \left(ABz_4 R^{14} + a_{2n} \frac{2-2n}{4} R^{2n} - c_{2n} R^{2n-2} \right)$$

$$Q_{(2n)} = Eh \left(-B^2 z_5 R^{14} - B^2 n^2 z_6 R^{14} - a_{2n} \frac{2n}{4} R^{2n} - c_{2n} R^{2n-2} \right)$$

где z_1, \dots, z_6 зависят только от n . Приравнявая эти выражения нулю, находим a_n , c_n , a_{2n} , c_{2n} , после чего

$$\begin{aligned} T_{1(n)} &= EhABf_7, & T_{(2n)} &= EhB^2(f_{10} + n^2 f_{11}) \\ \mathcal{T}_{(2n)} &= EhABf_8, & k_{2(2n)} &= EhB^2(f_{12} + n^2 f_{13}) \\ Q_{(n)} &= EhABf_9, & Q_{(2n)} &= EhB^2(f_{14} + n^2 f_{15}) \end{aligned} \quad (7.13)$$

где

$$\begin{aligned} f_7 &= \frac{16(6-n^2)(4+n^2)}{(16-n^2)(36-n^2)} R^6 r^4 - \frac{64(8-n^2)(6+n^2)}{(36-n^2)(64-n^2)} R^4 r^6 + \frac{8(10-n^2)(8+n^2)}{(64-n^2)(100-n^2)} R^2 r^8 - \\ &\quad - \frac{32(12-n^2)(10+n^2)}{(100-n^2)(144-n^2)} r^{10} + \frac{2-n}{2} (z_4 - z_1) R^{10-n} r^n - \\ &\quad - \frac{1}{2} [z_1 n + z_4(2-n)] R^{12-n} r^{n-2} \end{aligned}$$

$$f_8 = \frac{480(4+n^2)}{(16-n^2)(30-n^2)} R^6 r^4 - \frac{3584(6+n^2)}{(36-n^2)(64-n^2)} R^4 r^6 + \frac{7200(8+n^2)}{(64-n^2)(100-n^2)} R^2 r^8 -$$

$$- \frac{4224(10+n^2)}{(100-n^2)(144-n^2)} r^{10} + \frac{n+2}{2} (z_4 - z_1) R^{10-n} r^n +$$

$$+ \frac{1}{2} [z_1 n + z_4 (n-2)] R^{12-n} r^{n-2}$$

$$f_9 = - \frac{80n(4+n^2)}{(16+n^2)(36-n^2)} R^6 r^4 + \frac{448(6+n^2)}{(36-n^2)(64-n^2)} R^4 r^6 - \frac{720n(8+n^2)}{(64-n^2)(100-n^2)} R^2 r^8 +$$

$$+ \frac{352n(10+n^2)}{(100-n^2)(144-n^2)} r^{10} - \frac{n}{2} (z_4 - z_1) R^{10-n} r^n -$$

$$- \frac{1}{2} [z_1 n + z_4 (2-n)] R^{12-n} r^{n-2}$$

$$f_{10} = - \frac{4(2^{3/2}-n^2)(3/2+n^2)}{(9-n^2)(16-n^2)} R^8 r^6 + \frac{24(5/2-n^2)(2+n^2)}{(26-n^2)(25-n^2)} R^6 r^8 -$$

$$- \frac{52(3-n^2)(5/2+n^2)}{(25-n^2)(36-n^2)} R^4 r^{10} + \frac{48(7/2-n^2)(3+n^2)}{(36-n^2)(49-n^2)} R^2 r^{12} -$$

$$- \frac{16(4-n^2)(7/2+n^2)}{(49-n^2)(64-n^2)} r^{14} + (1-n)(z_2 - z_5) R^{14-2n} r^{2n} +$$

$$+ [z_2 n + z_5 (1-n)] R^{16-2n} r^{2n-2}$$

$$f_{11} = - \frac{21(2-n^2)}{8(9-n^2)(16-n^2)} R^8 r^6 + \frac{18(5/2-n^2)}{(16-n^2)(25-n^2)} R^6 r^8 -$$

$$- \frac{165(3-n^2)}{4(25-n^2)(36-n^2)} R^4 r^{10} + \frac{39(7/2-n^2)}{(36-n^2)(49-n^2)} R^2 r^{12} -$$

$$- \frac{105(4-n^2)}{8(49-n^2)(64-n^2)} r^{14} + (1-n)(z_3 - z_6) R^{14-2n} r^{2n} +$$

