Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. И. Лурье

(Ленинград)

1. В работе[1] рассматривается задача о построении в замкнутом виде периодического решения системы линейных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{s=1}^{n} a_{ks}x_s+f_k(t) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1.1}$$

в которой a_{ks} — постоянные, $f_k(t)$ — периодические функции периода T. Разыскивается решение этой системы, имеющее этот же период T.

Для одного дифференциального уравнения первого порядка решение задачи приведено в *Общей задаче об устойчивости движения*[1] (стр. 187). Для уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=f(t)$$

решение дано в монографии Дуффинга [2]; более простое решение приведене в курсе механики [3]; этот вопрос подробно рассмотрен с большим числом приложений в работе А. Н. Обморшева [4].

Общий случай (1.1), повидимому, не был рассмотрен; например, его нет в очень подробной монографии Гарднера [5]. Однако эффективное решение этой задачи, весьма несложной по математическому содержанию, имеет значение для приложений.

Решение получается сразу из таких соображений: зная общее решение (1.1), удовлетворяющее начальным условиям $x_k(0)=x_k^\circ$, можем найти значения искомых функций $x_k(t)$ при $t=T$; требуемое решение для $0\leqslant t\leqslant T$ найдем, определив постоянные x_k° из условий

$$x_k^\circ=x_k(T) \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{1.2}$$

---

[1] Эта статья была уже сдана в редакцию, когда автору стало известно, что вопрос, в ней рассмотренный, трактовался в электротехнической литературе в работах [9,10]. Решение, даваемое в этих интересных работах, имеет, однако, менее общий характер и, как нам представляется, меньшую эффективность; кроме того, в нем оставлен в стороне важный вопрос о существовании и построении решения при равенстве собственной частоты колебаний системы целому кратному частоты возмущающей силы.

Действительно, дифференциальные уравнения (1.1) не изменяют своего вида при замене t на $t+T$, но и начальные условия для $t=0$ и $t=T$ по (1.2) одинаковы; поэтому решение системы (1.1) для промежутка времени $T\leqslant t\leqslant 2T$ можно найти из уже построенного решения, заменяя в последнем t на $t-T$ и т. д. для следующих периодов.

Для практического проведения вычисления следует построить систему решений однородной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_k}{dt}=\sum_{s=1}^{n} a_{ks}x_s \tag{1.3}$$

определяемую начальными условиями

$$x_s(0)=\delta_{ms}=\begin{cases} 0 & (m\neq s)\\ 1 & (m=s)\end{cases} \tag{1.4}$$

Эту систему решений будем называть фундаментальной и обозначать ξ_{ms} — первый индекс обозначает номер решения, второй — номер переменной. Решение номера m фундаментальной системы определяется тем, что начальные значения всех переменных равны нулю, кроме переменной того же номера m, начальное значение которой равно 1.

Нетрудно проверить, что решение системы (1.1) удовлетворяющее начальным условиям

$$x_s(0)=x_s^{\circ} \tag{1.5}$$

можно представить в форме

$$x_s(t)=\sum_{m=1}^{n}\left[x_m^{\circ}\xi_{ms}(t)+\int_0^t \xi_{ms}(t-\tau)f_m(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.6}$$

и условия (1.2) для определения таких начальных значений переменных, которые обеспечивают периодичность решения, получают вид:

$$x_s^{\circ}=\sum_{m=1}^{n}\left[x_m^{\circ}\xi_{ms}(T)+\int_0^T \xi_{ms}(T-\tau)f_m(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.7}$$

Определив постоянные x_m° из этой системы линейных уравнений, получим после подстановки их значений в (1.6) требуемое периодическое решение для промежутка временни $0\leqslant t\leqslant T$. Но только это и требуется, так как знание периодических функций для первого периода обеспечивает знание их в любой момент времени,

