

ЗАМЕТКИ

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ, ЛЕЖАЩЕЙ  
 НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РЕБРАХ ЖЕСТКОСТИ

С. Г. Лехницкий

(Саратов)

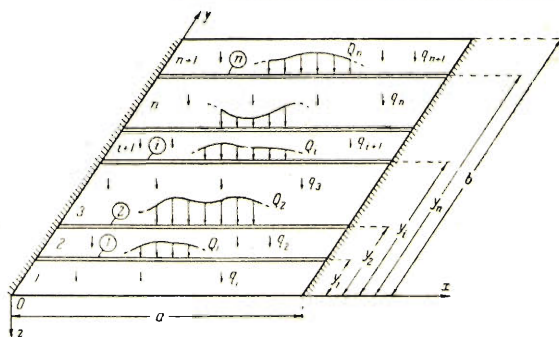
**1. Постановка задачи и обозначения.** В работе рассматривается задача об изгибе плоской прямоугольной пластинки (тонкой плиты) из анизотропного материала, усиленной ребрами жесткости, параллельными одной из сторон. Предполагается, что материал пластинки является ортотропным, т. е. имеет три плоскости упругой симметрии, из которых одна параллельна срединной плоскости пластинки, а две другие параллельны сторонам; пластинка покоится на упругих ребрах жесткости; главные оси инерции поперечных сечений ребер параллельны и перпендикулярны срединной плоскости. Нагрузка, деформирующая пластинку с ребрами, нормальна к срединной плоскости. Деформации системы полагаются малыми. Решение аналогичной задачи для изотропной пластинки с ребрами было получено А. С. Локшиным<sup>[1]</sup> (для случая равноотстоящих ребер одинаковой жесткости) и другим методом—А. П. Филиповым<sup>[2]</sup>. В нашей работе поставленная задача сводится к задаче об изгибе балки, растянутой осевыми усилиями и лежащей на сплошном упругом основании.

Направим оси координат  $x$  и  $y$  по сторонам пластинки (фиг. 1). Число ребер предполагаем равным  $n$ , и, следовательно, число участков пластинки будет  $n+1$ . Введем следующие обозначения:

а) для величин, относящихся к ребрам ( $i=1, 2, \dots, n$ ), пусть будет  $EJ_i, C_i$ — жесткости изгиба в плоскостях, параллельных  $xz$ , и жесткости кручения;  $W_i(x), \theta_i(x)$ —прогибы и узлы закручивания;  $Q_i(x)$ —нагрузки, действующие на ребра, на единицу длины;  $M_i, N_i$ —изгибающие моменты и перерезывающие силы в ребрах:

$$M_i = -EJ_i W_i'', \quad N_i = -EJ_i W_i''' \quad (1.1)$$

б) для величин, относящихся к пластинке ( $i=1, \dots, n+1$ ), пусть будет  $a, b, h$ —длина, ширина и толщина пластинки;  $y_i$ —расстояния от передней кромки пластинки до ребер;  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G$ —главные упругие постоянные материала: модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига;  $D_1, D_2, D_k$ —главные жесткости изгиба и жесткость кручения;  $w_i(x, y)$ —прогибы участков пластинки;  $M_{xi}, M_{yi}, H_i$ —изгибающие и скручивающие моменты;  $N_{xi}, N_{yi}$ —перерезывающие силы;  $R_{xi}$ —силы (реакции),  $q_i(x, y)$ —усилие нормальные к срединной плоскости, распределенные по участкам пластинки, на единицу площади.



