Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

# О ДАВЛЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ПЛАСТИНКУ

Л. А. Галин

(Москва)

Сосредоточенная сила обычно прилагается к пластинке через посредство некоторого упругого или твердого тела. Таким образом, подобная задача является в большинстве случаев некоторой контактной задачей теории упругости. При этом подлежат определению размеры площадки контакта и распределение по ней давлений. В этой заметке дается решение одной задачи такого типа.

Следует заметить, что воздействие твердого тела на пластинку интересно и с иной точки зрения. В свое время Г. Герц исследовал задачу о давлении твердого тела, приближенно замененного эллипсоидом, на упругое тело достаточно больших размеров, которое можно рассматривать как упругое полупространство. При рассмотрении контактных задач упругое тело часто не бывает достаточно протяженным. Поэтому представляет интерес рассмотрение другого предельного случая, когда упругое тело является тонкой пластинкой. Кроме того, как показано в дальнейшем, задача о давлении твердого тела на пластинку эквивалентна некоторой плоской упруго-пластической задаче, и поэтому полученные результаты могут быть использованы для моделирования упруго-пластической деформации.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть на круговую пластинку радиуса $R$, заделанную по контуру, давит твердое тело, причем начальное соприкосновение будет иметь место в центре пластинки. В уравнении для поверхности, ограничивающей твердое тело, сохраним только главные члены, подобно тому, как это делается в теории Герца. Таким образом, уравнение этой поверхности будет

$$z = Ax^2 + By^2$$

На тело действует сила $P$, направленная по оси симметрии.

Примем следующие предположения:

1. Толщина пластинки мала по сравнению с размерами площадки контакта.

2. Размеры площадки контакта малы по сравнению с радиусом пластинки.

3. Размеры площадки контакта малы по сравнению с величинами радиусов кривизны тела.

Будем определять форму площадки контакта. На достаточном удалении от площадки контакта прогиб пластинки определяется выражением [1]

$$w_2 = \frac{P}{16\pi N}\left(r^2 \lg\frac{r^2}{a^2} + a^2 - r^2\right)$$

$$N = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}, \qquad r^2 = x^2 + y^2 \tag{1}$$

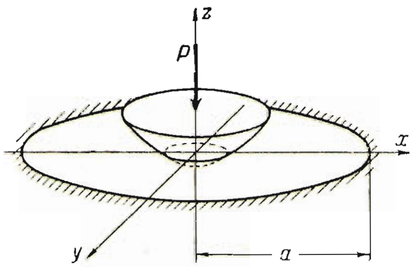
Здесь $h$ — толщина пластинки, $E$ — модуль упругости материала пластинки, $\sigma$ — коэффициент Пуассона.

Это выражение будет иметь место при достаточно больших $r$, так как действие твердого тела в таком случае можно рассматривать как действие сосредоточенной силы. Вне площадки контакта функция $w_2$ будет удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\triangle\triangle\, w_2 = 0 \tag{2}$$

так как пластинка свободна от давления.

На площадке контакта (фиг. 1) пластинка будет прилегать к твердому телу,




Фиг. 1а

Поэтому уравнение для ее прогибов определяется следующим образом:

$$w_1 = \delta - Ax^2 - By^2 \tag{3}$$

При этом $\delta$ — перемещение твердого тела. Функция $w_1$ будет также бигармонической:

$$\triangle\triangle\, w_1 = 0 \tag{4}$$

На контуре площадки контакта $L$, который подлежит определению, должны выполняться условия

$$
\begin{aligned}
&1) \qquad && w_1 = w_2 \\
&2) && \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y} \\
&3) && \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x\,\partial y}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Эти условия являются следствием непрерывности прогибов пластинки, наклона касательной к пластинке и величины изгибающих моментов. Условия 3 являются необходимыми для того, чтобы были выполнены условия 1 и 2. Однако в результате удовлетворения условий 3 функции $w_1$ и $w_3$ определяются с некоторой степенью произвола, именно с точностью до некоторого слагаемого, которое является линейной функцией от $x$ и $y$. В данном случае вследствие симметрии задачи эта линейная функция равна нулю.

Итак, на контуре $L$, ограничивающем площадку контакта, должны выполняться условия

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^1} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x\,\partial y} \tag{6}$$

Образуем функцию

$$w_3 = w_2 - w_1 \tag{7}$$

Для ее определения и нахождения контура $L$ имеем условия

$$\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w_3}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w_3}{\partial x\,\partial y} = 0 \qquad \text{на } L \tag{8}$$

Очевидно, можно продолжить аналитически функции (1) и (3) на всю плоскость. Следовательно, на основании (1) и (3) будем иметь при $r \to \infty$

$$w_3 = \frac{P}{16\pi N} r^2 \lg \frac{r^2}{a^2} + \frac{P}{16\pi N}(a^2 - r^2) - \delta + Ax^2 + By^2 =$$

$$= \frac{P}{16\pi N} r^2 \lg \frac{r^2}{a^2} + \left(\frac{P}{16\pi N} a^2 - \delta\right) - \left(\frac{P}{16\pi N} - A\right)x^2 - \left(\frac{P}{16\pi N} - B\right) y^2$$