Для последующего будет иметь значение такое замечание. Обозначим $g_k(t)$ функцию t, равную $f_k(t)$, пока $0\leqslant t\leqslant T$, и равную нулю при $t>T$. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{d\vartheta_k}{dt}=\sum_{s=1}^{n} a_{ks}\vartheta_s+g_k(t) \tag{1.8}$$

Решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$\vartheta_k(0)=x_k^{\circ} \tag{1.9}$$

имеет при $0\leqslant t\leqslant T$ вид (1.6):

$$\vartheta_s(t)=\sum_{m=1}^{n}\left[x_m^{\circ}\xi_{ms}(t)+\int_0^t \xi_{ms}(t-\tau)f_m(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.10}$$

Предположим теперь, что в момент $t=T$ координатам динамической системы, поведение которой описывается уравнениями (1.8), сообщаются отклонения, равные по величине, но противоположные по знаку тем, которые она имеет на основании (1.10) к этому моменту $t=T$. Очевидно, что при таких условиях при $t \geqslant T$ будем иметь $\vartheta_s(t) \equiv 0$. С другой стороны, в результате сообщения этих отклонений возникает движение системы, описываемое уравнениями

$$\vartheta_s^{(1)} t) = -\sum_{m=1}^{n} \xi_{ms}(t-T)\,\vartheta_m(T) \tag{1.11}$$

При отсутствии этих отклонений имели бы при $t > T$

$$\vartheta_s^{(2)}(t) = \sum_{m=1}^{n} \left[x_m{}^\circ \xi_{ms}(t) + \int_0^T \xi_{ms}(t-\tau) f_m(\tau)\, d\tau \right] \tag{1.12}$$

ибо по условию силы $g_k(t)$ прекращают действие при $t > T$. Складывая (1.11) и (1.12), получаем по сказанному

$$\sum_{m=1}^{n} \left[x_m{}^\circ \xi_{ms}(t) - \vartheta_m(T)\,\xi_{ms}(t-T) + \int_0^T \xi_{ms}(t-\tau) f_m(\tau)\, dx \right] = 0 \tag{1.13}$$

Подставляя вместо $\vartheta_m(T)$ его значение на основании (1.10) и предполагая, что постоянные $x_m{}^\circ$ определены в соответствии с (1.7), получим вместо (1.13) для $t \geqslant T$

$$\sum_{m=1}^{n} \{ x_m{}^\circ [\xi_{ms}(t) - \xi_{ms}(t-T)] + \int_0^T \xi_{ms}(t-\tau) f_m(\tau)\, d\tau \} = 0 \tag{1.14}$$

При $t=T$ по определению фундаментального решения снова получаем (1.7). Это показывает, что если система условия (1.14) удовлетворена при $t=T$, то она удовлетворяется и для любого t. Это замечание будет иметь значение в дальнейшем.

Все сказанное имеет место, если коэффициенты a_{ks} представляют периодические функции того же периода T, что и свободные члены $f_k(t)$. Но для эффективного построения системы фундаментальных решений $\xi_{ms}(t)$ предположение о постоянстве коэффициентов a_{ks}, конечно, существенно. Это построение можно вести разнообразными путями; мы воспользуемся методами операционного исчисления [6,7]; этот путь в практических вычислениях является наиболее простым.

2. Перейдем к изображению периодической функции. Рассматривая некоторую функцию $f(t)$, условимся через $g(t)$ обозначать функцию, равную $f(t)$ при $0 < t < T$ и равную нулю при $t > T$. Изображения этих функций, обозначаемые прописными буквами, будут

$$f(t) \doteqdot F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt, \qquad g(t) \doteqdot G(p) = p\int_0^T e^{-pt} f(t)\, dt \tag{2.1}$$

Воспользуемся еще изображением $F_T(p)$, функции $f(t+T)$. Имеем

$$f(t+T) \doteqdot F_T(p) = pe^{pT} \int_T^\infty e^{-pt} f(t)\,dt \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) получаем соотношение

$$G(p) = F(p) - e^{-pT} F_T(p) \tag{2.3}$$

которое легко также установить, используя так называемую теорему запаздывания. Предполагая теперь, что $f(t)$ — периодическая функция периода T, т. е. $f(t) = f(t+T)$, получим, очевидно, что $F_T(p) = F(p)$ и, значит,

