

ПЛАСТИЧЕСКОЕ КРУЧЕНИЕ КРУГЛЫХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОГО ДИАМЕТРА

Л. М. Качанов

(Ленинград)

Рассмотрим задачу о кручении круглого стержня переменного диаметра в предположении, что материал стержня следует теории Генки в ее наиболее общей форме, когда интенсивность деформации сдвига Γ является некоторой функцией интенсивности касательных напряжений T :

$$\Gamma = 2f(T^2) T \quad \text{или} \quad T = 2g(\Gamma^2) \Gamma \quad (0.1)$$

где $f(T^2)$ или $g(\Gamma^2)$ — характеристика для данного материала функция. Случай идеальной текучести ($T = \text{const}$), изученный недавно В. Б. Соколовским [1], в настоящей работе не рассматривается.

1. Основные уравнения. Пусть r^* , φ , z^* — цилиндрические координаты (ось z^* направлена по оси стержня), а u_r , u_φ , u_z — компоненты вектора смещения (фиг. 1). Допустим, что при пластическом кручении, так же как при упругом,

$$u_r = u_\varphi = 0, \quad u_z = u_z(r^*, z^*) \quad (1.1)$$

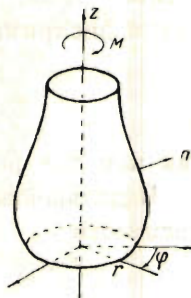
Вычисляя по известным формулам компоненты деформации, находим

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z = \gamma_{rz} = 0, \quad \Gamma^2 = \gamma_{r\varphi}^2 + \gamma_{z\varphi}^2$$

$$\gamma_{r\varphi} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right), \quad \gamma_{z\varphi} = r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) \quad (1.2)$$

где введены безразмерные величины (b — характерный размер стержня)

$$r = \frac{r^*}{b}, \quad z = \frac{z^*}{b}, \quad v = \frac{u_\varphi}{b} \quad (1.3)$$



Фиг. 1.

В силу (1.2) и соотношений Генки (см., например, работу [2])

$$\varepsilon_r = f(T^2) \left[\sigma_r - \frac{k + f(T^2)}{f(T^2)} \sigma \right], \quad \dots \quad \gamma_{r\varphi} = 2f(T^2) \tau_{r\varphi}, \quad \dots \quad (1.4)$$

находим, что $\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{rz} = 0$. Вследствие этого имеем одно дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{z\varphi}) = 0 \quad (1.5)$$

которое можно отождествить функцией напряжений $\Phi = \Phi(r, z)$ согласно

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad \tau_{z\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (1.6)$$

В силу (1.2) и (1.4) функция напряжений должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[f(T^2) \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[f(T^2) \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = 0 \quad (1.7)$$

причем

$$T^2 := \frac{1}{r^4} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1.8)$$

Если боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий, то на ней (см., например, [3])

$$\Phi = \text{const} \quad (1.9)$$

На концевых поперечных сечениях должно быть задано распределение касательных напряжений τ_{rz} ; следовательно, здесь также известна функция напряжений

$$\Phi = \tilde{\Phi}(r) \quad (1.10)$$

Этому условию для длинных стержней обычно можно удовлетворять интегрально (принцип Сен-Венана справедлив и в теории пластичности), заменяя (1.10) условием статической эквивалентности

$$M = 2\pi b^3 \int \tau_z r^2 dr = 2\pi b^3 [\Phi]_{r=r_2}^{r=r_1} \quad (1.11)$$

где r_1 и r_2 — соответственно наружный и внутренний радиусы сечения.

Уравнение (1.7) относится к уравнениям Монжа-Ампера эллиптического типа; в последнем нетрудно убедиться, вычисляя обычным путем дискриминант Δ уравнения (1.7) при $T \neq \text{const}$. Имеем

$$\Delta = -\frac{1}{4r^6} \frac{\Gamma}{T} \frac{d\Gamma}{dT} < 0 \quad (1.12)$$

так как для реальных материалов $\Gamma/T > 0$, $d\Gamma/dT > 0$

В дальнейшем мы будем большей частью исходить из степенной зависимости

$$f(\zeta) = \frac{B}{2} \zeta^\beta \quad (1.13)$$

где $B > 0$, $\beta \geq 0$ — некоторые постоянные; для упругой среды Гука $B = 1/G$, $\beta = 0$, где G — модуль сдвига. В заключение заметим:

1) поставленная задача соответствует минимуму функционала

$$J(\Phi) \equiv \int \int \left\{ \int_0^{T^2} f(\zeta) d\zeta \right\} r dr dz \quad (1.14)$$

при условиях (1.9), (1.10);

2) дифференциальное уравнение для смещения $v = v(r, z)$ будет

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[g(\Gamma^2) r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[g(\Gamma^2) r^3 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) \right] = 0,$$

причем на боковой поверхности стержня (n — нормаль к поверхности)

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{v}{r} \right) = 0$$

2. Кручение тонкостенного полого вала переменного диаметра.

