Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

К ТЕОРИИ ИЗОДРОМНОГО РЕГУЛЯТОРА

А. М. Летов
(Москва)

§ 1. Б. В. Булгаковым [1] рассмотрена важная задача теории автоматического регулирования, описываемая уравнениями:

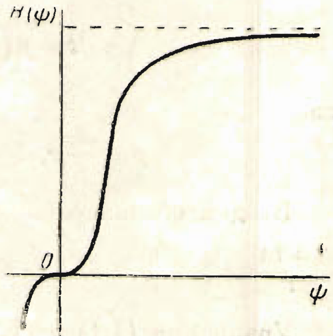
регулируемый объект

$$T^2\ddot{\varphi} = -U\dot{\varphi} - k\varphi - \mu + \chi \qquad (1.1)$$

сервомотор

$$V^2\ddot{\mu} = -W\dot{\mu} + H(\psi) \qquad (1.2)$$

$$\psi = l\varphi + X\dot{\varphi} + Y^2\ddot{\varphi} - \frac{1}{m}\mu \qquad (1.3)$$



Фиг. 1.

Здесь φ — отклонение объекта регулирования от желаемого состояния, μ — координата органа управления, движимого сервомотором, χ — внешнее возмущение, T^2, U, k — постоянные объекта регулирования, l, X, Y^2, W, V^2, m — постоянные регулятора, ψ — функция управления, $H(\psi)$ — симметричная характеристика сервомотора, представленная на фиг. 1.

В своем решении Б. В. Булгаков строит граничные линии, отделяющие область допустимых значений параметров системы, обеспечивающих сходимость процесса регулирования.

В настоящей работе рассматривается задача для того же объекта регулирования, но управляемого изодромным регулятором [2], т. е. регулятором, функция управления которого имеет вид [1]

$$\psi = l\varphi + X\dot{\varphi} + \frac{1}{N}\int_0^t \varphi\, dt - \frac{1}{m}\mu \qquad (1.4)$$

где $1/N$ — коэффициент изодромности.

[1] Регулятор с функцией управления (1.4) не подходит под принятое определение изодромного регулятора. Однако следует иметь в виду, что регуляторы этого типа еще не имеют установившегося определения по принятой классификации. Несколько условное применение термина «изодромный регулятор» оправдывается тем, что как изодромный регулятор в классическом смысле, так и данный регулятор производят в системе регулирования одинаковый эффект при действии на нее постоянной возмущающей силы.

В обоих случаях изодромный регулятор имеет своей задачей устранить возможное смещение положения равновесия системы регулирования при действии постоянной возмущающей силы. В этом смысле данным термином пользуется также Оппельт [2].

Такие регуляторы употребляются в случаях, когда объект регулирования подвергается действию возмущения $\chi = \text{const}$. Его изодромное действие сводится к следующему: при $1/N = 0$ система приобретает нежелательное постоянное смещение

$$\varphi^* = \frac{\chi}{k + lm}, \qquad \mu^* = \frac{lm\chi}{k + lm} \tag{1.5}$$

При $1/N \neq 0$ смещение φ^* полностью устраняется за счет дополнительного отклонения органа управления, равного $\mu^* = \chi$.

В дальнейшем рассматривается случай самотормозящегося сервомотора, независимого от нагрузки, для которого можно положить $V = 0$.

Введем новые переменные x, y, τ по формулам

$$\int_0^t \varphi\, dt = p\left(x + \frac{\chi N}{pm}\right), \qquad \psi = qy, \qquad t = r\tau \tag{1.6}$$

где

$$p = \frac{m\varepsilon}{s} r, \qquad q = \varepsilon, \qquad r = \frac{T}{s}, \qquad s^2 = k + lm \tag{1.7}$$

Введем обозначения

$$\frac{U + lX}{sT} = \beta, \quad \frac{U}{T} = M, \quad \frac{k}{s^2} = \alpha, \quad \frac{mT}{s^{3/2}} = \rho, \quad \frac{r}{mW} H(\psi) = f(\varepsilon y), \quad \frac{d}{d\tau} = D \tag{1.8}$$

