

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ПЛОСКИХ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН

Х. А. Рахматулин, Г. С. Шапиро

(Москва)

В работе рассматривается распространение продольных упруго-пластических волн в полубесконечном стержне в предположении, что давление на конце стержня в течение некоторого времени остается постоянным (этот случай исключался в предыдущих работах [1, 2] обоих соавторов). Ниже рассматриваются два случая: 1) давление, достигнув максимального значения, остается постоянным, а затем постепенно убывает до нуля и 2) давление, мгновенно достигнув максимального значения, остается постоянным, а затем сразу падает до нуля. Предполагается, что материал стержня обладает линейным упрочнением.

Решение первой задачи получается методом характеристик [2] и оказывается представимым в конечном виде; решение приводится к смешанной задаче теории гиперболических уравнений (метод остается применимым и для случая нелинейного упрочнения, однако при этом решение не может быть представлено в конечном виде). Вторая задача¹ решается непосредственным применением закона количества движения

§ 1. Давление при разгрузке стержня меняется непрерывно. Напомним [1, 2], что в области нагрузки имеют место уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1)$$

а в области разгрузки уравнения

$$\frac{\partial v_*}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial \varepsilon_*}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varepsilon_*}{\partial t} = \frac{\partial v_*}{\partial x} \quad (1.2)$$

Здесь

$$\varepsilon_* = \varepsilon - \varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{E}, \quad v_* = v$$

и индексом 0 отмечены величины, относящиеся к волне разгрузки, а v и ε — соответственно скорости и деформации частиц стержня, a — скорость звука

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}}$$

В случае линейного упрочнения волна разгрузки изображается

¹ Попытка решения этой задачи для случая нелинейного упрочнения материала была сделана Уайтом и Гриффисом [3].

на плоскости $\xi_* \eta_*$ характеристик $\xi_* = v_* - a_0 \varepsilon_*$, $\eta_* = v_* + a_0 \varepsilon_*$ в виде отрезков прямых [2]

$$\eta_{*0} = \frac{1-\mu}{1+\mu} (\xi_{*0} + 2a_0 \varepsilon_s) \quad \text{при } \varepsilon_0 > \varepsilon_s \quad (1.3)$$

$$\eta_{*0} = 0 \quad \text{при } \varepsilon_0 < \varepsilon_s \quad (1.4)$$

Так как волна разгрузки пересекает волны Римана, то между x и t на прямой (1.3) имеет место зависимость

$$x = a_1 [t - t_0(\varepsilon)] \quad (1.5)$$

Пусть зависимость

$$\varepsilon_{*a}(t) = \frac{\sigma_a(t)}{E}$$

на конце стержня имеет вид, [показанный на фиг. 1:

в точке α

$$\varepsilon_{*a} = \varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E}$$

в интервале $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\varepsilon_{*a} = \varepsilon_{*a \max} = \text{const}$$

В плоскости xt находим точку пересечения характеристик положительного направления

$$t - t_1 = \frac{x}{a_1}, \quad t - t_2 = \frac{x}{a_0} \quad (1.6)$$

из которых первая исходит из точки M_1 , а вторая из точки M_2 (отвечающей началу разгрузки). Точка их пересечения M_3 будет

$$x_3 = \frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1} (t_1 - t_2), \quad t_3 = \frac{a_0 t_2 - a_1 t_1}{a_0 - a_1} \quad (1.7)$$

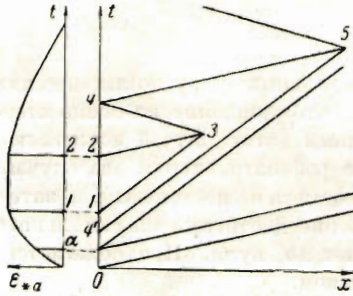
В треугольнике $M_1 M_2 M_3$ скорости и деформации постоянны, поэтому в плоскости $\xi_* \eta_*$ этому треугольнику отвечает точка m_{123} (фиг. 2).