Пусть $r = r(z)$ — радиус средней поверхности полого вала, $2h = 2h(z)$ — толщина стенки в направлении нормали к срединной поверхности. Функция напряжений постоянна на внутренней (например, $\Phi = 0$) и внешней поверхностях ($\Phi = \text{const} = C$); вследствие малости толщины $2h$ сравнительно с другими измерениями стержня можно полагать, что Φ меняется линейно по толщине оболочки — от $\Phi = 0$ до $\Phi = C$ и не зависит от z . Тогда $\tau_{rz} = 0$; напряжение τ_{zz} не зависит от свойств материала и определяется так же, как и в теории упругости [4]. Компоненты деформации находятся согласно соотношениям (1.4).

3. Постановка задачи для стержня, близкого к цилиндрическому.

Рассмотрим задачу о кручении круглого стержня, форма которого не очень сильно отличается от цилиндрической. Выберем некоторый цилиндр, близкий к рассматриваемому стержню, и примем его радиус за характерный размер b . Пусть $2l$ — безразмерная длина стержня; начало системы координат возьмем в среднем его сечении (фиг. 2). Уравнение поверхности стержня зададим в форме

$$r = 1 + \lambda\psi(z), \quad |\psi(z)| \leq 1 \quad (3.1)$$

где $\lambda \geq 0$ — малый безразмерный параметр, а $\psi(z)$ — непрерывная функция в интервале $(-l \leq z \leq l)$. Для простоты ограничимся рассмотрением сплошного стержня (случай полого стержня обсуждается в § 12); тогда для функции напряжений имеем краевое условие

$$\Phi(r, z) = 0 \quad \text{при} \quad r = 1 + \lambda\psi(z) \quad (3.2)$$

и условие статической эквивалентности

$$\Phi(0, z) = -\frac{M}{2\pi b^3} \quad (3.3)$$

Из ограниченности напряжений τ_{rz} и τ_{zz} при $r = 0$ вытекает, что производные $\partial\Phi/\partial r$, $\partial\Phi/\partial z$ должны стремиться к нулю при $r \rightarrow 0$ не медленней, чем r^2 .

4. Кручение цилиндрического стержня. Пусть $\lambda = 0$. Функция напряжений, которую мы будем отличать для этого случая нулевым индексом, зависит только от координаты r . Вследствие этого¹

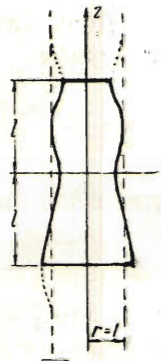
$$\tau_{rz} = 0, \quad \tau_{zz} = \frac{1}{r^2} \Phi_0' \quad (4.1)$$

а решение уравнения (1.7) при условии (1.13) имеет вид:

$$\Phi_0 = C_1 r^\alpha + C_2 \quad (4.2)$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а

$$\alpha = \frac{6\beta + 4}{2\beta + 1} \quad (3 < \alpha \leq 4) \quad (4.3)$$



Фиг. 2.

¹ В дальнейшем для упрощения письма дифференцирование по r обозначается штрихом, а по z — точкой.

Для упругой среды Гука $\alpha = 4$. Соответственно условиям (3.2), (3.3) находим

$$\Phi_0 = -\frac{M}{2\pi b^3} (1-r^2) \quad (4.4)$$

5. Дифференциальное уравнение n -го приближения. Обратимся к общему случаю; решение ищем в виде ряда по степеням λ .

$$\Phi(r, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(r, z) \lambda^n \quad (5.1)$$

где $\Phi_n(r, z)$ — новые неизвестные функции. Исходя из (5.1), находим

$$T^2 = \frac{1}{r^4} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \lambda^n; \quad \Psi_n = \sum_{k=0}^n [\Phi_k' \Phi_{n-k}' + \Phi_k \Phi_{n-k}'] \quad (5.2)$$

