Институт механики Академии Наук Союза ССР

Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА, ПРИЛОЖЕННАЯ К ПОЛУПЛОСКОСТИ

(УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА)

К. Н. Шевченко

(Москва)

В работе рассматривается упруго-пластическая задача (с учетом упрочнения) о распределении напряжений и доформаций в полуплоскости, нагруженной на свободной поверхности вертикальной сосредоточенной силой. Решение дается как для несжимаемого, так и сжимаемого материала.

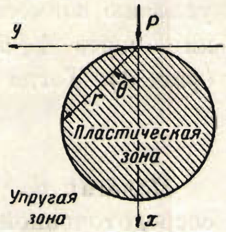
§ 1. Основные уравнения. Воспользуемся уравнениями пластичности в форме Генки при плоско-деформированном состоянии тела

$$\varepsilon_r - \varepsilon = \frac{\psi}{2G}(\sigma_r - \sigma), \quad \varepsilon_\theta - \varepsilon = \frac{\psi}{2G}(\sigma_\theta - \sigma), \quad -\varepsilon = \frac{\psi}{2G}(\sigma_z - \sigma) \tag{1.1}$$

$$\gamma = \frac{\psi}{G}\tau, \qquad \varepsilon = \frac{\alpha}{2G}\sigma$$

где

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_r + \varepsilon_\theta}{3}, \qquad \sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3}, \qquad \alpha = \frac{1-2\nu}{1+\nu}$$



Фиг. 1.

Уравнения равновесия в полярных координатах (фиг. 1), как известно, будут

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + \frac{\partial \tau}{\partial \theta} - \sigma_\theta = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r\frac{\partial \tau}{\partial r} + 2\tau = 0 \tag{1.2}$$

Уравнение совместности в полярных координатах имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + r^2\frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - r\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - r\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r\,\partial \theta} - \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = 0 \tag{1.3}$$

Граничными условиями задачи будут:

на прямолинейной границе ($\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$) отсутствуют внешние усилия, т. е. $\sigma_\theta = 0$, $\tau = 0$; на границе упругой и пластической областей должно выполняться условие непрерывности компонентов напряжения и деформации и, кроме того, $\psi = 1$.

Из уравнений пластичности (1.1) следует

$$E = \frac{\psi}{G}S \tag{1.4}$$

где E — интенсивность деформации, S — интенсивность напряжения сдвига.

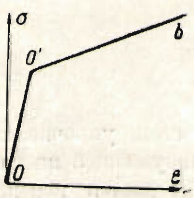
Решение задачи дается для случая линейного упрочнения

$$S = k(mE + \mu) \tag{1.5}$$

где m и μ — константы. Если не учитывать площадку текучести, т. е. принять диаграмму состояния в виде, представленном на фиг. 2, то между m и μ существует линейная зависимость. Подставим в (1.5) вместо E согласно (1.4), и обозначим km/G через n; тогда из условия прохождения прямой (1.5) через точку текучести $0'$ находим $n+\mu=1$.

§ 2. **Пластическая задача.** Будем полагать распределение напряжений совпадающим с распределением напряжений в случае упругой задачи

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r} \tag{2.1}$$



Фиг. 2

В нашем случае выражение для интенсивности напряжения S будет

$$S = -\frac{\sigma_r}{2} \tag{2.2}$$

Из системы уравнений (1.4), (1.5), (2.2) и (2.1) имеем

$$\psi = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{k\mu\pi}{P}\frac{r}{\cos\theta}\right) \tag{2.3}$$

Окончательное выражение для компонентов деформации имеет вид:

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = -\frac{1}{2Gn}\left(\frac{P\cos\theta}{\pi r} - k\mu\right) \tag{2.4}$$

Можно проверить, что эти выражения при $\gamma=0$ удовлетворяют условию совместности (1.3). В дальнейшем выражение $(1/r)\cos\theta$ заменим через $1/d$, где d — диаметр окружности равных напряжений (фиг. 1). Тогда выражение (2.3) для ψ примет вид:

$$\psi = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{k\pi\mu d}{P}\right) \tag{2.5}$$