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 - e^{-pT}} \tag{2.4}$$

Итак, изображение периодической функции периода T может быть представлено в форме (2.4), в которой числитель представляет изображение функции, равной нулю при $t > T$ и равной начальной функции $f(t)$ при $t < T$. Формула (2.4) была дана в книге автора [6] на стр. 24; иной вывод ее приведен в [8]. Можно утверждать, что и обратное предложение также имеет место: начальная функция $f(t)$, изображение которой имеет форму (2.4), причем числитель $G(p)$ представляет изображение функции, равной нулю при $t > T$, является периодической функцией периода T, которая при $t < T$ равна начальной функции $g(t)$ для изображения числителя $G(p)$ формулы (2.4).

Действительно, из второй формулы (2.1) следует, что $G(p)$ является целой трансцендентной функцией от p; поэтому полюсы функции (2.4) суть корни ее знаменателя, т. е.

$$p_0 = 0, \quad p_k = \frac{2k\pi i}{T}, \quad k = \pm 1, \ \pm 2, \ldots$$

и разложение Хевисайда функции (2.4) будет иметь форму

$$F(p) = \frac{1}{T} \int_0^T g(t)\,dt + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{p}{p - p_k} \int_0^T g_k(t) \exp\frac{-2k\pi i t}{T}\,dt$$

Соответствующая начальная функция может быть поэтому представлена тригонометрическим рядом

$$f(t) = \frac{1}{T} \int_0^T g(t)\,dt + \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\frac{2k\pi i t}{T} \int_0^T g_k(t) \exp\frac{-2k\pi i t}{T}\,dt \tag{2.5}$$

откуда и следует сказанное выше.

Если, в частности, $f(t)$ — периодическая функция периода $2T$, меняющая знак через полупериод T:

$$f(t+T) = -f(t) \tag{2.6}$$

то $F_T(p) = -F(p)$ и по (1.3) получим

$$F(p) = \frac{G(p)}{1 + e^{-pT}} \tag{2.7}$$

И здесь, конечено, имеет место обратное предложение: начальная функция $f(t)$, изображение которой имеет форму (2.7), причем числитель $G(p)$ представляет изображение функции, равной нулю при $t > T$, является периодической периода $2T$, меняющей знак через полупериод, и при $0 < t < T$ равной начальной функции $g(t)$ изображения числителя формулы (2.7).

С помощью того же несложного приема можно установить ряд аналогичных предложений, например, формула

$$F(p) = \frac{G(p) - e^{-2pT} G(-p)}{1 - e^{-2pT}} \tag{2.8}$$

в которой функция $G(p)$ в числителе имеет указанное выше определение, представляет изображение периодической функции $f(t)$ периода $2T$, удовлетворяющей требованию

$$f(t) = f(2T - t) \tag{2.9}$$

т. е. представимой графиком, симметричным относительно прямой $t = T$; при этом $f(t) = g(t)$, пока $0 < t < T$.

Приведем несколько примеров. Имеем известное соотношение

$$\sin \omega t \leftarrow\!\!\!\!\!\!\div\; \frac{\omega p}{\omega^2 + p^2}$$

По (2.7) получаем, что функция

$$\left(1 + \exp \frac{-\pi p}{\omega}\right) \frac{\omega p}{\omega^2 + p^2} \tag{2.10}$$

представляет изображение первой полуволны синусоиды, т. е. функции $g(t)$, равной $\sin \omega t$ при $0 \leqslant t \leqslant \pi / \omega$ и равной нулю при $t > \pi / \omega$. Из (2.4) теперь следует, что

$$|\sin \omega t| \leftarrow\!\!\!\!\!\!\div\; \frac{\omega p}{\omega^2 + p^2} \operatorname{cth} \frac{\pi p}{2\omega} \tag{2.11}$$