Построим теперь функцию

$$w_4 = w_3 - \frac{P}{16\pi N} a^2 + \delta \tag{10}$$

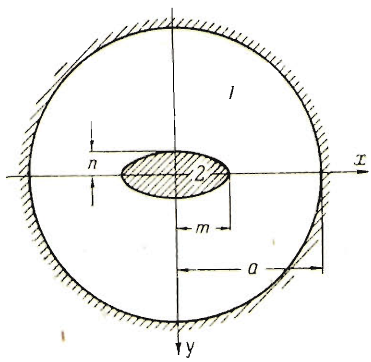
Для определения этой функции и контура $L$ будем иметь условия

$$\frac{\partial^2 {}_4}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w_4}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 w_4}{\partial x\, \partial y} = 0 \qquad \text{на } L$$

При $r \to \infty$

$$w_4 = \frac{P}{8\pi N} r^2 \lg \frac{r}{a} - \left(\frac{P}{16\pi N} - A\right) x^2 - \left(\frac{P}{16\pi N} - B\right) y^2 \tag{11}$$

В нашей работе [2] рассмотрен один случай плоской упруго-пластической




Фиг. 2а

задачи, причем для нахождения некоторой функции $\varphi_3$ и для одновременного определения контура $L$ имели место условия

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x\, \partial y} = 0 \qquad \text{на } L$$

При $r \to \infty$

$$\varphi_3 = -kr^2 \lg \frac{r}{R} + \left[\frac{B^*}{2} - \left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2}\right)\right] x^2 + \left[\frac{A^*}{2} - \left(\frac{p}{2} - \frac{k}{2}\right)\right] y^2 \tag{12}$$

При этом контур $L$ оказался эллипсом. Функция, отображающая внешность единичного круга на полубесконечную область, ограниченную этим эллипсом, имела вид

$$\omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{B^* - A^*}{2k} \frac{1}{\zeta}\right) \exp\left[\frac{B^*}{4k} + \frac{A^*}{4k} - \frac{1}{2} - \frac{p}{2k}\right] \tag{13}$$

Как легко убедиться, условия (11) и условия (12) совершенно одинаковы. Таким образом, контур площадки контакта будет эллипсом. Использовав результаты работы [3], найдем, что функция, отображающая внешность единичного круга на область, внешнюю к контуру $L$, будет

$$\omega(\zeta) = a\left(\zeta + \frac{8\pi N (B - A)}{P} \frac{1}{\zeta}\right) \exp\left[-\frac{4\pi N (A + B)}{P} - \frac{1}{2}\right] \tag{14}$$

На основании (14) полуоси этого эллипса (фиг. 2) будут

$$m = a\left(1 + \frac{8\pi N(B-A)}{P}\right)\exp\left[-\frac{4\pi N(A+B)}{P} - \frac{1}{2}\right], \qquad (15)$$
$$n = a\left(1 - \frac{8\pi N(B-A)}{P}\right)\exp\left[-\frac{4\pi N(A+B)}{P} - \frac{1}{2}\right]$$

Это решение будет иметь место при условии

$$\frac{8\pi N(B-A)}{P} < 1$$

Кроме того, величина $Pa^2/16\pi N$, т. е. величина прогиба в центре пластинки радиуса $a$, должна быть мала по сравнению с $a$ или, иначе, безразмерная величина

$$\frac{Pa}{16\pi N} \ll 1$$

При выполнении этого условия будут справедливы обычные уравнения теории пластинок, которые использованы в этой работе. Это условие также налагает некоторые ограничения на допустимые значения $A$ и $B$. Величина $1/(B-A)$ должна быть малой по сравнению с $a$. Это будет выполнено, в частности, тогда, когда радиусы кривизны тела малы по сравнению с радиусом пластинки.

Интересно отметить, что площадка контакта в рассмотренной задаче будет эллиптической, так же как и в задаче о давлении тела в форме эллипсоида на упругое полупространство.

Что касается давлений, действующих на площадке контакта, то в данном случае они будут приложены по контуру, так как на площадке контакта

$$\Delta\Delta w_1 = 0 \quad \text{и} \quad p(x, y) = 0$$

Для более точного определения давлений аппроксимация, принятая для уравнения поверхности, ограничивающей тело (3), является, очевидно, недостаточной.

Аналогия между плоской упруго-пластической задачей и задачей о контакте между твердым телом и упругой пластинкой позволяет сделать заключение, что граница площадки контакта в рассмотренном случае такова же, как и граница между упругой и пластической областью при растяжении пластинки с круговым отверстием.

Автор пользуется случаем, чтобы исправить одну неточность, содержащуюся в его работе[2]. В формуле (2.5) и последующих следует полагать $D=0$. Это соответствует растяжению и изгибу балки, показанному на фиг. 3 указанной работы.

Поступила в редакцию
25 III 1948

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Michell J. H. Proceedings of the London Math. Soc. 1902. Vol. 34.
2. Галин Л. А. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 3.