Допуская возможность разворачивания в строку бинома Ньютона, получаем

$$f(T^2) = \frac{B\Psi_0^{\frac{3}{2}}}{2r^{4\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\beta}{k} \frac{1}{\Psi_0^{\frac{k}{2}}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \lambda^n \right]^k \right\}$$

где использовано обычное обозначение

$$\binom{\beta}{k} = \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-k+1)}{k!}$$

Если β — целое число, то бесконечный ряд в выражении для $f(T^2)$ обрывается. Далее, имеем

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n \lambda^n \right]^k = \sum_{n=k}^{\infty} {}^n_k X \lambda^n$$

где положено

$${}^n_k X = \sum_{i_1+i_2+\dots+i_k=n} \Psi_{i_1} \Psi_{i_2} \dots \Psi_{i_k} \quad (i_1, i_2, \dots, i_k \geq 1) \quad (5.3)$$

причем суммирование здесь идет по всем k индексам. Например,

$${}^1_1 X = \Psi_1, \quad {}^2_1 X = \Psi_2, \quad \dots, \quad {}^2_2 X = \Psi_1^2, \quad {}^3_2 X = 2\Psi_1 \Psi_2, \quad \dots$$

Теперь имеем

$$f(T^2) = \frac{B\Psi_0^{\frac{3}{2}}}{2r^{4\frac{3}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \Upsilon_k \lambda^k \quad (5.4)$$

где обозначено

$$\Upsilon_k = \sum_{m=1}^k \binom{\beta}{m} \frac{1}{\Psi_0^{\frac{m}{2}}} {}^k_m X, \quad \Upsilon_0 = 1 \quad (k=1, 2, \dots) \quad (5.5)$$

Умножая ряд (5.4) соответственно на ряды для Φ' и $\dot{\Phi}$, получаем

$$\frac{1}{r^2} f(T^2) \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{B}{2} R \sum_{n=0}^{\infty} I_n^* \lambda^n, \quad \frac{1}{r^2} f(T^2) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{B}{2} R \sum_{n=0}^{\infty} J_n^* \lambda^n \quad (5.6)$$

В соотношениях (5.6) введены следующие обозначения:

$$I_n^* = \sum_{k=0}^n \gamma_k \Phi_{n-k}', \quad J_n^* = \sum_{k=0}^n \gamma_k \dot{\Phi}_{n-k} \quad (5.7)$$

$$R = \frac{\Psi_0^\beta}{r^{4\beta+3}} = \left(\frac{M\alpha}{2\pi b^3} \right)^{2\beta} r^\omega \quad \left(\omega = -\frac{4\beta+3}{2\beta+1} \right), \quad I_n \equiv R I_n^*, \quad J_n \equiv R J_n^*$$

Таким образом, уравнение кручения приведено к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} (I_n' + \dot{J}_n) \lambda^n = 0 \quad (5.8)$$

Отсюда вытекает последовательность уравнений

$$I_n' + \dot{J}_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (5.9)$$

Выясним структуру этих уравнений. Считая функции $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}$ известными, пользуясь тем, что $\dot{\Phi}_0 = 0$, и анализируя выражения $I_n^*, J_n^*, \gamma_k, \frac{k}{m}X, \Psi_i$, нетрудно выделить в I_n, J_n функции с высшим номером Φ_n :

$$I_n = R\Phi_n' (1 + 2\beta) + R \left[\Phi_0' \gamma_n^* + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \Phi_{n-k}' \right] \equiv R\Phi_n' (1 + 2\beta) + I_n^\circ \quad (5.10)$$

$$J_n = R\dot{\Phi}_n + R \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k \dot{\Phi}_{n-k} \equiv R\dot{\Phi}_n + J_n^\circ$$

где

$$\gamma_n^* = \frac{\beta}{\Psi_0} \sum_{k=1}^{n-1} (\Phi_k' \Phi_{n-k}' + \dot{\Phi}_k \dot{\Phi}_{n-k}) + \sum_{k=2}^n \binom{\beta}{k} \frac{1}{\Psi_0^k} \frac{k}{m} X \quad (5.11)$$

Величины I_n°, J_n° содержат функции Φ_i с индексом, меньшим n . Следовательно, « n -е приближение» Φ_n удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial r^2} = F_n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (5.12)$$