Фиг. 1

Как известно (см., например, [3], стр. 145):

$$\begin{aligned} M_{xi} &= -D_1 \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right), & N_{xi} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( D_1 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \\ M_{yi} &= -D_2 \left( \nu_1 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right), & N_{yi} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left( D_3 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right) \\ H_i &= -2D_k \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y}, & R_{yi} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left[ (D_1 \nu_2 + 4D_k) \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$

причем

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{E_1 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}, & D_2 &= \frac{E_2 h^3}{12(1-\nu_1 \nu_2)}, & D_3 &= D_1 \nu_2 + 2D_k \\ D_k &= \frac{Gh^3}{12}, & R_{yi} &= N_{yi} + \frac{\partial H_i}{\partial x} \end{aligned}$$

**2. Уравнения прогибов и граничные условия.** При выводе общих уравнений будем предполагать, что стороны пластинки жестко заделаны, оперты или свободны, допуская любые комбинации этих видов закрепления, и что концы ребер жестко закреплены на сторонах  $x=0$ ,  $x=a$ . При изгибе системы изогнутая поверхность пластинки будет непрерывной и гладкой, без разрывов и изломов, а следовательно, перемещения должны удовлетворять условиям: ( $i=1, 2, \dots, n$ )

$$w_i(x, y_i) = w_{i+1}(x, y_i) = W_i(x), \quad \left( \frac{\partial w_i}{\partial y} \right)_{y=y_i} = \left( \frac{\partial w_{i+1}}{\partial y} \right)_{y=y_i} = \theta_i(x) \quad (2.1)$$

Задача об изгибе пластинки с ребрами равносильна задаче отыскания минимума выражения, равного потенциальной энергии деформации всей системы, соответствующей возможным перемещениям  $w_i$ ,  $W_i$ ,  $\theta_i$ , минус работа внешних сил на возможных перемещениях, т. е. выражения (см. [4], стр. 41 и [3], стр. 145 и 212–213)

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^a \int_{y_{i-1}}^{y_i} \left[ D_1 \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_1 \nu_2 \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} + \right. \\ &+ D_2 \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_k \left( \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} \right)^2 \left. \right] dx dy + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^a (EJ_i W_i''^2 + C_i \theta_i'^2) dx - \\ &- \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^a \int_{y_{i-1}}^{y_i} q_i w_i dx dy - \sum_{i=1}^n \int_0^a Q_i W_i dx \end{aligned} \quad (2.2)$$

( $y_0=0$ ,  $y_{n+1}=b$ )

Перемещения пластинки, вызванные нагрузкой  $q_i$  и  $Q_i$ , отличаются от всех возможных (при данных граничных условиях) тем, что они сообщают выражению (2.2) минимальное значение.

Разыскивая минимум выражения  $U$  по правилам вариационного исчисления, после ряда преобразований с учетом граничных условий и условий (2.1) (которым удовлетворяют как перемещения, так и их вариации  $\delta w_i$ ,  $\delta W_i$ ,  $\delta \theta_i$ ) получим

$$\begin{aligned} \delta U &= \sum_{i=1}^{n+1} \int_0^a \int_{y_{i-1}}^{y_i} \left( D_1 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} - q_i \right) \delta w_i dx dy + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_0^a \left[ (R_{yi} - R_{y,i+1} + EJ_i w_i^{IV} - Q_i)_{y=y_i} \delta W_i + \right. \\ &\left. + (M_{yi} - M_{y,i+1} + C_i \theta_i'')_{y=y_i} \delta \theta_i \right] dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пологая  $\delta U=0$ , получим дифференциальные уравнения для прогибов и в дополнение к условиям (2.1) еще по два условия для каждого ребра (т. е. для линии

сопряжения участков пластинки, так как шириной ребра в этих расчетах пренебрегаем). Результаты сводятся к следующему. Прогобы участков пластинки удовлетворяют:

а) дифференциальным уравнениям (обычным для ортотропной пластинки (см.131, стр. 147))

$$D_1 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w_i}{\partial y^4} = q_i \quad (i=1, \dots, n+1) \quad (2.4)$$

б) условиям на линиях сопряжения участков

$$\begin{aligned} w_{i+1} &= w_i, & M_{y,i+1} - M_{yi} &= C_i \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^2 \partial y} \\ \frac{\partial w_{i+1}}{\partial y} &= \frac{\partial w_i}{\partial y}, & R_{y,i+1} - R_{yi} &= EJ_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} - Q_i \end{aligned} \quad (i=1, \dots, n) \quad (2.5)$$

в) условиям на сторонах пластинки, зависящим от их закрепления (например, если стороны  $x=0, x=a$  оперты, то на них  $w_i = M_{xi} = 0$ , если стороны  $y=0, y=b$  жестко заделаны, то на них  $w_1 = \partial w_1 / \partial y = 0, w_{n+1} = \partial w_{n+1} / \partial y = 0$ , и т. д.