В плоскости xt определяем точку пересечения M_4 характеристики отрицательного направления, проходящей через точку M_3 , с осью $x = 0$. Получим

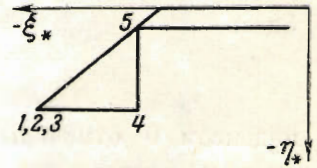
$$t_4 = t_3 + \frac{x_3}{a_0} \quad (1.8)$$

В треугольнике $M_2 M_3 M_4$ имеем прямую волну (или волну одного направления). Следовательно [2], в плоскости $\xi_* \eta_*$ этому треугольнику должен отвечать отрезок характеристики $\eta_* = \text{const}$. Проводим через точку m_{123} характеристику $\eta_* = \text{const}$ до пересечения с прямой

$$\varepsilon_{*a}(t_4) = \frac{\eta_* - \xi_*}{2a_0} \quad (1.9)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Таким образом определяется точка m_4 . Из точки m_4 проводим характеристику $\xi = \text{const}$ до пересечения с прямой, отвечающей волне разгрузки в точке m_5 . В точке m_5 известны ξ_* и η_* , следовательно, на волне разгрузки определяется значение $\varepsilon_{*0} = (\xi_* - \eta_*) / 2a_0$. Так как волна разгрузки пересекает волны Римана, то, обращая функцию $\varepsilon_{*0}(t)$, можно определить точку M_4 (фиг. 1). Точка M_5 , принадлежащая волне разгрузки, определится как пересечение характеристик положительного направления, исходящих из точек M_4' и M_4 . Дальнейшие построения очевидны [2].

Заметим, что решение приведено к смешанной задаче теории гиперболических уравнений. Действительно, в плоскости $\xi_*\eta_*$ вдоль характеристики $m_{123}m_4$ заданы x и t , а вдоль прямой $m_{123}m_5$ между x и t задана зависимость (1.5). Очевидно, что деформации и скорости при любых x и t могут быть найдены в конечном виде.

Если участок 1—2 постоянной деформации кривой $\varepsilon_{*a}(t)$ отсутствует, то треугольники $M_1M_2M_3$ и $M_2M_3M_4$ (фиг. 1) вырождаются в точку. То же имеет место и в отношении треугольника $m_{123}m_4m_5$. В этом случае приходим к особой задаче теории гиперболических уравнений, рассмотренной в работе [2].

Особенно простым получается решение, когда характеристика m_4m_5 пересекает не наклонную прямую, отвечающую волне разгрузки, а отрезок характеристики $\eta_* = 0$.

Предположим сначала, что характеристика m_4m_5 пересекает ось $\eta_* = 0$ в точке $\xi_* = -2a_0\varepsilon_s$.

Тогда координаты точки m_4 согласно формуле (4.17) работы [2] будут

$$\xi_* = -2a_0\varepsilon_s, \quad \eta_* = -a_0 \frac{1-\mu}{\mu} (\varepsilon_{a\max} - \varepsilon_s)$$

Деформация в точке $(0, t_4)$

$$\varepsilon_{*a}(t_4) = \frac{\eta_* - \xi_*}{2a_0} = \frac{1}{2\mu} [(1 + \mu)\varepsilon_s - (1 - \mu)\varepsilon_{0\max}] \quad (4.10)$$

Длина участка, на котором имеют место остаточные деформации, будет¹

$$l_1 = \frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1} (t_4 - t_a) \quad (4.11)$$

Если для характеристики m_4m_5 имеет место условие $\xi_* > -2a_0\varepsilon_s$, то должно быть

$$\varepsilon_{*a}(t_4) > \frac{1}{2\mu} [1 + \mu)\varepsilon_s - (1 - \mu)\varepsilon_{0\max}] \quad (4.12)$$

и для определения длины участка пластических деформаций вместо (4.11) следует пользоваться формулой¹

$$l_1 = \frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1} (t^* - t_a) \quad (4.13)$$

¹ Если неравенство (4.12) не имеет места, то формулы (4.11), (4.13) могут быть использованы для приближенного решения задачи. Применение их к числовым примерам, рассмотренным в [2], показало, что отклонение от уточненного решения не превышает 7%.

где t^* находится путем обращения функции $\varepsilon_{*a}(t)$, определяемой согласно (1.40) Длина участка с постоянной остаточной деформацией во всех случаях будет [3]

$$l = (t_2 - t_1) \frac{a_0 a_1}{a_0 - a_1} \quad (1.14)$$

На фиг. 1 давление постепенно достигает максимального значения.