$$+ [z_3 n + z_6 (1-n)] R^{16-2n} r^{2n-2}$$

$$f_{12} = - \frac{56(3/2+n^2)}{(9-n^2)(16-n^2)} R^8 r^6 + \frac{540(2+n^2)}{(16-n^2)(25-n^2)} R^6 r^8 - \frac{1716(5/2-n^2)}{(25-n^2)(36-n^2)} R^4 r^{10} +$$

$$+ \frac{2184(3+n^2)}{(36-n^2)(49-n^2)} R^2 r^{12} - \frac{960(7/2+n^2)}{(49-n^2)(64-n^2)} r^{14} +$$

$$+ (n+1)(z_2 - z_5) R^{14-2n} r^{2n} - [z_2 n + z_5 (1-n)] R^{16-2n} r^{2n-2}$$

$$f_{13} = - \frac{147R^8 r^6}{4(9-n^2)(16-n^2)} + \frac{405R^6 r^8}{(16-n^2)(25-n^2)} - \frac{5445R^4 r^{10}}{4(25-n^2)(36-n^2)} +$$

$$+ \frac{3549R^2 r^{12}}{(36-n^2)(49-n^2)} - \frac{1575r^{14}}{2(49-n^2)(64-n^2)} + (n+1)(z_3 - z_6) R^{14-2n} r^{2n} -$$

$$- [z_3 n + z_6 (1-n)] R^{16-2n} r^{2n-2}$$

$$f_{14} = \frac{14n(3/2+n^2)}{(9-n^2)(16-n^2)} R^8 r^6 - \frac{108n(2+n^2)}{(16-n^2)(25-n^2)} R^6 r^8 + \frac{286n(5/2+n^2)}{(25-n^2)(36-n^2)} R^4 r^{10} -$$

$$- \frac{312n(3+n^2)}{(36-n^2)(49-n^2)} R^2 r^{12} + \frac{120n(7/2+n^2)}{(49-n^2)(64-n^2)} r^{14} - n(z_3 - z_6) R^{14-2n} r^{2n} +$$

$$+ [z_3 n + z_5 (1-n)] R^{16-2n} r^{2n-2}$$

$$f_{15} = \frac{147n}{16(9-n^2)(16-n^2)} R^8 r^6 - \frac{81nR^6 r^8}{(16-n^2)(25-n^2)} + \frac{1815nR^4 r^{10}}{8(25-n^2)(36-n^2)} -$$

$$- \frac{507nR^2 r^{12}}{2(36-n^2)(49-n^2)} + \frac{1575nr^{14}}{16(49-n^2)(64-n^2)} - n(z_3 - z_6) R^{14-2n} r^{2n} +$$

$$+ [z_3 n + z_6 (1-n)] R^{16-2n} r^{2n-2}$$

8. Обратимся к уравнению (6.7) и подставим в него принятое выражение (7.1) для функции w , выражения (7.2) для χ и ϑ и выражения (7.10) для T_1 , T_2 , Q . Тогда получим

$$-p + D(64A + B\Phi \cos n\varphi) - \quad (8.1)$$

$$- [T_{1(0)} + T_{1(n)} \cos n\varphi + T_{1(2n)} \cos 2n\varphi] (AW_1'' + BW_2'' \cos n\varphi) -$$

$$[T_{2(0)} + T_{2(n)} \cos n\varphi + T_{2(2n)} \cos 2n\varphi] \left[\frac{AW_1'}{r} + \frac{BW_2'}{r} \cos n\varphi - Bn^2 \frac{W_2}{r^2} \cos n\varphi \right] +$$

$$+ [Q_{(n)} \sin n\varphi + Q_{(2n)} \sin 2n\varphi] \left[-Bn \left(\frac{W_2}{r} \right)' \sin n\varphi - Bn \frac{W_2'}{r} \sin n\varphi \right] = 0$$

где

$$W_1 = R^4 - 2R^2r^4 + r^4, \quad W_2 = R^4r^4 - 2R^2r^6 + r^8$$

$$\Phi = (64R^4 - 1152R^2r^2 + 2304r^4) - n^2(20R^4 - 104R^2r^2 + 100r^4) +$$

$$+ n^4(R^4 - 2R^2r^2 + r^4)$$

Выражение (8.1) умножаем один раз на $dr d\varphi$, а второй на $r^4 \cos n\varphi dr d\varphi$ и интегрируем по r от 0 до R и по φ от 0 до 2π . Полученные интегралы приравняем нулю.