где положено

$$\mu = 3 + 4\beta > 0, \quad \nu = 1 + 2\beta > 0 \quad (5.13)$$

$$F_n = -\frac{1}{R} (I_n^{\circ\prime} + \dot{J}_n^\circ) \quad (5.14)$$

Заметим, что

$$F_1 = 0$$

$$F_2 = \frac{(\alpha-1)\beta}{r\Phi_0'} \left\{ \left[3 + \frac{2}{3}(\beta-1)(\beta-2) \right] \Phi_1'^2 + \dot{\Phi}_1^2 \right\} - \beta \left\{ \frac{1}{\Phi_0'} \left[\left(3 + \frac{2}{3}(\beta-1)(\beta-2) \right) \Phi_1'^2 + \dot{\Phi}_1^2 \right] \right\}' - \frac{2\beta}{\Phi_0'} (\Phi_1' \dot{\Phi}_1).$$

Для упругой среды Гука $\mu=3, \nu=1$ и все $F_n=0$.

6. Граничное условие. На боковой поверхности стержня, т. е. при $r = 1 + \lambda\psi(z)$, имеем в силу (3.2) и (5.1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(1 + \lambda\psi(z), z) \lambda^n = 0 \quad (6.1)$$

Разлагая Φ_n в ряд по степеням параметра λ и собирая члены с одинаковыми степенями λ , приходим к граничным условиям

$$\Phi_0(1) = 0, \quad \Phi_n(1, z) = - \sum_{k=1}^n \frac{|\psi(z)|^k}{k!} \Phi_{n-k}^{(k)}(1, z) \equiv S_n^*(z) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (6.2)$$

7. Условие статической эквивалентности. Из (3.3) и (5.1) находим

$$\Phi_0(0, z) = - \frac{M}{2\pi b^2}, \quad \Phi_n(0, z) = 0 \quad (n=1, 2, \dots) \quad (7.1)$$

8. Решение в полиномах относительно z . Пусть

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^m b_k \left(\frac{z}{l}\right)^k, \quad |\psi(z)| \leq 1 \quad (8.1)$$

Ищем первое приближение в форме

$$\Phi_1(r, z) = \sum_{k=0}^m R_k(r) \left(\frac{z}{l}\right)^k, \quad (8.2)$$

где $R_k(r)$ — некоторые функции r ; внося (8.2) в уравнение (5.12) и приравнявая нулю коэффициенты при (z/l^k) , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \nu R_0'' - \frac{\mu}{r} R_0' + \frac{2}{l^2} R_2 &= 0 \quad (k=0), & \nu R_1'' - \frac{\mu}{r} R_1' + \frac{6}{l^2} R_3 &= 0 \quad (k=1), \dots \\ \nu R_{m-2}'' - \frac{\mu}{r} R_{m-2}' + \frac{m(m-1)}{l^2} R_m &= 0 \quad (k=m-2) \\ \nu R_{m-2}' - \frac{\mu}{r} R_{m-1}' &= 0 \quad (k=m-1), \\ \nu R_m'' - \frac{\mu}{r} R_m' &= 0 \quad (k=m) \end{aligned} \quad (8.3)$$

Эта система просто интегрируется; прежде всего находим

$$R_m = A_m r^\alpha + B_m, \quad R_{m-1} = A_{m-1} r^\alpha + B_{m-1}, \quad (8.4)$$

где $A_m, A_{m-1}; B_m, B_{m-1}$ — произвольные постоянные; внося (8.4) в третье и четвертое (снизу) уравнения (8.3), находим R_{m-2}, R_{m-3} и т. д. Произвольные постоянные определяются из условия на границе

$$R_k(1) = -b_k \Phi_0'(1) \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (8.5)$$

и условия статической эквивалентности

$$R_k(0) = 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (8.6)$$

Первое приближение получено; дальнейшие приближения строятся подобным же образом, правда, в полиномах более высокой степени относительно z (так, Φ_2 — в полиномах степени $2m$, Φ_3 — в полиномах степени $3m$ и т. д.).