Таково изображение выпрямленной синусоиды. Разделив (2.10) на $1 - e^{-2\pi p/\omega}$, найдем согласно (2.4) изображение периодической функции периода $2\pi / \omega$:

$$\frac{\omega p}{(1 - e^{-\pi p/\omega})(\omega^2 + p^2)} \div\!\!\!\!\!\!\rightarrow f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & (0 \leqslant t \leqslant \pi/\omega) \\ 0 & (\pi/\omega \leqslant t \leqslant 2\pi/\omega) \end{cases} \tag{2.12}$$

т. е. синусоиды, нижние полуволны которой срезаны.

Выражение

$$G(p) = \frac{h}{p} \left[(1 - e^{-p\tau_1}) \frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_3} e^{-p(\tau_1 + \tau_2)} (1 - e^{-p\tau_3}) \right] \tag{2.13}$$

представляет изображение функции $g(t)$, обращающейся в нуль при $t > \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$, график которой при $t < \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$ представляет трапецию высоты h, боковые стороны имеют угловые коэффициенты h / τ_1

и h/τ_3, а параллельные стороны длины $\tau_1+\tau_3+\tau_3$ (нижняя) и τ_2 (верхняя). Разделив (2.13) на $1-\exp(-pT)$, где $T \geqslant \tau_1+\tau_2+\tau_3$, получим периодическую функцию периода T, график которой при $\tau_1+\tau_2+\tau_3 \geqslant t$ дается указанной трапецией и которая равна нулю при $\tau_1+\tau_2+\tau_3 \leqslant t \leqslant T$. Специализируя выбор постоянных τ_1, τ_2, τ_3 и T, можно отсюда получить изображения ряда периодических функций, имеющих значительный интерес для приложения, рассмотренных в уже упомянутой работе[4].

Полагая, например, $\tau_2=0$, $\tau_1=\tau_3$, $\tau_1+\tau_3=T$, получим, что

$$F(p)=\frac{2h}{pT}\operatorname{th}\frac{pT}{4}$$

представляет изображение периодической функции («равноскатная крыша») периода T, график которой для $0<t<T$ представляется равнобедренным треугольником высоты h и с основанием T.

3. Возвращаясь к системе дифференциальных уравнений (1.1), построим изображение ее интеграла Коши, т. е. решения этой системы, удовлетворяющего начальным условиям

$$x_k(0)=x_k^\circ \tag{3.1}$$

Изображение системы (1) имеет вид системы линейных алгебраических уравнений ($k=1, 2, \ldots, n$):

$$p\,[X_k(p)-x_k^\circ]=\sum_{s-1}^{n} a_{ks}X_s(p)+F_k(p) \tag{3.2}$$

Решив эту систему уравнений, найдем

$$X_s(p)=-\sum_{k=1}^{n}\left(x_k^\circ+\frac{F_k(p)}{p}\right)p\,\frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)} \tag{3.3}$$

Здесь через $\Delta(p)$ обозначен характеристический определитель

$$\Delta(p)=|\,a_{ks}-\delta_{ks}\,p\,| \tag{3.4}$$

а через $\Delta_{ks}(p)$ — алгебраическое дополнение элемента k строки и s столбца этого определителя.

Пусть $\xi_{ks}(t)$ начальные функции, соответствующие изображениям

$$-p\,\frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)} \xrightarrow{\cdot} \xi_{ks}(t) \tag{3.5}$$