После ряда преобразований, в процессе которых взаимно уничтожаются обращающиеся в бесконечность при различных значениях n члены коэффициентов f_7, \dots, f_{15} , приходим к уравнениям (8.2)

$$A_0^3 \frac{176}{189} + A_0 B_0^2 K_1 + \frac{16}{3(1-\mu^2)} A_0 = p_0, \quad A_0^2 B_0 K_2 + B_0^3 K_2 + B_0 \frac{K_4}{12(1-\mu^2)} = 0$$

где

$$A_0 = \frac{R^4}{h} A, \quad B_0 = \frac{R^8}{h} B, \quad p_0 = \frac{\rho R^4}{Eh^2} \quad (8.3)$$

$$K_1 = \frac{1096}{21 \cdot 39 \cdot 17 \cdot 15} - \frac{14711}{180 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 51} n^2 +$$

$$+ \frac{32}{(n+1)(n+3)} \left[\frac{4+n^2}{7(4+n)(6+n)} - \frac{4(6+n^2)}{9(6+n)(8+n)} + \frac{5(8+n^2)}{11(8+n)(10+n)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(10+n^2)}{13(10+n)(12+n)} \right] - \frac{32(9-n^2)}{(n+3)(n+5)} \left[\frac{4+n^2}{9(4+n)(6+n)} - \frac{4(6+n^2)}{12(6+n)(8+n)} + \right.$$

$$+ \frac{5(8+n^2)}{13(8+n)(10+n)} - \frac{2(10+n^2)}{15(10+n)(12+n)} \left. \right] + \frac{32(10-n^2)}{(n+5)(n+7)} \left[\frac{4+n^2}{11(4+n)(6+n)} - \right.$$

$$\left. - \frac{4(6+n^2)}{13(6+n)(8+n)} + \frac{5(8+n^2)}{15(8+n)(10+n)} - \frac{2(10+n^2)}{17(10+n)(12+n)} \right]$$

$$K_2 = -\frac{16}{21 \cdot 11 \cdot 65 \cdot 17} - \frac{64}{21 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 17} n^2 +$$

$$+ \frac{64(9-n^2)}{(n+3)(n+5)} \left[\frac{4+n^2}{9(4+n)(6+n)} - \frac{4(6+n^2)}{11(6+n)(8+n)} + \frac{5(8+n^2)}{13(8+n)(10+n)} - \right.$$

$$\left. - \frac{2(10+n^2)}{15(10+n)(12+n)} \right] - \frac{192(5-n^2)}{(n+5)(n+7)} \left[\frac{4+n^2}{11(4+n)(6+n)} - \frac{4(6+n^2)}{13(6+n)(8+n)} + \right.$$

$$\left. + \frac{5(8+n^2)}{15(8+n)(10+n)} - \frac{2(10+n^2)}{17(10+n)(12+n)} \right]$$

$$\begin{aligned}
K_3 = & -\frac{104360}{3 \cdot 5 \cdot 49 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 85 \cdot 19 \cdot 23} - \frac{8755822n^2}{27 \cdot 8 \cdot 25 \cdot 49 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23} + \\
& + \frac{25303n^4}{15 \cdot 49 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 85 \cdot 19 \cdot 23} + \frac{12(n^2+10)}{(2n+5)(2n+7)} \left[\frac{\frac{3}{2}+n}{13(3+n)(4+n)} - \right. \\
& - \frac{6(2+n^2)}{15(4+n)(5+n)} + \frac{13(\frac{5}{2}+n^2)}{17(5+n)(6+n)} - \frac{12(3+n^2)}{19(6+n)(7+n)} + \frac{4(\frac{7}{2}+n^2)}{21(7+n)(8+n)} \left. \right] - \\
& - \frac{504}{(2n+7)(2n+9)} \left[\frac{\frac{3}{2}+n^2}{15(3+n)(4+n)} - \frac{6(2+n^2)}{17(4+n)(5+n)} + \frac{13(\frac{5}{2}+n^2)}{19(5+n)(6+n)} - \right. \\
& - \frac{12(3+n^2)}{21(6+n)(7+n)} + \frac{4(\frac{7}{2}+n^2)}{23(7+n)(8+n)} \left. \right] + \frac{4(108-7n^2)}{(2n+9)(2n+11)} \left[\frac{\frac{3}{2}+n^2}{17(3+n)(4+n)} - \right. \\
& - \frac{6(2+n^2)}{19(4+n)(5+n)} + \frac{13(\frac{5}{2}+n^2)}{21(5+n)(6+n)} - \frac{12(3+n^2)}{23(6+n)(7+n)} + \frac{4(\frac{7}{2}+n^2)}{25(7+n)(8+n)} \left. \right] + \\
& + \frac{3(n^2+10)n^2}{(2n+5)(2n+7)} \left[\frac{21}{8 \cdot 13(3+n)(4+n)} - \frac{18}{15(4+n)(5+n)} + \right. \\
& + \frac{165}{4 \cdot 17(5+n)(6+n)} - \frac{39}{19(6+n)(7+n)} + \frac{105}{8 \cdot 21(7+n)(8+n)} \left. \right] - \\
& - \frac{126n^2}{(2n+7)(2n+9)} \left[\frac{21}{8 \cdot 15(3+n)(4+n)} - \frac{18}{17(4+n)(5+n)} + \right. \\
& + \frac{165}{4 \cdot 19(5+n)(6+n)} - \frac{39}{21(6+n)(7+n)} + \frac{105}{8 \cdot 23(7+n)(8+n)} \left. \right] + \\
& + \frac{(108-7n^2)n^2}{(2n+9)(2n+11)} \left[\frac{21}{8 \cdot 17(3+n)(4+n)} - \frac{18}{19(4+n)(5+n)} + \right. \\
& + \frac{165}{4 \cdot 21(5+n)(6+n)} - \frac{39}{23(6+n)(7+n)} + \frac{105}{8 \cdot 25(7+n)(8+n)} \left. \right] \\
K_4 = & \frac{3648}{35} - \frac{16}{63}n^2 + \frac{8}{315}n^4
\end{aligned}$$