Рассмотрим в качестве примера кручение конического стержня

$$\psi(z) = -\frac{z}{l} \quad (8.7)$$

Легко находим первое приближение

$$\Phi_1(r, z) = \frac{M\alpha}{2\pi b^3} \frac{z}{l} r^2 \quad (8.8)$$

Нетрудно убедиться в том, что для упругого стержня ($\alpha=4$) решение $\Phi_0 + \lambda\Phi_1$ с точностью до λ^2 совпадает с известным точным решением задачи о кручении упругого конического стержня. Несколько более сложные вычисления приводят ко второму приближению

$$\Phi_2(r, z) = \frac{M\alpha(1+\alpha)}{4\pi b^3 l^2} \left(z^2 + \frac{1-r^2}{2+\alpha} \right) r^2 \quad (8.9)$$

9. Решение в рядах Фурье. Построенные выше решения элементарны и достаточно общи (ибо в интервале $(-l, +l)$ непрерывную функцию $\psi(z)$ можно равномерно аппроксимировать полиномом), но не всегда удобны. Рассмотрим решение уравнения (5.12) в рядах Фурье. Пусть $\Phi_n^* = \Phi_n^*(r, z)$ — частный интеграл неоднородного уравнения (5.12), обращающийся в нуль при $r=0$ соответственно требованиям § 3. Решение однородного уравнения $\Phi_{n0}(r, z)$ должно удовлетворять граничному условию

$$\Phi_{n0}(1, z) = S_n^*(z) - \Phi_n^*(1, z) \equiv S_n(z) \quad (9.1)$$

Правая часть (9.1) — известная функция; представим ее тригонометрическим рядом

$$S_n(z) = a_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_{mn} \cos \frac{m\pi z}{l} + b_{mn} \sin \frac{m\pi z}{l} \right), \quad (9.2)$$

где a_{0n} , a_{mn} , b_{mn} — коэффициенты Фурье. Разыскивая, далее, решения однородного уравнения вида $R(r) \cos(m\pi z/l)$, $R(r) \sin(m\pi z/l)$ удовлетворяющие упомянутым требованиям на оси стержня и граничному условию (9.1), находим формальное решение

$$\begin{aligned} \Phi_n(r, z) = & \Phi_n^*(r, z) + a_{0n} r^\alpha + \\ & + r^{\alpha/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_{\alpha/2}(m\pi r/l \sqrt{\nu})}{I_{\alpha/2}(m\pi/l \sqrt{\nu})} \left(a_{mn} \cos \frac{m\pi z}{l} + b_{mn} \sin \frac{m\pi z}{l} \right) \end{aligned} \quad (9.3)$$

где $I_{\alpha/2}(\dots)$ — бесселева функция мнимого аргумента порядка $1/2\alpha$. Ряд (9.3), вообще говоря, обладает неудовлетворительной сходимостью, так как обычно $S_n(-l+0) \neq S_n(l-0)$. Однако, используя решения § 8, можно в желательной мере улучшить сходимость. Для наших целей достаточно, чтобы ряд Фурье имел коэффициенты вида $O(m^{-3})$, поэтому необходимо устранить разрывы функции $S_n(z)$ и ее производной. Введем обозначения

$$S_n(l-0) - S_n(-l+0) = \Delta, \quad \dot{S}_n(l-0) - \dot{S}_n(-l+0) = \varepsilon$$

и рассмотрим решение однородного уравнения

$$\Omega_n(r, z) = \frac{r^\alpha}{2} \left[\frac{\delta l}{2} \left(\frac{z}{l} \right)^2 + \Delta \frac{z}{l} - \frac{\delta l}{2\nu(\lambda+2)} \left(\frac{r}{l} \right)^2 \right] \quad (9.4)$$

обладающее такими же разрывами. Тогда n -е приближение $\Phi_n(r, z)$ можно представить суммой

$$\Phi_n(r, z) = \Phi_n^*(r, z) + \Omega_n(r, z) + a_{0n}^* r^\nu + r^{\alpha/2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_{\alpha/2}(m\pi r/l\sqrt{\nu})}{I_{\alpha/2}(m\pi/l\sqrt{\nu})} \left(a_{mn}^* \cos \frac{m\pi z}{l} + b_{mn}^* \sin \frac{m\pi z}{l} \right) \quad (9.5)$$

где a_{0n}^* , a_{mn}^* , b_{mn}^* — коэффициенты Фурье функции $S_n - \Omega_n$, имеющие порядок $O(m^{-3})$.

Рассмотрим задачу о кручении волнистого стержня

$$\psi(z) = \cos \frac{p\pi z}{l} \quad (9.6)$$

где p — целое число; так как $\Phi_1^*(r, z) \equiv 0$, то легко находим первое приближение:

$$\Phi_1(r, z) = -\frac{Mz}{2\pi b^3} r^{\alpha/2} \frac{I_{\alpha/2}(p\pi r/l\sqrt{\nu})}{I_{\alpha/2}(p\pi/l\sqrt{\nu})} \cos \frac{p\pi z}{l} \quad (9.7)$$

Пользуясь этим решением, нетрудно показать, что малая волнистость стержня в первом приближении не влияет на угол кручения.

