Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

О НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Д. И. Шерман

(Москва)

§ 1. Предположим, что в пространстве с системой координат xyz некоторая область V заполняет конечный объем и ограничена выпуклой поверхностью S, имеющей непрерывную кривизну. За положительное направление нормали n к S примем направление, внешнее к области V.

Пусть требуется определить функцию $u(x, y, z)$, непрерывную в замкнутой области V вместе со своими производными до m-го порядка (включительно), удовлетворяющую в V уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и на поверхности S предельному равенству

$$\sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} a_{k-l,\, l-j,\, j} \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-l} \partial y^{l-j} \partial z^j} = f(x, y, z) \tag{1.1}$$

где a_{klj} и f — известные функции. При этом будем считать, что для любых двух смежных точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ поверхности S имеет место неравенство (1.2)

$$|a_{klj}(M_1) - a_{klj}(M_2)| < N r_{12}, \qquad r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

где N — некоторое фиксированное число. Относительно же функции f допустим, что она непрерывна на S.

Покажем, что сформулированная задача может быть сведена к интегральному уравнению Фредгольма. Функцию $u(x, y, z)$ будем искать в виде

$$u(x, y, z) = \int_S \nu F(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, dS \tag{1.3}$$

где ν — плотность, подлежащая определению, $M(\xi, \eta, \zeta)$ — точка на S, и

$$F = \frac{|c|}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int \omega e^{i\{\alpha(x-\xi) + \beta(y-\eta)\} + \{a(x-\xi) + b(y-\eta) + c(z-\zeta)\}\gamma}\, d\alpha\, d\beta \tag{1.4}$$

причем

$$\omega = \Big[\sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} a_{k-l,\, l-j,\, j} (i\alpha + a\gamma)^{k-l} (i\beta + b\gamma)^{l-j} (c\gamma)^j \Big]^{-1} \tag{1.5}$$

$$\gamma = -i(a\alpha + b\beta) + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - (a\alpha + b\beta)^2} \tag{1.6}$$

и a, b, и c — направляющие косинусы нормали в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$ соответственно с осями x, y и z. Как легко видеть, выражение, содержащееся под знаком радикала в формуле (1.6), неотрицательно; условимся под этим радикалом понимать его арифметическое значение.

Отметим, что так как по условию поверхность S выпуклая, то для точек $M(x, y, z)$, принадлежащих области V, имеет место неравенство

$$a(x-\xi)+b(y-\eta)+c(z-\zeta)<0 \tag{1.7}$$

Введем в формуле (1.4) вместо α и β новые переменные интегрирования $\rho \geqslant 0$ и θ по формулам

$$\alpha=\rho\cos\theta, \qquad \beta=\rho\sin\theta \tag{1.8}$$

Тогда после очевидных преобразований из (1.4) получим [1]

$$F=\operatorname{Re}\frac{|c|}{2\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty}\omega\rho\, e^{-\rho\chi}\, d\rho\, d\theta \tag{1.9}$$

Здесь введены обозначения:

$$\chi=-[i\{(x-\xi)\cos\theta+(y-\eta)\sin\theta\}+\{a(x-\xi)+b(y-\eta)+c(z-\zeta)\}g]$$
$$g=-i(a\cos\theta+b\sin\theta)+\sqrt{1-(a\cos\theta+b\sin\theta)^2} \tag{1.10}$$

$$\omega=\left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\rho^k a_{k-l,\,l-j,\,j}(i\cos\theta+ag)^{k-l}(i\sin\theta+bg)^{l-j}(cg)^j\right]^{-1} \tag{1.11}$$

причем под радикалом во второй из формул (1.10) также понимается его арифметическое значение.

Для простоты будем считать, что выражение в квадратных скобках последнего равенства, являющееся полиномом m-й степени относительно ρ, не обращается в нуль[2] при вещественных и неотрицательных значениях ρ. В этом случае из формулы (1.7) и указанного выбора значения радикала в (1.6), вытекает существование интеграла (1.3).

---

[1] Проведем в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$ касательную плоскость к поверхности S. Тогда функция F будет гармонической в полупространстве, содержащем отрицательную полуось нормали, проведенной в $M(\xi, \eta, \zeta)$. На касательной же плоскости она будет удовлетворять граничному условию вида (1.1), в котором коэффициенты a_{klj} следует считать постоянными величинами, равными их значениям в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$, а функцию f (на основании нижеприводимых равенств (2.6), (2.11)) равной нулю всюду, за исключением некоторой окрестности Ω той же точки; при этом в точках Ω нужно положить $f=\Omega^{-1}$; за окрестность Ω можно также принять поверхность полусферы, расположенной в указанном полупространстве, сколь угодно малого радиуса и с центром в $M(\xi, \eta, \zeta)$.

