Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

К АСИМПТОТИЧЕСКОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРИМЕНЕНИИ К ПЛАСТИНКАМ И ДИСКАМ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

П. М. Риз

(Москва)

В работах Л. С. Лейбензона[1], Денкана[2], Д. Ю. Панова[3] разработан метод решения некоторых двухмерных краевых задач для «узких» областей методом разложения в ряд по степеням параметра «толщины».

При этом решение двухмерной задачи формально сводится к решению бесконечной последовательности одномерных задач.

В работе[3], к которой по методу примыкает данная работа, для задачи кручения доказывается асимптотическая сходимость этой последовательности.

Здесь аналогичный метод интегрирования применяется с целью разыскания приближенного решения пространственной задачи теории упругости для «тонкого» тела. Для пластинок постоянной толщины близкое по идее исследование было проведено А. И Лурье[4].

1. Рассмотрим тело, симметричное относительно плоскости xy. Поверхность этого тела определяем уравнением

$$y^2-\beta^2 f^2(x, z)=0 \tag{1.1}$$

Параметр β является тем малым параметром толщины, по степеням которого ведется разложение. Введем переменное

$$\eta=\beta y \tag{1.2}$$

тогда уравнение (1.1) примет вид

$$\eta^2-f^2(x, z)=0 \tag{1.3}$$

Преобразуем уравнения теории упругости к переменным x, η, z. Для уравнений равновесия в перемещениях получим

$$\begin{aligned}
&\mu\left[\nabla^2 u+\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right]+(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial x}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial\eta}\right]=X\\
&\mu\left[\nabla^2 v+\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}\right]+(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial\eta}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}\right]=Y\\
&\mu\left[\nabla^2 w+\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right]+(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial\Lambda}{\partial z}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\,\partial z}\right]=Z
\end{aligned} \tag{1.4}$$

В этих равенствах и в дальнейшем

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad \Lambda=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

Напишем граничные условия на поверхности (1.1), заметив, что направляющие косинусы нормали к этой поверхности пропорциональны величинам

$$\cos(nx) : \cos(n\eta) : \cos(nz) = \left(-\beta f \frac{\partial f}{\partial x}\right) : \eta : \left(-\beta f \frac{\partial f}{\partial z}\right) \tag{1.5}$$

Получим (1.6)

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \eta}\eta + \beta\left[\mu \frac{\partial v}{\partial x}\eta - \lambda \frac{\partial v}{\partial \eta} f \frac{\partial f}{\partial x}\right] -$$

$$- \beta^2 f\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial z}\right] = \beta X^*$$

$$(2\mu+\lambda)\frac{\partial v}{\partial \eta}\eta + \beta\left[\lambda\Delta\eta - \mu f\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \eta}\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right] - \beta^2 \mu f\left[\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \beta Y^*$$

$$\mu \frac{\partial w}{\partial \eta}\eta + \beta\left[\mu \frac{\partial v}{\partial z}\eta - \lambda \frac{\partial v}{\partial \eta} f \frac{\partial f}{\partial z}\right] -$$

$$- \beta^2 f\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \beta Z^*$$

Будем пользоваться представлением

$$u = u_0 + \beta u_1 + \ldots, \qquad v = v_0 + \beta v_1 + \ldots, \qquad w = w_0 + \beta_1 w_1 + \ldots \tag{1.7}$$

Разлагая объемные и поверхностные силы X, Y, Z, X^*, Y^*, Z^*, заданные как функции от координат по степеням β, и подставляя в уравнения (4), (6), получим уравнения для определения неизвестных функций u_k, v_k, w_k ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

2. Решим задачу о деформации диска с круглым экваториальным сечением под действием радиальных объемных сил, и при отсутствии сил поверхностных. В этом случае

$$f(x, z) = f\left(\sqrt{x^2+z^2}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = f' \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = f' \frac{z}{r} \tag{2.1}$$