3. Аналогия с балкой. Рассмотрим случай, когда стороны  $x=0, x=a$ , где укреплены концы ребер, оперты, а две другие стороны закреплены произвольно, но однородно по всей длине. Разложим нагрузки  $q_i$  и  $Q_i$  в ряды Фурье.

$$q_i = \sum_{k=1}^{\infty} q_{ik}(y) \sin \beta x, \quad Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{ik} \sin \beta x \quad \left( \beta = \frac{k\pi}{a} \right) \quad (3.1)$$

Решения уравнений (2.4), удовлетворяющие условиям на опертых сторонах, будем искать в форме

$$w_i = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik}(y) \sin \beta x \quad (3.2)$$

Для функций  $f_{ik}$  ( $i=1, 2, \dots, n+1; k=1, 2, \dots, \infty$ ) получим дифференциальные уравнения

$$D_2 f_{ik}^{IV} - 2D_3 \beta^2 f_{ik}'' + D_1 \beta^4 f_{ik} = q_{ik}(y) \quad (3.3)$$

и условия на линиях  $y=y_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), которые будут иметь вид

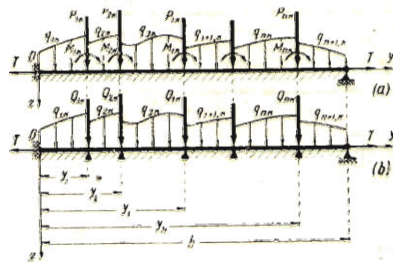
$$\begin{aligned} f_{i+1,k} &= f_{ik}, & f_{i+1,k}'' - f_{ik}'' &= \frac{C_i}{D_2} \beta^2 f_{ik}' \\ f_{i+1,k}' &= f_{ik}', & f_{i+1,k}''' - f_{ik}''' &= \frac{Q_{ik}}{D_2} - \frac{EJ_i}{D_2} \beta^4 f_{ik} \end{aligned} \quad (i=1, \dots, n) \quad (3.4)$$

Если стороны  $y=0, y=b$  заделаны жестко, то на них  $f_{ik} = f_{ik}' = 0$ , а если оперты, то  $f_{ik} = f_{ik}'' = 0$  ( $i=1$  и  $i=n+1$ ).

При данном  $k$ , равно какому-нибудь целому числу — 1, 2, 3 и т. д., функции  $f_{ik}(y)$  можно рассматривать как прогибы участков некоторой балки. Уравнения (3.3) показывают, что эта балка имеет постоянную жесткость  $D_2$ , растянута осевой силой  $T = 2D_3 \beta^2$  и лежит на силовом упругом основании с коэффициентом упругости, равным  $D_1 \beta^4$ . Условия (3.4) показывают, что к балке, кроме нагрузки  $q_{ik}$ , распределенной по участкам, приложены сосредоточенные моменты  $M_{ik}$  и силы  $P_{ik}$  в точках  $y = y_i$  на границах участков (фиг. 2а).

Моменты пропорциональны углам поворотов  $f_{ik}'$ , а силы являются линейными функциями прогибов  $f_{ik}$  в точках их приложения:

$$M_{ik} = C_i \beta^2 f_{ik}'(y_i), \quad P_{ik} = Q_{ik} - EJ_i \beta^4 f_{ik}(y_i) \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.5)$$



Фиг. 2

Последнее показывает, что в точках  $y=y_i$  имеются упруго вращающиеся и одновременно упруго податливые опоры, у которых жесткости при повороте и при осадке равны  $C_i \beta^2$  и  $EJ_i \beta^4$ . Таким образом, окончательно функции  $f_{ik}$  можно рассматривать как прогибы участков балки с  $n$  промежуточными упруго вращающимися и упруго податливыми опорами, нагруженной заданной сплошной нагрузкой  $q_{ik}$  и заданными силами  $Q_{ik}$ , приложенными к опорам (фиг. 2 (b)). Концы балки закреплены в соответствии с закреплением сторон  $y=0$  и  $y=b$  пластинки.