Таким образом, из сказанного ясно, что функция F является аналогом так называемого фундаментального решения для нашей задачи.

[2] Это допущение не является существенным и принято лишь для простоты В самом деле, пусть выражение в (1.11) имеет, например, положительный корень $\rho_1(\xi, \eta, \zeta; \theta)$ кратности k. Тогда можно придать смысл интегралу (1.9), заменив подинтегральную функцию следующей, также гармонической (см. примечание IV § 2)

$$\omega\left[\rho e^{-\rho\chi}-\left\{\sum_{1}^{k-1}(-1)^{k_1-1}\frac{(\rho-\rho_1)^{k_1}\chi^{k_1-1}}{(k_1-1)!}\left(1-\rho_1\frac{\chi}{k_1}\right)-\rho_1\right\}e^{-\rho_1\chi}\right]$$

§ 2. Обозначив подинтегральную функцию в равенстве (1.9) через G, перепишем его в следующем виде:

$$F = Re\,\frac{|c|}{2\pi^2}\left\{\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{A} G d\rho\, d\theta + \int\limits_0^{\pi}\int\limits_A^{\infty} G d\rho\, d\theta\right\} \tag{2.1}$$

где A — достаточно большое фиксированное положительное число.

Первое слагаемое, заключающееся в фигурных скобках последней формулы, остается непрерывным вместе со своими производными до любого порядка по переменным x, y и z при переходе точки $M(x, y, z)$ сквозь поверхность S. Во втором слагаемом той же формулы разложим формально множитель $\omega\rho$, содержащийся под знаком интеграла в выражении для G, по степеням $1/\rho$. Тогда получим

$$\int\limits_0^{\pi}\int\limits_A^{\infty} G d\rho\, d\theta = \int\limits_0^{\pi} \omega_0(\xi, \eta, \zeta; \theta)\, d\theta \int\limits_A^{\infty} e^{-\rho\mu}\frac{d\rho}{\rho^{m-1}} + \ldots \tag{2.2}$$

где

$$\omega_0 = \left[\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=0}^{l} a_{m-l,\, l-j,\, j}\,(i\cos\theta + ag)^{m-l}\,(i\sin\theta + lg)^{l-j}\,(cg)^j\right]^{-1} \tag{2.3}$$

и под многоточием подразумеваются слагаемые, содержащие в знаменателе подинтегральной функции ρ в более высоких степенях.

Предположим, что разложение (2.2) на самом деле имеет место. Для этого достаточно, чтобы выражение в квадратных скобках в равенстве (2.3) не обращалось в нуль при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Нетрудно установить условия, при которых это выполняется. Выберем новую систему координат $x_1 y_1 z_1$ с началом в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$, и за ось z_1 примем направление нормали в этой точке. Тогда граничное условие (1.2) перепишется в виде

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} b_{k-l,\, l-j,\, j}\,\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k-l}\,\partial y_1^{l-j}\,\partial z_1^{j}} = f$$

где b_{klj} — некоторые линейные комбинации коэффициентов a_{klj}.

Отсюда, учитывая смысл функции F (см. сноску 1 на стр. 330), получим

$$F = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{\infty}\omega_1\,\rho\exp\rho\,\{i\,(x_1\cos\theta + y_1\sin\theta) + z_1\}\,d\rho\, d\theta$$

Здесь

$$\omega_1 = \left[\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} i^{k-j}\, b_{k-l,\, l-j,\, j}\,\rho^k\cos^{k-l}\theta\,\sin^{l-j}\theta\right]^{-1}$$

В случае, когда коэффициенты a_{klj} постоянные величины, удобнее, как будет ясно из § 3, если корень ρ_1 простой, понимать интеграл (1.9) (не изменяя подинтегральной функции в нем) в смысле главного значения по Коши, или же, если ρ_1 — кратный корень, заменить в плоскости ρ на положительном луче при интегрировании некоторую окрестность точки с абсциссой ρ_1 полуокружностью с центром в этой же точке. Аналогичным образом следует поступить также в том случае, когда знаменатель выражения (1.11) имеет несколько простых или кратных положительных корней.

Из этих формул ясно, что сделанное предположение относительно выражения в (2.3) может быть заменено требованием, чтобы тригонометрический полином

$$\sum_{l=0}^{m} \sum_{j=0}^{l} i^{m-j} b_{m-l,\, l-j,\, j} \cos^{m-l}\theta \sin^{l-j}\theta$$

не имел вещественных корней в интервале $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Соотношения, которым должны для этого удовлетворять коэффициенты $b_{m-l,\, l-j,\, j}$, могут быть без труда выписаны [1].