Уравнения (1.1) и (1.2) примут вид

$$\begin{gathered} (D^3 + \beta D^2 + D + \rho)\, x - y = 0 \\ [(\beta - M) D^3 - (1 - \alpha) D^2 + \rho D]\, x - Dy = \frac{1}{\varepsilon} f(\varepsilon y) \end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь безразмерные величины: α — коэффициент собственной статической устойчивости системы регулирования, β — коэффициент полного демпфирования, M — коэффициент естественного демпфирования, ρ — коэффициент изодромности, ε остается пока произвольным.

В новых переменных положение равновесия системы определяется частным решением $x^* = 0$, $y^* = 0$ уравнений (1.9); требуется определить все значения параметров системы α, β, M, ρ, при которых процесс регулирования сходится к положению равновесия $x^* = 0$, $y^* = 0$.

§ 2. Для решения задачи будем пользоваться методом Б. В. Булгакова [3]. Из (1.9) образуем видоизмененную систему с параметром ε:

$$\begin{gathered} (D^3 + \beta D^2 + D + \rho)\, x - y = 0 \\ [(\beta - M) D^3 + (1 - \alpha) D^2 + \rho D]\, x - (D + h)\, y = \frac{1}{\varepsilon} [f(\varepsilon y) - h\varepsilon y] \end{gathered} \tag{2.1}$$

Постоянная h линейного приближения $h\varepsilon y$ функции $f(\varepsilon y)$ определяется в связи с необходимостью построить и изучить периодические решения уравнений (2.1), которые могут при определенных условиях возникать в окрестности частного решения $x^* = 0$, $y^* = 0$. Что касается параметра ε, то после выделения в функции $f(\varepsilon y)$ линейной части он может быть выведен множителем ε^2 в разности $f(\varepsilon y) - h\varepsilon y$ и принят за «малый параметр», каким пользуются в методе Пуанкаре.

При $\varepsilon = 0$ получаем уравнения

$$\begin{gathered}(D^3 + \beta D^2 + D + \rho)\, x - y = 0 \\ [(\beta - M)\, D^3 + (1 - \alpha)\, D^2 + \rho D]\, x - (D + h)\, y = 0\end{gathered} \tag{2.2}$$

образующие линеаризованную систему. Для нее положение равновесия также определяется частным решением $x^* = 0$, $y^* = 0$.

Характеристическое уравнение этой системы есть

$$D^4 + (M + h)\, D^3 + (\alpha + \beta h)\, D^2 + hD + \rho h = 0 \tag{2.3}$$

Можно ожидать неустойчивости положения равновесия системы в том случае, когда в окрестности решения $x^* = 0$, $y^* = 0$ появляется периодическое решение. Но последнее будет иметь место тогда, когда уравнение (2.3) имеет пару чисто мнимых корней, т. е. когда дискриминант Рауса обращается в нуль. Последнее условие имеет вид

$$(\beta - \rho)\, h^2 + (\alpha + \beta M - 1 - 2\rho M)\, h + M\,(\alpha - \rho M) = 0 \tag{2.4}$$

Если постоянная h действительно такова, что условие (2.4) выполняется, уравнения (2.2) будут иметь периодическое решение

$$x = AB \cos(\omega\tau + \delta + \varkappa), \qquad y = A \cos(\omega\tau + \delta) \tag{2.5}$$

где A и $\varkappa$ — произвольные постоянные и

$$\omega^2 = \frac{h}{M + h}, \qquad B = \frac{1}{\sqrt{(\rho - \omega^2)^2 + \omega^2(\omega^2 - 1)^2}}, \qquad \operatorname{tg} \delta = \frac{\omega(\omega^2 - 1)}{\rho - \omega^2} \tag{2.6}$$

Произвольную постоянную $\varkappa$, не нарушая общности, можно считать равной нулю. Периодическое решение нелинейных уравнений можно построить в виде ряда по ε, сходимость которого при достаточно малом ε обеспечивается теоремами Пуанкаре и Макмиллана [3].