Установив вышеуказанную аналогию, мы можем для определения функций  $f_{ik}$  использовать методы расчета многопролетных балок

**4. Общий метод определения прогибов.** Укажем один из методов решения задачи. Пусть  $\delta(\eta, y)$  — функция влияния силы для данной балки, растянутой осевой силой и лежащей на сплошном упругом основании, т. е. прогиб в точке  $y$  от силы, равной единице, приложенной в точке  $\eta$ , и  $\Delta(\eta, y)$  — функция влияния момента, т. е. прогиб в точке  $y$  от момента, равного единице, приложенного в точке  $\eta$  (фиг. 3). Вид этих функций зависит от корней  $\pm u_1, \pm u_2$  характеристического уравнения

$$D_2 u^4 - 2D_3 u^2 + D_1 = 0 \quad (4.1)$$

которые в зависимости от соотношения между жесткостями могут получиться вещественными неравными или парно равными, или комплексными (чисто мнимых корней получить не может, см. [3], стр. 295, 296 и 154). В случае вещественных корней в состав  $\delta$  и  $\Delta$  входят показательные или гиперболические функции, в случае комплексных корней — гиперболические и тригонометрические. Функции влияния зависят также от  $\beta$ , т. е. от  $k=1, 2, 3, \dots$ , но для сокращения записи индекс  $k$  будем опускать.

В нашей книге [3] приведены выражения  $\delta$  и  $\Delta$  и таблицы их значений для некоторых случаев (стр. 295 — 300). Введем обозначения

$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= \delta(y_i, y_j), & \Delta_{ij} &= \Delta(y_i, y_j), \\ \delta_{ij}' &= \left[ \frac{\partial \delta(y_i, y)}{\partial y} \right]_{y=y_j}, & \Delta_{ij}' &= \left[ \frac{\partial \Delta(y_i, y)}{\partial y} \right]_{y=y_j} \end{aligned}$$

Пусть  $f_k(y)$  — прогиб балки в любом месте, т. е. функция, принимающая на участках балки значения  $f_{1k}, f_{2k}, \dots, f_{n+1,k}$ . Обозначим через  $F_k(y)$  частное решение неоднородного уравнения (3.3), зависящее от распределения нагрузки  $q_k$ ; на разных участках балки  $F_k$  может иметь различные аналитические выражения.

Общее выражение для прогиба балки представится следующим образом:

$$f_k(y) = \sum_{j=1}^n [P_{jk} \delta(y_j, y) + M_{jk} \Delta(y_j, y)] + F_k(y) \quad (4.2)$$

Частное решение  $F_k$  тоже можно выразить через функции влияния:

$$F_k = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{y_{i-1}}^{y_i} q_{ik}(\eta) \delta(\eta, y) d\eta \quad (4.3)$$

Коэффициенты  $P_{jk}$  и  $M_{jk}$  определяются из условий (3.5), которые приводят к системе  $2n$  уравнений с  $2n$  неизвестными

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n P_{rk} \left( \delta_{rs}' + \sum_{r=1}^n M_{rk} \left( \Delta_{rs}'' - \frac{\delta}{C_{sr} \beta^2} \right) \right) &= F_k'(y_s) \\ \sum_{r=1}^n P_{rk} \left( \delta_{sr} + \frac{\delta}{EJ_{sr} \beta^4} \right) + \sum_{r=1}^n M_{rk} \Delta_{sr} &= \frac{Q_{sk}}{EJ_{sr} \beta^4} - F_k(y_s) \end{aligned} \quad (s=1, \dots, n) \quad (4.4)$$