Далее, с помощью последовательного интегрирования по частям найдем

$$\int_A^\infty e^{-\rho\chi} \frac{d\rho}{\rho^{m-1}} = (-1)^{m-3} e^{-A\chi} \frac{\chi^{m-3}}{A(m-2)!} \sum_0^{m-3} (-1)^k \frac{k!}{(A\chi)^k} + \frac{(-1)^{m-2}\chi^{m-2}}{(m-2)!} \int_A^\infty e^{-\rho\chi} \frac{d\rho}{\rho}$$

Отсюда, переписав интеграл в правой части этой формулы в виде

$$\int_A^\infty e^{-\rho\chi} \frac{d\rho}{\rho} = \int_0^\infty \frac{e^{-\rho\chi} - e^{-\rho}}{\rho} d\rho - \int_0^A \frac{e^{-\rho\chi} - e^{-\rho}}{\rho} d\rho + \int_A^\infty \frac{e^{-\rho}}{\rho} d\rho$$

и принимая во внимание равенство

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\rho\chi} - e^{-\rho}}{\rho} d\rho = -\log\chi$$

найдем [1]

$$\int_A^\infty e^{-\rho\chi} \frac{d\rho}{\rho^{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-2)!} \chi^{m-2} \log\chi + \ldots \tag{2.4}$$

После этого, возвращаясь к формуле (2.2), получим

$$F = \operatorname{Re} \frac{(-1)^{m-1}|c|}{2\pi^2(m-2)!} \int_0^\pi \omega_0 \chi^{m-2} \log\chi \, d\theta + \ldots \tag{2.5}$$

где под многоточием понимаются слагаемые, содержащие под знаком интегралов функции, частные производные m-го порядка от которых по координатам x, y и z либо остаются непрерывными, либо имеют особенность типа χ^{-1} или $\log\chi$, когда точка $M(x, y, z)$ лежит на S.

Введем теперь функцию

$$Q = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} a_{k-l,\, l-j,\, j}(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^k F}{\partial x^{k-l} \partial y^{l-j} \partial z^j} \tag{2.6}$$

где значения коэффициентов a_{klj} (так же, как в выражении для ω_0) берутся в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$. На основании (1.9) будем для нее иметь

$$Q = \operatorname{Re} \frac{|c|}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\chi^2} \tag{2.7}$$

---

[1] Очевидно, в (2.4) не выписаны слагаемые, остающиеся непрерывными вместе со своими частными производными любого порядка по переменным x, y и z при переходе точки $M(x, y, z)$ сквозь поверхность S.

Далее, положим

$$P = \frac{|c|}{2\pi^2}\int_0^\pi \frac{d\theta}{\chi^2}, \quad T = \frac{|c|}{2\pi^2}\int_0^\pi \frac{d\theta}{\chi\sqrt{1-(a\cos\theta + b\sin\theta)^2}} \tag{2.8}$$

Как легко проверить,

$$P = \frac{dT}{dn} \tag{2.9}$$

где n — нормаль к поверхности S в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$.

После некоторых вычислений найдем

$$T = -\frac{1}{2\pi r}, \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \tag{2.10}$$

и в связи с этим из равенства (2.7) получим

$$Q = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dn}\frac{1}{r} \tag{2.11}$$

Составим теперь частные производные до m-го порядка по переменным x, y и z от выражения (1.3) для искомой функции и перейдем в них к пределу, устремляя $M(x, y, z)$ к некоторой точке $M(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, лежащей на S; затем, подставив эти предельные значения в условие (1.2) и учитывая равенства (2.6) и (2.11), получим после простых преобразований для определения плотности ν уравнение Фредгольма:

$$\nu_0 + \int_S \nu K(\xi, \eta, \zeta; \xi_0, \eta_0, \zeta_0)\, dS = f_0 \tag{2.12}$$

где индекс нуль при функциях ν и f указывает, что берутся их значения в точке $M(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ и ядро может быть записано в виде

$$K = -\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dn}\frac{1}{r_0} + \tag{2.13}$$

$$+\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}\{a_{k-l,\, l-j,\, j}(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) - a_{k-l,\, l-j,\, j}(\xi, \eta, \zeta)\}\frac{\partial^k F}{\partial\xi_0^{k-l}\,\partial\eta_0^{l-j}\,\partial\zeta_0^{j}}$$

$$\left(r_0 = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2 + (\zeta-\zeta_0)^2}\right)$$

Как нетрудно убедиться, учитывая формулу (2.5), ядро K абсолютно интегрируемо на поверхности S.