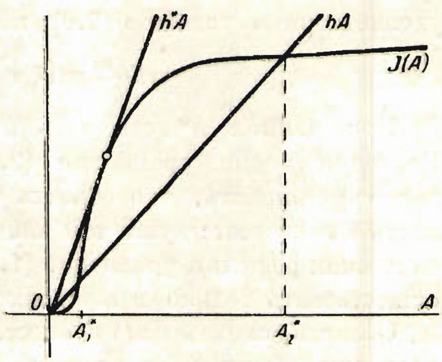
Однако для нашей цели достаточно лишь выяснить условие существования решения; этот факт устанавливается только по существованию его первого приближения. Последнее совпадает с решением (2.5), если величину A рассматривать как корень уравнения

$$hA = J(A) \tag{2.7}$$

Функция (2.8)

$$J(A) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(A \cos u)\, du \qquad (u = \omega\tau)$$

обладает свойством повторять в графическом представлении вид подинтегральной функции [3].



Фиг. 2.

Уравнение (2.7) обычно решают графически; «порождающие амплитуды» определяются как абсциссы пересечения кривой $J(A)$ с лучом hA (фиг. 2).

Но решение уравнения (2.7) и, следовательно, существование периодического решения возможно только тогда, когда постоянная h, удовлетворяя условию (2.4), заключается в интервале $0 < h < h^*$, где h^* — предельное значение углового коэффициента луча hA, при котором имеет место его касание кривой (2.8).

Это условие необходимо и достаточно для существования периодического решения.

§ 3. Для построения граничных линий нужно определить значения параметров α, β, M, ρ, при которых h удовлетворяет условию (2.4) и условию $0 < h < h^*$. Построение будем вести в координатах

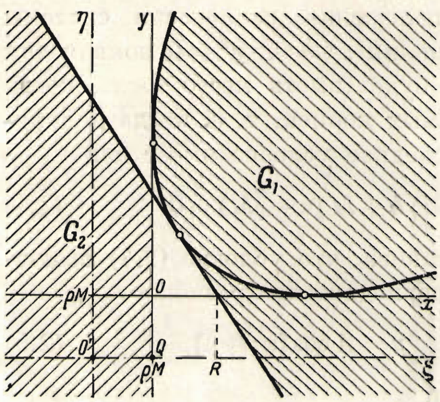
$$x = \alpha - \rho M, \quad y = (\beta - \rho) M \qquad (3.1)$$

Считая их данными, h можно рассматривать как корень уравнения (2.4), т. е. уравнения

$$\frac{1}{M} y h^2 + (x + y - 1) h + Mx = 0 \qquad (3.2)$$

Тогда первой граничной линией, отделяющей область действительных h, будет парабола (фиг. 3)

$$(x + y - 1)^2 - 4xy = 0 \qquad (3.3)$$



Фиг. 3.

Эта парабола построена Б. В. Булгаковым в координатах $\xi = \alpha$, $\eta = \beta M$. При $\rho = 0$, т. е. когда нет изодромности в функции управления, приведенное построение в точности совпадает с построением Б. В. Булгакова.

При $\rho > 0$ граничная кривая сдвигается по отношению к координатам ξ, η на величину ρM в глубину первого квадранта.

Оказывается, что внутренность параболы соответствует только комплексным значениям h, при которых периодических решений не существует. Чтобы отделить среди действительных значений h те, которые удовлетворяют условию (2.9), построим линию

$$\frac{1}{M} y h^{*2} + (x + y - 1) h^* + Mx = 0 \qquad (3.4)$$

При данном h^* это есть прямая, касающаяся параболы (3.3). Исследуя корни уравнения (2.4) как непрерывные функции x, y, легко установить, что область G_1, примыкающая к параболе, и область G_2 соответствуют тем значениям α, ρ, M, β, при которых периодических решений уравнений (1.9) не существует. Эти решения могут существовать только в нештрихованной части плоскости.