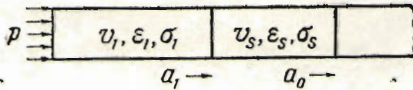
Если давление достигает максимального значения мгновенно, то изложенный метод остается применимым [2]. Следует лишь учесть, что волна разгрузки будет иметь вид [1] прямой $x = a_1 t$.

В случае нелинейного упрочнения метод остается применимым [2], однако при этом решение не может быть представлено в конечном виде.

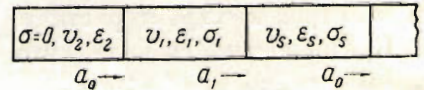
§ 2. Давление мгновенно возрастает, остается постоянным и мгновенно падает до нуля. Пользуясь уравнениями совместности на фронтах волн, распространяющихся со скоростями a_0 и a_1 , и граничным условием на торце стержня, можно установить, что во время τ , действия давления, в стержне будут существовать области:

1) с напряжением σ_s , с деформацией ε_s и со скоростью частиц, равной $v_s = a_0 \varepsilon_s$,

2) с напряжением $\sigma_1 = p$, деформацией $\varepsilon_1 = (\sigma_1 - \sigma_s) / E'$ и со скоростью частиц $v_1 = v_s + a_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_s)$ (фиг. 3).



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Пусть давление p , действующее на торец стержня, мгновенно исчезает в момент τ . Тогда получим картину, изображенную на фиг. 4.

Так как в области, прилегающей к торцу стержня, произошла разгрузка, то в ней напряжение $\sigma = 0$; следовательно,

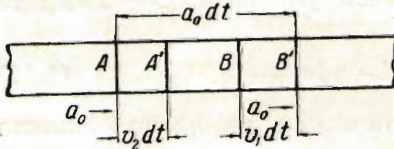
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - \frac{\sigma}{E} \quad \text{или} \quad \varepsilon_2 = (1 - \nu^2) (\varepsilon_1 - \varepsilon_s) \quad \left(\nu^2 = \frac{E'}{E} \right)$$

Рассмотрим картину движения на фронте вновь возникшей волны (фиг. 5). За время dt частица AB займет положение $A'B'$. По теореме количества движения имеем

$$(a_0 - v_1) \rho (v_1 - v_2) = \sigma_1$$

Откуда, пренебрегая v_1 по сравнению с a_0 , получаем

$$v_2 = v_1 - \frac{\sigma_1}{a_0 \rho} = v_1 - \left[a_0 \varepsilon_s + \frac{a_1^2}{a_0} (\varepsilon_1 - \varepsilon_s) \right]$$



Фиг. 5.

Подставляя значение скорости $v_1 = v_s + a_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_s)$, получим

$$v_2 = a_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_s) \left(1 - \frac{a_1}{a_0} \right) = (1 - \nu) a_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_s) \quad (2.1)$$

Как видим, остаточная скорость в разгруженной области положительна, причем может быть

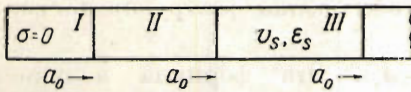
$$v_2 < v_s, \quad v_2 = v_s, \quad v_2 > v_s \quad (2.2)$$

В случае $v_2 < v_s$, а также $v_2 = v_s$ после встречи волны разгрузки с упругой волной интенсивность последней уменьшится. Следовательно, скорость заново возникших волн будет равна a_0 . Очевидно, после отражения от свободного конца стержня волны, двигавшейся влево, мы будем иметь три фронта волн, движущихся с одинаковой скоростью a_0 (фиг. 6). Длины областей II и III будут постоянными.

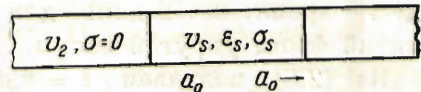
Остаточные деформации будут при этом постоянны, а длина l участка пластических деформаций равна [3]

$$l = \frac{a_0 a_1 \tau}{a_0 - a_1}$$

В случае $v_2 > v_s$ после встречи волны разгрузки с упругой волной картина движения осложняется.



Фиг. 6.