Здесь символ  $\delta$  принимает значение  $\delta = 0$  при  $r \neq s$  и  $\delta = 1$  при  $r = s$ . Решив эту систему уравнений, получим следующие выражения: для прогиба пластинки

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^n [P_{jk} \delta(y_j, y) + M_{jk} \Delta(y_j, y)] + F_k(y) \right\} \sin \beta x \quad (4.5)$$

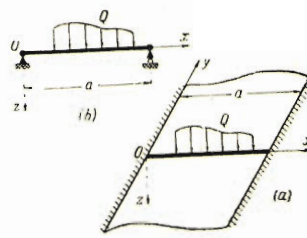
для прогибов ребер

$$W_i = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \sum_{j=1}^n (P_{jk} \delta_{ji} + M_{jk} \Delta_{ji}) + F_k(y_i) \right] \sin \beta x \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.6)$$

Если жесткостями кручения  $C_i$  пренебречь, как это делает, например, А. С. Локшин в работе [1], то система (4.4) и выражения (4.5) и (4.6) упрощаются. Все моменты будут равны нулю:  $M_{jk} = 0$ ; останутся только коэффициенты  $P_{jk}$ , и число уравнений для их определения станет равным числу ребер —  $n$ .

Указанный общий метод удобен для применения на практике в тех случаях, когда число ребер мало (1—3 ребра). При большом числе ребер определение  $P_{jk}$  и  $M_{jk}$  из системы (4.4) связано с громоздкими вычислениями. В этих случаях можно воспользоваться другими методами расчета, быстрее приводящими к цели, но мы на них в настоящей статье останавливаться не будем.

**5. Случай одного ребра.** Рассмотрим прямоугольную пластинку, подкрепленную по оси симметрии одним ребром с жесткостями  $C$  и  $EJ$  ( $n = 1, y_1 = \frac{1}{2} b$ ). Предположим, что нагрузка  $Q$ , действующая на ребро, произвольна, а нагрузка  $q_1, q_2$ , действующая на пластинку, распределена симметрично относительно ребра, т. е.  $q_1(x, y) = q_2(x, b - y)$ . Стороны пластинки, перпендикулярные к ребру, считаем опертymi, а стороны, параллельные ребру, закрепленными произвольно, но одинаково (например, обе стороны опоры или обе заделаны и т. д.).



Фиг. 4

В силу симметрии  $F_k'(\frac{1}{2} b) = 0, \delta_{11}' = \Delta_{11} = 0$ ; следовательно,

$$M_{1k} = 0, \quad P_{1k} = \frac{Q_k - EJ\beta^4 F_k(\frac{1}{2} b)}{1 + EJ\beta^4 \delta_{11}} \quad (5.1)$$

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{Q_k - EJ\beta^4 F_k(\frac{1}{2} b)}{1 + EJ\beta^4 \delta_{11}} \delta\left(\frac{b}{2}, y\right) + F_k(y) \right] \sin \beta x \quad (5.2)$$

где  $Q_k$  — коэффициенты разложения нагрузки  $Q(x)$  в ряд по синусам,  $\beta = k\pi/a$ .

Остановимся на одном простом случае. Рассмотрим бесконечную ортотропную полосу, опертую по краям, и жестко связанную с ней балку (ребро), на которую действует произвольная нагрузка  $Q$ . Направим ось  $x$  по оси балки, а ось  $y$  по одной из сторон полосы (фиг. 4а).