Область сходимости процесса регулирования можно определить исследуя обычные неравенства Гурвитца для линеаризованной системы (2.2). Исследование показывает, что таковой является область G_1. В области G_2 процесс регулирования расходится. В нештрихованной области могут наблюдаться автоколебания различных амплитуд.

§ 4. Чтобы оценить влияние коэффициента изодромности, следует сравнить приведенное решение с решением Б. В. Булгакова [1].

Оказывается, для систем регулирования, обладающих малой собственной статичностью $\alpha < \rho M$, невозможно добиться сходимости процесса регулирования ни при каком значении постоянных естественного и искусственного демпфирования.

Следовательно, должно требовать выполнения необходимого условия

$$\alpha > \rho M \tag{4.1}$$

Для систем регулирования, для которых $O'Q < \alpha < O'R$, при изодромном регулировании коэффициент искусственного демпфирования в произведении βM должен быть больше своего обычного значения на величину, пропорциональную ρM:

$$\beta > \rho \tag{4.2}$$

Как видно из условий (4.1) и (4.2), придание обычному регулятору ($\rho = 0$) изодромного свойства ($\rho \neq 0$), чтобы компенсировать действие постоянного возмущения, предъявляет существенно повышенные требования как к собственной статической устойчивости системы, так и к постоянной искусственного демпфирования.

§ 5. Можно провести строгое исследование данного решения методом А. И. Лурье [4] с целью выяснить, не являются ли условия (4.1) и (4.2) завышенными. Для этого введем обозначения

$$\varphi - \varphi^* = \eta_1, \quad \dot{\varphi} = \eta_2, \quad \frac{1}{lN}\int_0^t \varphi\, dt = \eta_3 \quad \mu - \mu^* = m\xi, \quad \frac{1}{W} H(\sigma) = f(\sigma) \tag{5.1}$$

$$\psi = \sigma, \quad b_{21} = \frac{k}{T^2} > 0, \quad b_{22} = \frac{U}{T^2} > 0, \quad \frac{1}{T^2} = n_2 > 0, \quad b_{31} = \frac{1}{lN} > 0$$

Исходные уравнения представим в нормальной форме Коши

$$\begin{gathered} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = -b_{21}\eta_1 - b_{22}\eta_2 - mn_2\xi, \quad \dot{\eta}_3 = b_{31}\eta_1 \\ \dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = l\eta_1 + E\eta_2 + l\eta_3 - \xi \end{gathered} \tag{5.2}$$

Введем канонические переменные

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \frac{b_{21}}{ln_2}\eta_1 + \frac{\rho_2}{ln_2}\eta_2 + \xi, \quad x_3 = \frac{b_{21}}{ln_2}\eta_1 + \frac{\rho_3}{ln_2}\eta_2 + \xi \tag{5.3}$$

где ρ_2, ρ_3 — либо комплексные сопряженные, либо действительные и положительные корни уравнения $\rho^2 - b_{22}\rho_2 + b_{21} = 0$.

В новых переменных уравнения (5.2) имеют вид

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = f(\sigma), \quad \dot{x}_2 = -\rho_2 x_2 + f(\sigma), \quad \dot{x}_3 = -\rho_3 x_3 + f(\sigma) \\ \dot{\sigma} = -\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 - f(\sigma) \end{gathered} \tag{5.4}$$

где

$$\begin{gathered} \beta_1 = \frac{ab_{31}ln_2}{b_{21}}, \quad \beta_2 = \frac{ln_2}{\rho_3 - \rho_2}\left[-a - (\rho_3 - b_{22})E + \frac{a\rho_3 b_{31}}{b_{21}}\right] \\ \beta_3 = \frac{ln_2}{\rho_3 - \rho_3}\left[a + (\rho_2 - b_{22})E - \frac{a\rho_2 b_{31}}{b_{21}}\right] \end{gathered} \tag{5.5}$$

Исследуем устойчивость частного решения $x_1^* = x_2^* = x_3^* = \sigma^* = 0$.