Использовав теорему Бореля, найдем по (3.6) уже приведенное выше решение (1.6)

$$x_s(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[x_k^\circ\,\xi_{ks}(t)+\int_0^t \xi_{ks}(t-\tau)\,f_k(\tau)\,d\tau\right] \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что функции $\xi_{ks}(t)$ представляют фундаментальную систему решений. Впрочем, в этом легко убедиться и непосредственно. Во-первых, ясно, что функции $\xi_{ks}(t)$ при любом $k=1, 2, \ldots n$ представляют решение системы (1.1). Во-вторых, числитель изображения (3.5) при $k \neq s$ представляет полином, степень которого не превышает $n-1$, тогда как степень знаменателя равна n. Разложение изображения (3.5) по степеням $1/p$ поэтому не содержит свободного члена и на основании первой теоремы Хевисайда $\xi_{ks}(0)=0$. Если же $k=s$, то старшие члены числителя и знаменателя изображения (3.5) будут $(-p)^n$, указанное разложение будет начинаться со свободного члена, равного единице, и, следовательно, $\xi_{ss}(0)=1$.

Пусть теперь $f_k(t)$ — периодические функции t периоди T. По (2.4) имеем

$$F_k(p)=\frac{G_k(p)}{1-e^{-pT}} \tag{3.7}$$

и после подстановки в (3.3) и приведения к общему знаменателю можно записать выражение $X_s(p)$ в форме

$$X_s(p)=\frac{\Theta_s(p)}{1-e^{-pT}} \tag{3.8}$$

где обозначено

$$\Theta_s(p)=-\sum_{k=1}^{n}\left[x_k{}^\circ(1-e^{-pT})+\frac{1}{p}G_k(p)\right]p\frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)} \tag{3.9}$$

В соответствуи со сказанным в § 2 начальные функции для изображения (3.8), т. е. решение системы (1.1), будут периодическими, если при $t>T$ начальная функция изображения (3.9) будет тождественным нулем. Использовав (3.5), теорему запаздывания и теорему Бореля, получим при $t>T$ из (3.9)

$$\vartheta_s(t)=\sum_{k=1}^{n}\left\{x_k{}^\circ[\xi_{ks}(t)-\xi_{ks}(t-T)]+\int_0^T\xi_{ks}(t-\tau\ f_k(\tau)\,d\tau\right\} \tag{3.10}$$

Мы снова получаем соотношение (1.14). Чтобы оно имело место при любом $t\geqslant T$, достаточно ему удовлетворить, как уже известно, при $t=T$. Для определения постоянных $x_k{}^\circ$ получается система уравнений (1.7). Далее, при $t<T$ получаем

$$x_s(t)=\vartheta_s(t)=\sum_{k=1}^{n}\left[x_k{}^\circ\xi_{ks}(t)+\int_0^t\xi_{ks}(t-\tau)f_k(\tau)\,d\tau\right] \tag{3.11}$$

где $x_k{}^\circ$ должны быть заменены их значениями, получающимися из (1.7). Это и будет искомое периодическое решение.

Дальнейшее вычисление будем проводить, предполагая, что все корни $p_1, p_2, \ldots, p_n$ характеристического определителя (3.4) простые. По теореме разложения Хевисайда в этом случае получим

$$-p\frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)}=-\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)}\frac{p}{p-p_\lambda}\doteqdot-\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)}e^{p_\lambda t} \tag{3.12}$$

На первый взгляд кажется, что для нахождения всех решений фундаментальной системы необходимо для каждого p_λ вычислить квадратную таблицу всех определителей $\Delta_{ks}(p_\lambda)$; но фактически дело так не обстоит, так как, поскольку p_λ обращает в нуль определитель

$\Delta(p)$, элементы строк (и столбцов) указанной таблицы друг другу пропорциональны [9]:

$$\Delta_{ks}(p_\lambda) = C_\lambda^{(k)} \Delta_{1s}(p_\lambda) \tag{3.13}$$

Таким образом, можно написать

$$\xi_{ks}(t) = -\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{C_\lambda^{(k)}}{\Delta'(p_\lambda)} \Delta_{1s}(p_\lambda) e^{p_\lambda t} \tag{3.14}$$