10. Решение в интегралах Фурье. Основываясь на принципе Сен-Венана, можно дать несколько иную формулировку задачи. Продолжим стержень в обе стороны, сведя его концы непрерывным и достаточно плавным образом в цилиндрический стержень радиуса 1 (фиг. 2). В уравнениях (5.12) правые части $F_n(r, z)$ будут стремиться к нулю при $|z| \rightarrow \infty$. Пусть $\Phi_n^*(r, z)$ — частное решение неоднородного уравнения (5.12), стремящееся к нулю при $r \rightarrow 0$, а также при $|z| \rightarrow \infty$; решение однородного уравнения имеет вид:

$$\Phi_{n0}(r, z) = r^{\alpha/2} \int_0^{\infty} I_{\alpha/2} \left(\frac{sr}{\sqrt{\nu}} \right) [A(s) \cos sz + B(s) \sin sz] ds, \quad (10.1)$$

где $A(s)$, $B(s)$ — произвольные функции s , достаточно быстро убывающие при $s \rightarrow \infty$. Функция $\Phi_{n0}(r, z)$ при $r=1$ должна принимать заданное значение $S_n(z)$; для построенного бесконечного стержня функция $S_n(z) \rightarrow 0$ при $|z| \rightarrow \infty$; пусть ее возможно представить интегралом Фурье

$$S_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(t) \cos s(z-t) dt \quad (10.2)$$

Сопоставляя (10.1) и (10.2), находим

$$\Phi_{n0}(r, z) = \frac{r^{\alpha/2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_{\alpha/2}(sr/\sqrt{\nu})}{I_{\alpha/2}(s/\sqrt{\nu})} \int_{-\infty}^{\infty} S_n(t) \cos s(z-t) dt ds \quad (10.3)$$

Особенной простотой отличается первое приближение; здесь $F_1 = 0$, следовательно,

$$\Phi_1^* = 0, \quad S_1(z) = -\frac{Mz}{2\pi b^3} \psi(z)$$

и

$$\Phi_1(r, z) = -\frac{Mz}{2\pi^2 b^3} r^{\alpha/2} \int_0^\infty \frac{I_{\alpha/2}(sr/\sqrt{v})}{I_{\alpha/2}(s/\sqrt{v})} \int_{-\infty}^\infty \psi(t) \cos s(z-t) dt ds \quad (10.4)$$

11. Кручение стержня с кольцевой выточкой. Пусть

$$\psi(z) = -\exp(-\lambda z^2) \quad (11.1)$$

где λ — положительное число; стержень имеет вид цилиндра с кольцевой выточкой, глубина которой равна λ ; с увеличением λ выточка суживается. В меридиональном сечении стержня радиус кривизны дна выточки (т. е. при $z=0$)

$$\rho = \frac{1}{2\lambda z} \quad (11.2)$$

Внося (11.1) в (10.4) и пользуясь известной формулой

$$\int_{-\infty}^\infty \exp(-zt^2) \cos s(z-t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{z}} \cos sz \exp\frac{-s^2}{4z} \quad (11.3)$$

получаем

$$\Phi_1(r, z) = \frac{Mz}{2\pi b^3} \frac{r^{\alpha/2}}{\sqrt{\pi z}} \int_0^\infty \frac{I_{\alpha/2}(sr/\sqrt{v})}{I_{\alpha/2}(s/\sqrt{v})} \exp\frac{-s^2}{4z} \cos sz ds$$

Определим напряжения τ_{rz}^1 , τ_{zr}^1 , соответствующие решению $\lambda\Phi_1$, при $z=0$. Дифференцируя (11.3) и пользуясь соотношением

$$\zeta I_p'(\zeta) = pI_p(\zeta) + \zeta I_{p+1}(\zeta)$$

находим

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^1 &= \left[-\frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right]_{z=0} = 0 \\ \tau_{zr}^1 &= \left[\frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right]_{z=0} = \lambda \frac{Mz}{2\pi b^2} \frac{r^{\alpha/2-3}}{\sqrt{\pi z}} \left\{ (\alpha-1) \int_0^\infty \frac{I_{\alpha/2}(sr/\sqrt{v})}{I_{\alpha/2}(s/\sqrt{v})} \exp\frac{-s^2}{4z} ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{\sqrt{v}} \int_0^\infty \frac{I_{\alpha/2+1}(sr/\sqrt{v})}{I_{\alpha/2}(s/\sqrt{v})} s \exp\frac{-s^2}{4z} ds \right\} \quad (11.4) \end{aligned}$$