В самом деле, допустим для удобства, что начало выбранной системы координат совпадает с точкой $M(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ и отрицательная полунормаль в последней взята за ось z. Кроме того, будем считать (это также несущественно и принимается для простоты), что некоторая выделенная на поверхности S окрестность Ω начала координат лежит в плоскости xy. При этих условиях рассмотрим какое-либо слагаемое из (2.13) с некоторой производной m-го порядка от функции F. Тогда, считая точку $M(\xi, \eta, 0)$ изменяющейся на Ω, будем иметь соотношение

$$\frac{\partial^m F}{\partial x^{m-l}\,\partial y^{l-j}\,\partial z^j} = \frac{\partial}{\partial z}\int_0^{2\pi} g\frac{1}{\chi_1}\, d\theta$$

где выписано слагаемое, относящееся лишь к первому члену разложения (2.5):

$$\chi_1 = i\{(x-\xi)\cos\theta + (y-\eta)\sin\theta\} - z$$

и $g = g_1 + ig_2$ — некоторая функция, причем ее мнимая часть может быть представлена в виде $g_2 = g_2^{(1)}\sin\theta + g_2^{(2)}\cos\theta$, где $g_2^{(1)}$ и $g_2^{(2)}$ дифференцируемы по θ. Далее, положив, например,

$$J = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\chi_1} g_2^{(2)}(\theta)\cos\theta\, d\theta$$

с помощью интегрирования по частям и несложных вычислений найдем

$$J = -2\pi i\, g_2^{(2)}(0)\frac{(x-\xi)}{r(r+z)} - \int\limits_0^{2\pi} g_2^{(2)\prime}(\theta)\,\psi\, d\theta \tag{2.14}$$

где

$$\psi = -i\frac{x-\xi}{r(r+z)}\theta + \frac{1}{i[i(x-\xi)+(y-\eta)]}\left[\frac{(r+z)^2+\{i(x-\xi)+(y-\eta)\}^2}{2r(r+z)}\log\frac{1-e^{i\theta}t_1}{1-t_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{(r-z)^2+\{i(x-\xi)+(y-\eta)\}^2}{2r(r-z)}\log\frac{1+e^{-i\theta}t_2}{1+t_2}\right]$$
$$t_1 = \frac{i(x-\xi)+(y-\eta)}{r+z}, \qquad t_2 = -\frac{i(x-\xi)-(y-\eta)}{r+z}$$

Легко проверить, что второе слагаемое в правой части равенства, определяющего ψ, остается непрерывным при $x\to\xi$, $y\to\eta$ и $z\neq 0$.

Аналогичные формулы получим для других интегралов, заключающихся в первом слагаемом равенства (2.14).

Отсюда, перейдя в (2.14) к пределу при $x\to\xi_0$, $y\to\eta_0$ и учитывая множитель $a_{k-l,\,l-j,\,j}(\xi_0,\eta_0,0) - a_{k-l,\,l-j,\,j}(\xi,\eta,0)$, который имеет рассматриваемое слагаемое из (2.13), легко убеждаемся, что оно абсолютно интегрируемо на поверхности. То же заключение можно сделать и для остальных слагаемых из (2.13), как содержащих производные m-го порядка, так тем более производные низшего порядка от функции F.

Отметим, что вопрос о существовании искомого решения и возможности представления его в форме (1.3) остается открытым. Он требует особого рассмотрения в каждом отдельном случае.

Примечание I. В частном случае задачи Дирихле в условии (1.2) коэффициенты $a_{klj} = 0$ $(k, l, j \neq 0)$ и $a_{000} = 1$. При этом в силу соотношений (2.7) и (2.11) функция $u(x, y, z)$, как следовало ожидать, выражается потенциалом двойного слоя и уравнение (2.12) принимает обычный для этой задачи вид

$$\nu_0 - \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nu\frac{d}{dn}\frac{1}{r_0}\, dS = f_0 \tag{2.15}$$

Примечание II. В задаче Неймана имеем $a_{100} = \cos(n, x)$, $a_{010} = \cos(n, y)$, $a_{001} = \cos(n, z)$; остальные коэффициенты равны нулю. В этом случае из соотношений (2.8) и (2.10) вытекает, что функция $u(x, y, z)$ (это также следовало ожидать) выражается посредством потенциала простого слоя с плотностью, определяемой из уравнения

$$\nu_0 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \nu\frac{d}{dn_0}\frac{1}{r_0}\, dS = f_0 \tag{2.16}$$