Полагая $d=0$, находим значение функции ψ в точке приложения сосредоточенной силы:

$$\psi = \frac{1}{n} \tag{2.6}$$

Границу распространения пластической области получим, полагая $\psi=1$ в (2.5). Так как $n+\mu=1$, то последовательно будем иметь

$$d_s = \frac{P}{\pi\mu k}(1-n), \qquad \text{или} \qquad d_s = \frac{P}{\pi k} \tag{2.7}$$

Подставляя значение d_s в выражения для σ_r, ε_r и ε_θ, получим

$$\sigma_r = -2k, \qquad \varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = -\frac{k}{2G} \tag{2.8}$$

Упругое решение этой же задачи, как известно, имеет вид:

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}, \qquad \varepsilon_r = -\frac{P(1-\nu)}{\pi G}\frac{\cos\theta}{r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{\nu P}{\pi G}\frac{\cos\theta}{r} \tag{2.9}$$

На границе упругой и пластической это решение принимает вид:

$$\sigma_r = -2k, \qquad \varepsilon_r = -\frac{k(1-\nu)}{G}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{k\nu}{G} \tag{2.10}$$

Сравнивая решение (2.10) с решением (2.8), видим, что компоненты деформации ε_r и ε_θ на границе упругой и пластической областей терпят разрыв. Это обстоятельство объясняется тем, что пластическая задача решена без учета сжимаемости материала.

§ 3. Упруго-пластическое решение с учетом сжимаемости материала. Построим приближенное решение упруго-пластической задачи с учетом сжимаемости материала в пластической области.

Из уравнения пластичности (1.1), полагая $\sigma_\theta = 0$ и $\tau = 0$, имеем

$$\varepsilon_r = \frac{\psi(\psi + 2\alpha)\,\sigma_r}{2G(2\psi + \alpha)}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{\psi(\alpha - \psi)\,\sigma_r}{2G(2\psi + \alpha)}, \qquad \sigma_z = \frac{(\psi - \alpha)\,\sigma_r}{2\psi + \alpha} \tag{3.1}$$

Найдем выражение для функции ψ. Для этого напишем выражение для интенсивности напряжения S. Принимая во внимание третье уравнение (3.1), получим

$$S = -\frac{\sigma_r}{2(2\psi + \alpha)}\sqrt{(2\psi + \alpha)^2 + 3\alpha^2} \tag{3.2}$$

Если пренебречь величиной дроби $(\sqrt{3}\,\alpha \,/\, 2\psi + \alpha)^2$ по сравнению с единицей (наибольшее значение дроби при $\psi = 1$ равно 1/27), то выражение для S совпадает с выражением (2.2) в случае несжимаемости материала. Далее, принимая σ_r согласно (2.1), найдем для ψ то же выражение, что и в предыдущем параграфе. Таким образом, и в этом случае функция ψ в пластической области изменяется в пределах

$$1 \leqslant \psi \leqslant \frac{1}{n} \tag{3.3}$$

Воспользовавшись тем, что границы изменения функции ψ известны, заменим уравнения пластичноэти (3.1) приближенным

$$\varepsilon_r = \frac{(\psi + 2\alpha)\,\sigma_r}{4G(1 + \alpha')}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{(\alpha - \psi)\,\sigma_r}{4G(1 + \alpha')} \tag{3.4}$$

где

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2\psi} \approx \frac{\alpha}{2}$$

Подставив в (3.4) значения функции ψ, σ_r согласно (2.3) и (2.1), окончательно получим

$$\varepsilon_r = -\frac{1}{2G\pi n(1 + \alpha')}\left[P(1 + 2\alpha n)\frac{\cos\theta}{r} - \pi\mu k\right]$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{2Gn\pi(1 + \alpha')}\left[P(1 - \alpha n)\frac{\cos\theta}{r} - \pi\mu k\right] \tag{3.5}$$

Легко убедиться, что полученные значения компонентов деформации (3.5) при $\gamma = 0$ удовлетворяют уравнению совместности (1.3).