На дне мелкой выточки $r=1-\lambda$; при этом с точностью до величины порядка λ по сравнению с единицей первый интеграл равен $\sqrt{\pi z}$. Во втором интеграле отношение бесселевых функций положительно и монотонно возрастает, приближаясь к единице; при $s/\sqrt{v} > N$, где N — достаточно большое число, это отношение можно принимать равным единице. Пусть $\frac{1}{2}\lambda\rho N^2 \ll 1$; тогда второй интеграл равен $2z = 1/\lambda\rho$ с точностью до величины порядка $\frac{1}{2}\lambda\rho N^2$ по сравнению

с единицей. Прибавляя теперь к (11.4) нулевое приближение (4.1) при $r = 1 - \lambda$, находим

$$\tau_{zz} = \frac{M\lambda}{2\pi b^3} \left(1 + 0.8 \sqrt{\frac{\lambda}{\rho\nu}} + 2\lambda \right) \quad (11.5)$$

Последним слагаемым в этой формуле обычно можно пренебречь. Из (11.5) вытекает, что коэффициент концентрации для пластического материала падает по сравнению с упругим, так как $\nu \geq 1$ (для упругого материала $\nu = 1$, $\alpha = 4$). Нейбер для случая мелкой выточки эллиптического профиля в упругом стержне рекомендует формулу [5]

$$\tau_{zz} = \frac{2M}{\pi b^3} \left(1 + \sqrt{\frac{\lambda}{\rho}} \right) \quad (11.6)$$

12. Кручение полого стержня. Кручение круглого полого стержня, по форме не сильно отличающегося от полого цилиндра, рассматривается аналогично сплошному стержню. Пусть наружная поверхность стержня задана уравнением (3.1), а внутренняя уравнением

$$r = \xi + \lambda \varphi(z), \quad |\varphi(z)| \leq 1 \quad (12.1)$$

где число $0 < \xi < 1$. Граничное условие (6.2) на наружной поверхности сохраняется; условие на внутренней поверхности приводит к уравнениям, заменяющим (7.1):

$$\Phi_0(\xi) = -\frac{M}{2\pi b^3}, \quad \Phi_n(\xi, z) = -\sum_{k=1}^n \frac{[\varphi(z)]^k}{k!} \Phi_{n-k}^{(k)}(\xi, z) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (12.2)$$

Нетрудно найти, что

$$\Phi_0 = -\frac{M}{2\pi b^3} \frac{1-r^2}{1-\xi^2} \quad (12.3)$$

Решение в полиномах строится подобно изложенному выше; решение в рядах Фурье имеет вид:

$$\begin{aligned} \Phi_{n0} = & A_{0n} r^n + \sum_{m=1}^{\infty} r^{n+2} I_{n+2} \left(\frac{m\pi}{l\sqrt{\nu}} r \right) \left(A_{mn} \cos \frac{m\pi z}{l} + B_{mn} \sin \frac{m\pi z}{l} \right) + \\ & + a_{0n} + \sum_{m=1}^{\infty} r^{n+2} K_{n+2} \left(\frac{m\pi}{l\sqrt{\nu}} r \right) \left(a_{mn} \cos \frac{m\pi z}{l} + b_{mn} \sin \frac{m\pi z}{l} \right) \quad (12.4) \end{aligned}$$

где A_{in} , B_{in} , a_{in} , b_{in} — произвольные постоянные, определяемые из условий при $r=1$, $r=\xi$, а $K_{n+2}(\dots)$ — функция Макдональда порядка $\frac{1}{2}n$. Аналогично строится также и решение в интегралах Фурье.

Поступила в редакцию
12 IV 1948

Ленинградский государственный
университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. АН СССР. 1946.
2. Качанов Л. М. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 3.
3. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз. 1939.
4. Фенцль А. Силы и деформация. ОНТИ. 1936. Т. II.
5. Нейбер Г. Концентрация напряжений. Гостехиздат. 1947. Стр. 157.