Рассмотрим функцию

$$V = \frac{\beta_1 x_1^2}{2} + \frac{1}{2}(A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2) + C_1 x_2 x_3 + \frac{a_2^2 x_2^2}{2\rho_2} + \frac{a_3^2 x_3^2}{2\rho_3} + \frac{2a_2 a_3 x_2 x_3}{\rho_2 + \rho_3} + \int_0^\sigma f(\sigma)\, d\sigma$$

где a_2, a_3, A_2, A_3, C_1 — действительные, причем $A_2 > 0$, $A_3 > 0$, $C_1 = 0$, когда ρ_2, ρ_3 — действительные; $A_2 = A_3 = 0$, $C_1 > 0$ и a_2, a_3 — комплексные сопряженные, когда ρ_2, ρ_3 — комплексные сопряженные числа.

Согласно теореме А. И. Лурье[4] V есть знакоопределенная положительная функция. Ее производная согласно уравнениям (5.4) есть

$$\frac{dV}{dt} = -A_2\rho_2 x_2^2 - A_3\rho_3 x_3^2 - C_1\rho_2\rho_3 x_2 x_3 - [a_2 x_2 + a_3 x_3 + f(\sigma)]^2 + \Big[A_2 + C_1 + \frac{a_2^2}{\rho_2} + 2a_2 + \frac{2a_2 a_3}{\rho_2+\rho_3} + \beta_2\Big] x_2 f(\sigma) + \Big[A_3 + C_1 + \frac{a_3^2}{\rho_3} + 2a_3 + \frac{2a_2 a_3}{\rho_2+\rho_3} + \beta_3\Big] x_3 f(\sigma)$$

Она, наверное, будет знакоопределенной отрицательной, если действительные числа a_2, a_3 определены как корни уравнений

$$A_2 + C_1 + \frac{a_2^2}{\rho_2} + 2a_2 + \frac{2a_2 a_3}{\rho_2 + \rho_3} + \beta_2 = 0, \qquad A_3 + C_1 + \frac{a_3^2}{\rho_3} + 2a_3 + \frac{2a_2 a_3}{\rho_2 + \rho_3} + \beta_3 = 0$$

Допустим, что ρ_2, ρ_3 — действительные. Необходимое и достаточное условие разрешимости этих уравнений в действительных a_2, a_3 есть

$$\Gamma^2 = 1 - \frac{\beta_2}{\rho_2} - \frac{\beta_3}{\rho_3} < 0, \qquad Д^2 = \rho_2^2 + \rho_3^2 - \beta_2\rho_2 - \beta_3\rho_3 \pm 2\rho_2\rho_3\Gamma > 0$$

С помощью равенств (5.1), (5.5) этим условиям можно придать вид

$$\frac{k}{k+lm} > \frac{mU}{N(k+lm)^2}, \quad \left[\frac{U(U+mE)}{T^2(k+lm)} - \frac{k}{k+lm} - 1\right] > 4\left[\frac{k}{k+lm} - \frac{mU}{N(k+lm)^2}\right]$$

или, пользуясь обозначениями (1.8), будем иметь

$$\alpha > \rho M, \qquad (\beta M - \alpha - 1)^2 > 4(\alpha - \rho M)$$

Первое неравенство и есть полученное выше необходимое условие устойчивости (4.1).

Чтобы получить кривую (3.3), достаточно в левую часть последнего неравенства добавить $\pm \rho M$ и провести очевидные преобразования.

Из рассуждений видно, что внутренность параболы (3.3) есть область устойчивости в большом. Последнее подтверждает условие (4.2).

Поступила в редакцию
23 II 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 3. Стр. 313—332.
2. Fischel E. Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung. 1938. Ergänzungsband.
3. Булгаков Б. В. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 4. Стр. 263—275.
4. Лурье А. И. ПММ. 1945. Т. IX. Стр. 353.