Функция влияния для случая неравных корней  $\pm u_1, \pm u_2$  уравнения (4.1) имеет вид

$$\delta(\eta, y) = \frac{1}{2\beta^3 \sqrt{D_1 D_2 (u_1^2 - u_2^2)}} [u_1 e^{\beta u_2 (y - \eta)} - u_2 e^{\beta u_1 (y - \eta)}] \quad (5.3)$$

для  $\eta \leq y < \infty$ .

$$\delta(\eta, y) = \frac{1}{2\beta^3 \sqrt{D_1 D_2 (u_1^2 - u_2^2)}} [u_1 e^{\beta u_2 (\eta - y)} - u_2 e^{\beta u_1 (\eta - y)}] \quad (5.4)$$

В рассматриваемом случае величины, входящие в выражение прогиба, имеют вид

$$F_k = 0, \quad \delta_{11} = \delta(0, 0) = \frac{1}{2\beta^3 \sqrt{D_1 D_2} (u_1 + u_2)} \quad (5.5)$$

Прогиб полосы перед балкой, т. е. для  $-\infty < y < 0$ :

$$w = \frac{1}{u_1 - u_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k (u_1 e^{\beta u_2 y} - u_2 e^{\beta u_1 y})}{EJ\beta^4 + 2\sqrt{D_1 D_2} (u_1 + u_2) \beta^3} \sin \beta x \quad (5.6)$$

Прогиб полосы за балкой ( $0 < y < \infty$ ) получим, заменяя  $y$  на  $-y$ . Прогиб балки  $W = w(0)$  будет

$$W = \frac{a^4}{EJ\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{k^4 [1 + b_k (u_1 + u_2)]} \sin \frac{k\pi x}{a} \quad \left( b_k = \frac{2a \sqrt{D_1 D_2}}{EJ\pi k} \right) \quad (5.7)$$

Для балки с опертыми концами, не скрепленной с полосой, т. е. перекрывающей свободное пространство, прогиб  $W^*$ , вызванный той же нагрузкой  $Q$ , будет

$$W^* = \frac{a^4}{EJ\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{k^4} \sin \frac{k\pi x}{a} \quad (5.8)$$

Сопоставляя формулы (5.7) и (5.8), можно заметить, что полосу, с которой скреплена балка, нельзя рассматривать как упругое основание по Винклеру. Для балки на упругом основании с коэффициентом постели  $\alpha$  будет

$$W = \frac{a^4}{EJ\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{k^4 (1 + c_k \alpha)} \sin \frac{k\pi x}{a} \quad \left( c_k = \frac{a^4}{EJ\pi^4 k^4} \right) \quad (5.9)$$

Очевидно, эта функция не совпадает с (5.7).

Если нагрузка распределена по балке равномерно, то  $Q_k = 4Q/k\pi$  для  $k=1, 3, 5, \dots$  и  $Q=0$  для  $k=2, 4, 6, \dots$ . Тогда все члены рядов в формулах (5.7) и (5.8), соответствующие четным  $k$ , выпадают, а оставшиеся будут быстро убывать. Сохраняя в выражениях для  $W$  и  $W^*$  только первые члены рядов, получим приближенную формулу для оценки прогиба балки на упругой полосе

$$W(x) = W^*(x) \frac{1}{1 + b_1 (u_1 + u_2)} \quad \left( b_1 = \frac{2a \sqrt{D_1 D_2}}{EJ\pi} \right) \quad (5.10)$$

Для изотропной полосы с модулем Юнга  $E'$  и коэффициентом Пуассона  $\nu'$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D = \frac{E'h^3}{12(1-\nu'^2)}, \quad u_1 = u_2 = 1$$

Формулы для прогибов в этом случае получим из (5.6) и (5.7) предельным переходом. Приближенная формула (5.10) примет вид

$$W = W^* \frac{1}{1 + b} \quad \left( b = \frac{4aD}{EJ\pi} \right) \quad (5.11)$$

Поступила в редакцию  
25 II 1948

Институт механики и физики  
Саратовского государственного университета

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Локшин А. С. К расчету пластин, подкрепленных жесткими ребрами. Прикладная математика и механика. Л. 1935. Т. II. вып. 2.
2. Филиппов А. П. Прямоугольные пластинки, подкрепленные упругими ребрами и точечными упругими опорами. ПММ. 1937. т. I. Вып. 2.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат. 1947.
4. Третьяк Е. Математическая теория упругости. ОНТИ ГТТИ. 1934.