Здесь $r = \sqrt{x^2+z^2}$, причем $f(R) = 0$, где R — радиус, ограничивающий диск

$$\begin{matrix} X = X_0(x, z), & Y = 0, & Z = Z_0(x, z) \\ X^* = 0, & Y^* = 0, & Z^* = 0 \end{matrix} \tag{2.2}$$

Проводя вычисления из уравнений равновесия, имеем

$$\begin{aligned} u_0 &= A_0(x, z)\eta + B_0(x, z), \\ v_0 &= C_0(x, z)\eta + D_0(x, z), \\ w_0 &= E_0(x, z)\eta + F_0(x, z) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Используя граничные условия и соображения симметрии, легко установить, что

$$A_0 = C_0 = E_0 = D_0 = 0$$

Следовательно,

$$u_0 = B_0(x, z), \qquad v_0 = 0, \qquad w_0 = F_0(x, z), \tag{2.4}$$

Покажем, что функции $B_0(x, z)$ и $F_0(x, z)$, входящие в состав нулевого приближения, полностью определяются при рассмотрении второго приближения.

Продолжая вычисление для первого приближения из уравнений равновесия, имеем

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1(x, z)\eta + B_1(x, z) \\ v_1 &= C_1(x, z)\eta + D_1(x, z) \\ w_1 &= E_1(x, z)\eta + F_1(x, z) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Снова используя граничные условия и соображения симметрии, получим

$$A_1 = E_1 = D_1 = 0$$
$$C_1 = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\Delta_0 = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\partial B_0}{\partial x} + \frac{\partial F_0}{\partial z}\right) \tag{2.6}$$

Функции $B_1(x, z)$ и $F_1(x, z)$ остаются неопределенными и могут быть найдены из рассмотрения третьего приближения.

Перейдем к рассмотрению следующего приближения, которое позволит определить функции $B_0(x, z)$, $F_1(x, z)$ и даст окончательный результат для нулевого приближения. Из уравнений равновесия находим

$$u_2 = \frac{1}{2}\varphi_2(x, z)\eta^2 + A_2(x, z)\eta + B_2(x, z)$$
$$v_2 = C_2(x, z)\eta \tag{2.7}$$
$$w_2 = \frac{1}{2}\psi_2(x, z)\eta^2 + E_2(x, z)\eta + F(x, z)$$

где

$$\varphi_2 = \frac{1}{\mu}X_0 - \nabla^2 B_0 - \frac{2(\lambda+\mu)}{2\mu+\lambda}\frac{\partial\Delta_0}{\partial x}\,.$$
$$\psi_2 = \frac{1}{\mu}Z_0 - \nabla^2 F_0 - \frac{2(\lambda+\mu)}{2\mu+\lambda}\frac{\partial\Delta_0}{\partial z} \tag{2.8}$$

Здесь D_2 положено равным нулю по соображениям симметрии. Из граничных условий при $\eta = f(x, z)$ и при $\eta = -f(x, z)$ имеем

$$A_2 = E_2 = 0$$
$$C_2 = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\Delta_1 = -\frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) \tag{2.9}$$

Следовательно,

$$\mu\left(\varphi_2 + \frac{\partial C_1}{\partial x}\right)f - \lambda C_1 f\frac{\partial f}{\partial x} -$$
$$-f\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial F_0}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial B_0}{\partial z} + \frac{\partial F_0}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial z}\right] = 0$$
$$\mu\left(\psi_2 + \frac{\partial C_1}{\partial z}\right)f - \lambda C_1 f\frac{\partial f}{\partial z} - \tag{2.10}$$
$$-f\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial F_0}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda\frac{\partial B_0}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial B_0}{\partial z} + \frac{\partial F_0}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial x}\right] = 0$$

Эти уравнения позволяют определить неизвестные функции $B_0(x,z)$ $F_0(x, z)$ и тем самым полностью найти приближенное решение нашей задачи.