и после подстановки в (3.10), приравнивая нулю коэффициент при каждом из $e^{p_\lambda t}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$, получим систему условий

$$(e^{-p_\lambda T} - 1) \sum_{k=1}^{n} x_k^\circ C_\lambda^{(k)} - \sum_{k=1}^{n} C_\lambda^{(k)} \int_0^T e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau)\, d\tau = 0 \tag{3.15}$$

Полагая теперь для краткости

$$C_\lambda = -\sum_{k=1}^{n} x_k^\circ C_\lambda^{(k)} \tag{3.16}$$

можем удовлетворять условиям (3.15), определив C_λ из системы

$$C_\lambda (1 - e^{-p_\lambda T}) = \sum_{k=1} C_\lambda^{(k)} \int_0^T e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau)\, d\tau \tag{3.17}$$

где $\lambda = 1, 2, \ldots, n$. При условии

$$1 - e^{-p_\lambda T} \neq 0 \tag{3.18}$$

смысл которого будет выяснен ниже, из (3.17) находим C_λ.

По (3.11) получаем искомое периодическое решение для $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$x_s(t) = -\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\Delta_{1s}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \left\{ \sum_{k=1}^{n} C_\lambda^{(k)} x_k^\circ + \sum_{k=1}^{n} C_\lambda^{(k)} \int_0^t e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau)\, d\tau \right\} e^{p_\lambda t} \tag{3.19}$$

Отсюда по (3.15), (3.16) и (3.13) получим окончательно (3.20)

$$x_s(t) = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{e^{p_\lambda t}}{1 - e^{-p_\lambda T}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \left[\int_t^t e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau)\, d\tau + e^{-p_\lambda T} \int_0^t e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau)\, d\tau \right]$$

Действительно, нетрудно сразу же проверить, что это решение принимает одинаковые значения при $t = 0$ и при $t = T$:

$$x_s(0) = x_s(T) = \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{1}{1 - e^{-p_\lambda T}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \int_0^T e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau)\, d\tau \tag{3.21}$$

Пусть теперь условие (3.18) не выполняется, т. е.

$$1 - e^{-p_\lambda T} = 0 \tag{3.22}$$

Во первых, это равенство может иметь место, если один из корней характеристического определителя, — пусть это будет корень p_n, —

равен нулю. Система (1.1) в этом случае вообще не имеет периодического решения. Она может иметь такое решение лишь при условии

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^{(k)} \int_0^T f_k(\tau)\, d\tau = 0 \tag{3.23}$$

При соблюдении такого условия постоянная C_n остается произвольной и система (1.1) имеет семейство периодических решений, зависящих от этого произвольного параметра

$$x_s(t) = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{e^{p_\lambda t}}{1-e^{-p_\lambda T}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \left[\int_t^T e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau)\, d\tau + e^{-p_\lambda T} \int_0^t e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau)\, d\tau \right] + \\ + \frac{\Delta_{1s}(0)}{\Delta'(0)} \left[C_n - \sum_{k=1}^{n} C_n^{(k)} \int_0^t f_k(\tau)\, d\tau \right] \tag{3.24}$$

Во-вторых, уравнение (3.29) может иметь место, если характеристический определитель имеет пару чисто мнимых корней, — пусть это будут корни p_{n-1} и p_n, — вида

$$p_{n-1} = -p_n = \frac{2\pi i}{T} m \tag{3.25}$$

где m равно целому числу. Предполагая еще, что других чисто мнимых корней, соизмеримых с (3.25), характеристическое уравнение не имеет, можем заключить, что периодическое решение системы (1.1) будет существовать при соблюдении условий

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{(k)} \int_0^T \exp \frac{-2\pi i m \tau}{T} f_k(\tau)\, d\tau = 0 \\ \sum_{k=1}^{n} C_n^{(k)} \int_0^T \exp \frac{2\pi i m \tau}{T} f_k(\tau)\, d\tau = 0 \end{gathered} \tag{3.26}$$