Приводим результаты вычислений значений K_1 , K_2 , K_3 и K_4

n	K_1	K_2	K_3	K_4
2	-0.00048709	-0.009980	-0.000029355	+103.62
3	-0.0074589	-0.026490	+0.00031947	+104.00
4	-0.017650	-0.050353	+0.0014577	+106.67
5	-0.031429	-0.081940	+0.0040520	+113.75
6	-0.048818	-0.12134	+0.0089618	+128.00
7	-0.069725	-0.16837	+0.017237	+152.76
8	-0.094040	-0.22275	+0.030119	+192.00
9	-0.12168	-0.28417	+0.049036	+250.16
10	-0.15258	-0.35236	+0.075609	+332.80

9. Уравнения (8.2) должны быть разрешены относительно A_0 и B_0 . Второе из них распадается на два:

$$B_0 = 0, \quad A_0^2 K_2 + B_0^2 K_3 + \frac{K_4}{12(1-\mu^2)} = 0 \quad (9.1)$$

Первое уравнение $B_0 = 0$ соответствует, очевидно, симметричным формам равновесия, так как при $B_0 = 0$ имеем $B = 0$ и (7.1) дает

$$\omega = -A(R^2 - r^2)^2$$

Второе уравнение (9.1) соответствует несимметричным формам равновесия. Таким образом, получаем два решения.

а) *Симметричные формы*
Из первого уравнения (8.2) при $B_0 = 0$ имеем

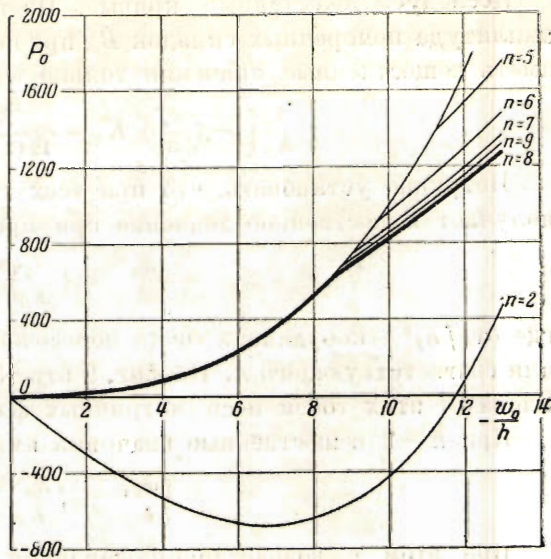
$$A_0^3 \frac{176}{189} + \frac{16}{3(1-\mu^2)} A_0 = p_0$$

Согласно (7.1) и (8.3) при $r = 0$ получим

$$A_0 = + \frac{w_0}{h} \quad (9.2)$$

где w_0 — перемещение центра пластинки, при этом мы изменим направление отсчета w_0 , т. е. считаем за положительное перемещение по направлению давления p , и, следовательно,

$$p_0 = \frac{176}{189} \left(\frac{w_0}{h}\right)^3 + \frac{16}{3(1-\mu^2)} \frac{w_0}{h}$$



Фиг. 9.