Решение для случая несжимаемости материала (2.4) получается из (3.5) при $\alpha = 0$. Предельным переходом при $\psi = 1$ из (3.5), когда $\mu = 0$ и $n = 1$, получается известное решение упругой задачи (2.9).

Из решения (3.5) следует и другое важное следствие, а именно то, что предельным переходом, полагая $n = 0$, $\mu = 1$, нельзя получить решение этой задачи для случая идеальной пластичности.

Граница распространения пластического состояния определяется, как и в случае несжимаемого материала.

Компоненты напряжения и деформации при переходе через границу пластичности будут непрерывными.

§ 4. Пример. Для сравнения упругого решения с упруго-пластическими решениями (2.4) и (3.5) в заданной пластической области приводим результаты вычислений. Диаметр равнонапряженного круга, являющегося границей пластичности, был принят равным $d_s = 10$ мм.

Необходимое внешнее усилие вычислялось по формуле $P = \pi k d_s$.

Предел текучести был принят равным $2k = 32$ кг / мм^2, модуль сдвига — $G = 8 \times 10^3$ кг / мм^2, коэффициент Пуассона равным $^1/_3$. Вычисления проводились для $n = 0.1$, $\mu = 0.9$ и для $n = 0.05$, $\mu = 0.95$.

Приводим результаты вычислений напряжений σ_r, а также значений функций $\psi = \psi'$ в случае несжимаемости и значений $\psi = \psi''$ в случае сжимаемости материала для значений диаметров равнонапряженных окружностей, взятых через 1 мм:

d	1	2	3	4	5
σ_r	—320	—160	—106.666	—80	—64
ψ'	9.1	8.2	7.3	6.4	5.5
ψ''	9.1002	8.2005	7.3011	6.4019	5.5031

d	6	7	8	9	10
σ_r	—53.333	—45.714	—40	—35.555	—32
ψ'	4.6	3.7	2.8	1.9	1.0
ψ''	4.6053	3.7101	2.8194	1.9455	1.1626

Из сравнения значений ψ' и ψ'' видно, что погрешность, вносимая от пренебрежения дробью $(\sqrt{3}\alpha / 2\psi + \alpha)^2$, по сравнению с единицей под радикалом в выражении (3.2) для S весьма незначительна.

Таблица 1

d мм	Упругое решение		Упруго-пластическое решение					
			несжим. матер.		сжимаемый материал			
			$n=0.1$, $\mu=0.9$		$n=0.1$, $\mu=0.9$		$n=0.05$, $\mu=0.95$	
	$-s_r$	s_ϑ	$-s_r$	s_ϑ	$-s_r$	s_ϑ	$-s_r$	s_ϑ
1	0.0133	0.0067	0.0910	0.0910	0.0853	0.0787	0.1653	0.1587
2	0.0067	0.0033	0.0410	0.0410	0.0387	0.0348	0.0742	0.0709
3	0.0044	0.0022	0.0243	0.0243	0.0231	0.0203	0.0439	0.0416
4	0.0033	0.0017	0.0160	0.0160	0.0153	0.0131	0.0287	0.0270
5	0.0027	0.0013	0.0110	0.0110	0.0107	0.0087	0.0196	0.0182
6	0.0022	0.0011	0.0076	0.0076	0.0076	0.0059	0.0135	0.0124
7	0.0019	0.0010	0.0053	0.0053	0.0053	0.0038	0.0091	0.0082
8	0.0017	0.0008	0.0035	0.0035	0.0037	0.0022	0.0059	0.0051
9	0.0015	0.0007	0.0021	0.0021	0.0024	0.0010	0.0034	0.0026
10	0.0013	0.0007	0.0010	0.0010	0.0013	0.0007	0.0013	0.0007

В табл. 1 приведены значения деформаций в пластической области. Для сравнения приведены также результаты вычислений в случае упругого решения этой задачи.

Поступила в редакцию
20 IV 1948

Институт механики
Академии Наук СССР