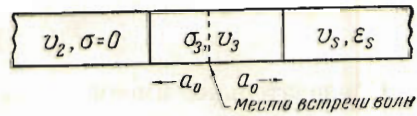


Фиг. 7.

В момент встречи волн картина движения имеет вид представленный на фиг. 7.

Найдем условие, когда и для случая $v_2 > v_s$, появившиеся волны окажутся упругими (фиг. 8).

Уравнения количества движения для фронтов волн имеют вид:



Фиг. 8.

$$a_0 \rho (v_2 - v_s) = \sigma_s, \quad a_0 \rho (v_s - v_s) = \sigma_s - \sigma_s \quad (2.3)$$

Отсюда

$$a_0 \rho (v_s + v_2 - 2v_s) = \sigma_s, \quad \text{или} \quad v_s = \frac{v_2}{2} \quad (2.4)$$

Из этих уравнений видно, что $\sigma_s = \sigma_s$ при $v_s = v_s = \frac{1}{2} v_2$, т. е. после удара, упругая волна не меняет своей интенсивности и отраженная налево волна будет иметь напряжение сжатия, равное σ_s . Следовательно, при $v_2 > 2v_s$ идущая направо волна не может быть упругой.

Подсчитаем то значение первоначальной нагрузки, которое соответствует $v_2 = 2v_s$. Подставляя $v_2 = 2v_s$ в (2.1), получим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_k = \varepsilon_s \left(1 + \frac{2}{\mu(1-\mu)} \right) \quad (2.5)$$

Таким образом, если $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_k$, то картина движения будет иметь вид, указанный на фиг. 6.

При $\varepsilon_1 > \varepsilon_k (v_2 > 2v_s)$ после встречи волны разгрузки с упругой волной появляется пластическая волна, идущая вправо. Докажем, что идущая влево отраженная волна не может быть пластической.

В этом случае уравнения (2.3) заменяется уравнениями

$$a_0 \rho (v_2 - v_s) = \sigma_s, \quad a_1 \rho (v_s - v_3) = \sigma_s - \sigma_3 \quad (2.6)$$

При $\sigma_s = \sigma_s'$, где σ_s' — новый предел упругости материала, обе волны будут пластическими, если $\sigma_s' \geq \sigma_2$.

Из (2.6), учитывая (2.4), получаем

$$\sigma_s = \frac{\sigma_1 - \mu \sigma_2}{1 + \mu} \quad (2.7)$$

Отсюда видим, что $\sigma_s < \sigma_1$, т. е. отраженная волна, идущая влево, всегда будет упругой.

Подсчитаем теперь длину пластического участка. Сначала рассмотрим случай $\varepsilon_1 < \varepsilon_k$. Обозначая через l указанную длину, имеем

$$a_1 \tau + a_1 t = l, \quad a_0 t = l \quad (2.8)$$

где t — время, необходимое для того, чтобы волна разгрузки догнала задний фронт упругой волны.

Из (2.8) получаем $l = a_0 a_1 \tau / (a_0 - a_1)$. Эта формула получена в работе [3].

Рассмотрим теперь случай $\varepsilon_1 > \varepsilon_k$.

Очевидно, в момент достижения отраженной волной свободного конца стержня фронт пластической волны будет на расстоянии

$$l \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \right)$$

Следовательно, имеем

$$l \left(1 + \frac{a_1}{a_0} \right) + a_1 t = l_1, \quad a_0 t = l_1$$

где l_1 — искомая длина пластического участка. Отсюда, исключая t и подставляя $l = a_0 a_1 \tau / (a_0 - a_1)$, получим

$$l_1 = \frac{a_0 + a_1}{a_0 - a_1} l = \frac{a_0 a_1 \tau (a_0 + a_1)}{(a_0 - a_1)^2} = \frac{\mu (1 + \mu)}{(1 - \mu)^2} a_0 \tau \quad (2.9)$$

Заметим, что при этом получаются два участка постоянных остаточных деформаций l и $l_1 - l$.

Поступила в редакцию
27 IV 1948

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматуллин Х. А. ПММ. 1945. Т. IX. № 1.
2. Шапиро Г. С. ПММ. 1946. Т. X. № 5—6.
3. White M. P. and Le van Griffis. Journ. of Appl. Mech. 1947. Vol. 14. No. 4.