из которых второе является сопряженным первому. Постоянные C_{n-1} и C_n в (3.16) при соблюдении этих условий останутся произвольными комплексными сопряженными числами и система (1.1) будет иметь семейство периодических решений, зависящих от двух произвольных постоянных. По (3.19) и (3.20) это периодическое решение будет

$$x_s(t) = 2\mathrm{Re} \frac{\Delta_{1s}(2\pi i m/T)}{\Delta'(2\pi i m/T)} \left[C_{n-1} - \right. \\ \left. - \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{(k)} \int_0^t f_k(\tau) \exp \frac{-2\pi i m \tau}{T}\, d\tau \right] \exp \frac{2\pi i m t}{T} + \\ + \sum_{\lambda=1}^{n-2} \frac{e^{p_\lambda t}}{1-e^{-p_\lambda T}} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \left[\int_t^T e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau)\, d\tau + e^{-p_\lambda T} \int_0^t e^{-p_\lambda \tau} f_k(\tau)\, d\tau \right] \tag{3.27}$$

В важном для приложений частном случае, когда $f_k(t)$ — периодические функции периода $2T$, меняющие знак через полупериод T, следует исходить из формулы (2.7) для изображения этих функций.

Решение $x_s(t)$ системы (1.1), также имеющее период $2T$ и меняющее знак через полупериод, определяется при условии

$$1+e^{-p_\lambda T}\neq 0 \tag{3.28}$$

для $0\leqslant t\leqslant T$ выражением, аналогичным (3.20): (3.29)

$$x_s(t)=\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{e^{p_\lambda t}}{1+e^{-p_\lambda T}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)}\left[\int_t^T e^{-p_\lambda\tau}f_k(\tau)\,d\tau-e^{-p_\lambda T}\int_0^t e^{-p_\lambda\tau}f_k(\tau)\,d\tau\right]$$

Если характеристический определитель имеет пару мнимых корней, обращающих в нуль левую часть (3.28):

$$p_{n-1}=p_n=\frac{2(m+1)\pi i}{T} \tag{3.30}$$

то периодические решения указанного вида могут существовать при соблюдении условий, аналогичных (3.26); периодическое решение, аналогичное (3.27), будет определено с точностью до выражений, содержащих две произвольный комплексные сопряженные постоянные.

Не останавливаясь на дальнейших частностях, заметим, что при решении частных задач не следует прибегать к общим формулам, а предпочтительно использовать метод рассуждения, с помощью которых эти формулы были получены. Это позволяет попутно внести в вычисление те упрощения, которые часто подсказываются самим аппаратом операционного исчисления. В частности, при переходе от изображения (3.9) к начальной функции не нужно пользоваться теоремой Бореля, которая хорошо служит для общих рассуждений, а в каждой частной задаче разыскивать начальные функции по их конкретно заданным изображениям.

Поступила в редакцию
10 V 1948

Ленинградский политехнический институт. Институт механики Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
2. Duffing G. Erzwungene Schwingungen bei veränderlicher Eigenfrequenz und ihre technische Bedeutung. Braunschweig. 1918.
3. Лойцянский Л. Г. и Лурье А. И. Курс теоретической механики. Гостехиздат. 1940. Ч. II.
4. Обморшев А. Н. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы в случае прерывистого изменения возмущающей силы. Труды Московского механико-машиностроительного института им. Баумана. Машгиз. 1940. № 65/5.
5. Gardner M. F. and Barnes J. L. Transients in Linear Systems. New York and London. 1945. Vol. 1.
6. Лурье А. И. Операционное исчисление в приложениях к задачам механики. ОНТИ. 1938.
7. Конторович М. И. Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. Ленинград. Военная академия связи. 1947.
8. Churchill R. V. Modern Operational Mathematics in Engineering. 1944.
9. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. ОНТИ. 1937. Стр. 67.
10. Waidelich D. L. Applied Physics. 13. No. 11. Nov. 1942. P. 706—712.
11. Waidelich D. L. Steady State Operational Calculus. Proceedings J. R. E. and Waves and Electrons. 34. No. 2. Feb. 1946 P. 67—70.