б) *несимметричные формы.* Из (9.1) и первого уравнения (8.2) имеем

$$p_0 = \left(\frac{w_0}{h}\right)^3 L_1 + \left(\frac{w_0}{h}\right) \frac{L_2}{1-\mu^2} \quad (9.4)$$

где

$$L_1 = \frac{176}{189} - \frac{K_1 K_2}{K_3}, \quad L_2 = \frac{16}{3} - \frac{K_1 K_4}{12 K_3}$$

Приводим результаты вычислений L_1 и L_2 :

n	L_1	L_2	n	L_1	L_2
2	+1.0968	-138.0	6	+0.2702	+63.53
3	+0.3127	+207.7	7	+0.2501	+56.83
4	+0.3215	+113.0	8	+0.2357	+55.29
5	+0.2956	+78.86	9	+0.2251	+57.06
6	+0.2702	+63.53	10	+0.2202	+61.30

10. Выражения (9.3) и (9.4) дают возможность построить зависимость перемещения центра пластинки от давления при симметричных и несимметричных формах равновесия.

Результаты такого построения приведены на фиг. 9.

Для симметричных форм уравнение (9.3) дает обычную кубическую зависимость прогиба от давления (см., например, [6]). Уравнение работы [6] почти совпадает с (9.3) при $\varphi_0 = 0$. Коэффициент при $(w_0/h)^3$, приведенный в работе [6], равен $6/7$, что несколько меньше $176/189$; разница объясняется тем, что приближенное решение в работе [6] получено в результате операций, несколько отличающихся от операций, сделанных в данной работе. Аналогичную зависимость дает и уравнение (19.4), параметры которого, однако, меняются в зависимости от предполагаемого числа складок.

Исследуем полученные кривые. Из выражения (9.1) следует, что амплитуда поперечных складок B_0 при несимметричных прогибах будет иметь вещественные значения только в том случае, если

$$\frac{1}{K_2} \left[-\left(\frac{w_0}{h}\right)^2 K_2 - \frac{K_4}{12(1-\mu^2)} \right] \geq 0$$

Нетрудно установить, что при всех значениях $n > 2$ амплитуда B_0 получает вещественное значение при прогибах

$$\left| \frac{w_0}{h} \right| > \left| \left(\frac{w_0}{h}\right)^* \right|$$

где $(w_0/h)^*$ — координата точки пересечения кривой (9.4) с кривой (9.3) для соответствующего n . На фиг. 9 эти точки отмечены буквами B_2, B_4 . Слева от этих точек несимметричных форм не существует.

При $n=2$ вещественные значения амплитуда B_0 получает при

$$\left| \frac{w_0}{h} \right| \leq \left| \left(\frac{w_0}{h}\right)^* \right|$$

При этом с возрастанием давления p_0 от нуля амплитуда B_0 падает. Случай $n=2$ является таким образом неустойчивым.

При $n > 2$, напротив, увеличение давления вызывает углубление несимметричной складчатости.

Итак, из полученных кривых следует, что при малых давлениях характеристика пластинки следует кривой симметричных форм равновесия. Затем при давлении и прогибе, соответственно равным

$$p_0 = \frac{pR^4}{Eh^4} \approx 660, \quad \frac{w_0}{h} \approx 8.7$$

поверхность пластинки получает поперечные складки числом $n=8$, и дальше пластинка будет деформироваться соответственно нижней огибающей семейства полученных кривых с параметром n .

Подчеркнем, что данное решение справедливо лишь для рассмотренного способа закрепления пластинки, запрещающего поворот и допускающего радиальные смещения на контуре. Качественная сторона явления сохраняется, однако, и для других способов закрепления.

Поступила в редакцию
5 V 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Панов Д. Ю. О больших прогибах круглых мембран со слабым гофром. ПММ. 1944. Т. V. Вып. II. Стр. 303.
2. Феодосьев В. И. О больших прогибах и устойчивости круглой мембраны с мелкой гофрировкой. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. V. Стр. 389.
3. Карман Т. H. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 1910. 2. 11. Bd. V. § 8.
4. Way S. On the Large Deflection of Rectangular Plates. S. Timoshenko 60th anniversary volume.
5. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ. 1935.
6. Феодосьев В. И. К расчету хлопающей мембраны. ПММ. 1946. Т. X. Вып. II. Стр. 296—300.