3. Проведем вычисления до конца для случая нагрузок, обладающих осевой симметрией. Тогда

$$X_0(x, z) = K_0(z)\frac{x}{r}\,, \qquad Z_0(x, z) = K_0(z)\frac{z}{r} \tag{3.1}$$

Будем искать решение в следующем виде:

$$B_0(x, z) = \Phi_0(r)\frac{x}{r}\,, \qquad F_0(x, z) = \Phi_0(r)\frac{z}{r} \tag{3.2}$$

где $\Phi_0(r)$ — радиальное смещение элементов диска.

Подставляя эти равенства в уравнения (2.10) для определения функции $\Phi_0(r)$, получим дифференциальное уравнение

$$fK_0(r) = N_1 f\Phi_0'' + \frac{1}{r_1}(N_1 f + N_2 r f')\Phi_0' - \frac{1}{r^2}(N_1 f - N_3 r f')\Phi_0 \tag{3.3}$$

где

$$N_1 = 4\mu\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad N_2 = \frac{4\mu^2}{2\mu+\lambda}, \quad N_3 = \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda}$$
$$\frac{K_0}{N_1} = \Phi_0'' + \frac{1}{r}\left(1 + \frac{N_2}{N_1}\frac{f'}{f}r\right)\Phi_0' - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{N_3}{N_1}\frac{f'}{f}r\right)\Phi_0 \tag{3.4}$$

Уравнение (3.3) почти точно совпадает с хорошо известным уравнением, обычно принимаемым в расчете дисков[5], отличаясь от последнего только коэффициентами N, имеющими там следующие значения:

$$N_1 = N_2 = \frac{E}{1-\nu^2} = 4\mu\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}, \qquad N_3 = \nu N_1 \tag{3.5}$$

Заметим, что при $\nu = 0$ коэффициенты (3.5) совпадают с коэффициентами (3.4) и, таким образом, уравнение осесимметрических деформаций диска, выводимое обычно с помощью некоторых произвольных гипотез относительно распределения напряжений, совпадает с уравнением (3.3) при коэффициенте Пуассона, равном нулю, незначительно отличаясь от него при других значениях коэффициента Пуассона.

Методы интегрирования уравнения (3.3) достаточно хорошо разработаны (см. например, [6]), поэтому этот вопрос здесь не затрагивается.

Заметим только, что рассматривая диск, ограниченный поверхностью (1.1) с цилиндрическими срезами $r = a$ и $r = b$ $(b < R)$, произвольные постоянные в интеграле уравнения (3.3) выбираются так, чтобы удовлетворить условиям на срезах.

При $a = 0$ и $b = R$ постоянные определяются из требования конечности решения в особых точках $r = 0$ и $r = R$.

В результате для перемещений получаем

$$u = \Phi_0(r)\frac{x}{r} + O_1(\beta^2)$$
$$v = \frac{\lambda}{2\mu+\lambda}\left[\Phi_0' + \frac{1}{r}\Phi_0\right]y + O_2(\beta^2) \tag{3.6}$$
$$w = \Phi_0(r)\frac{z}{r} + O_3(\beta^2)$$

Задача изгиба пластинки объемными силами может быть легко решена тем же методом, если в формуле (2) положить

$$y = \beta^2 Y_0(x, z)$$

Разумеется, применяемый здесь метод, в отличие от обычных методов расчета дисков, позволяет уточнять результат путем рассмотрения последующих приближений. Заметим, что этот метод может быть применен для определения деформаций пластин, дисков и оболочек переменной толщины.

Поступила в редакцию
27 II 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Вариационные методы теории упругости. Труды ЦАГИ. 1940. 406.
2. Duncan. Torsion and Flexure of Cylinder. Rep. and Mem. 1932. 1444.
3. Панов Д. Ю. Об одном методе решения краевых задач. ДАН. 1935. Т. III. № 2.
4. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ. 1942. Т. XI. Вып. 2—4.
5. Stodola. Dampf- und Gasturbinen. 1926
6. Тумаркин С. Л. Методы расчета напряжений во вращающихся дисках. Труды ЦАГИ. 1936. 262.