Примечание III. Предположим теперь, что в (1.2) все коэффициенты, исключая a_{100}, a_{010} и a_{001}, тождественно равны нулю. В этом случае обозначая для удобства a_{100}, a_{010} и a_{001} соответственно через k, l и m, получим после довольно длинных вычислений

$$F = \frac{(ak+bl+cm)\,r + \{a(x-\xi)+b(y-\eta)+c(z-\zeta)\}\sqrt{k^2+l^2+m^2}}{2\pi\sqrt{k^2+l^2+m^2}\,r\,[\sqrt{k^2+l^2+m^2}\,r + \{k(x-\xi)+l(y-\eta)+m(z-\zeta)\}]} \tag{2.17}$$

при условии

$$ak+bl+cm < 0 \tag{2.18}$$

и

$$F = \frac{(ak+bl+cm)\,r - \{a(x-\xi)+b(y-\eta)+c(z-\zeta)\}\sqrt{k^2+l^2+m^2}}{2\pi\sqrt{k^2+l^2+m^2}\,r\,[\sqrt{k^2+l^2+m^2}\,r - \{k(x-\xi)+l(y-\eta)+m(z-\zeta)\}]} \tag{2.19}$$

если имеет место обратное неравенство

$$ak+bl+cm > 0 \tag{2.20}$$

Наконец, можно взять либо

$$F = \frac{a(x-\xi)+b(y-\eta)+c(z-\zeta)}{2\pi r\,[\sqrt{k^2+l^2+m^2}\,r + \{k(x-\xi)+l(y-\eta)+m(z-\zeta)\}]} \tag{2.21}$$

либо [1]

$$F = -\frac{a(x-\xi)+b(y-\eta)+c(z-\zeta)}{2\pi r\,[\sqrt{k^2+l^2+m^2}\,r - \{k(x-\xi)+l(y-\eta)+m(z-\zeta)\}]} \tag{2.22}$$

если

$$ak+bl+cm = 0 \tag{2.23}$$

Пусть S_j ($j=1, 2, 3$) — части поверхности S, на которых последовательно выполняются условия (2.18), (2.20) и (2.23). Тогда, положив

$$u(x, y, z) = \sum_{j=1}^{3}\int_{S_j} \nu F_j(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\,dS \tag{2.24}$$

---

[1] Как ясно из выписанных формул для F, условие выпуклости поверхности S является, вообще говоря, существенным.

В самом деле, проведем из некоторой точки $M(\xi, \eta, \zeta)$, лежащей на S, прямую

$$\frac{x-\xi}{k} = \frac{y-\eta}{l} = \frac{z-\zeta}{m} = \lambda$$

Записав параметр λ в виде

$$\lambda = \frac{a(x-\xi)+b(y-\eta)+c(z-\zeta)}{ak+bl+cm}$$

заключаем, что он будет положительным при условии (2.18) для всех точек $M(x, y, z)$ указанной прямой, расположенных внутри поверхности S, если последняя выпуклая. При этом знаменатель в формуле (2.17) (соответствующей (2.18)) нигде внутри S не обращается в нуль. Если же поверхность S не выпуклая, то может оказаться, что в некоторых точках той же прямой выражение

$$a(x-\xi)+b(y-\eta)+c(z-\zeta) > 0$$

и, следовательно, $\lambda < 0$. Очевидно, в этих же точках знаменатель формулы (2.17) будет тождественно равен нулю и последняя потеряет смысл.

Аналогичное будет справедливо для остальных формул (2.19), (2.21) [или (2.22)].

где F_j $(j=1, 2, 3)$ — соответствующее из выражений (2.17), (2.19) и (2.21) (или (2.22)), мы сведем задачу к уравнению Фредгольма.

Примечание IV. Из соотношения

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)^2=0 \tag{2.25}$$

которому удовлетворяет χ, вытекает, что любая функция от χ, дважды по ней дифференцируемая, будет гармонической в области V. Поэтому можно упростить представление (1.3) для искомой функции, положив в нем[1]

$$F=\operatorname{Re}\frac{(-1)^{m-1}|c|}{2\pi^2(m-2)!}\int_0^\pi \omega_0\chi^{m-2}\log\chi\, d\theta \tag{2.26}$$

Кроме того, отвлекаясь от рассуждений, приведших нас к разложению (2.5) (первый член которого взят за новое значение F), непосредственно из (2.26) заключаем, что можно наложить теперь более слабые ограничения на функцию ω_0, нежели принятые выше: именно, достаточно предположить, что знаменатель дроби, ее определяющей, не имеет кратных вещественных корней[2] в интервале $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. Действительно, в том случае, когда в числе простых корней этого знаменателя имеются вещественные, можно придать смысл интегралу (2.26), понимая его как главное значение Коши.

Исходя из нового представления для функции $u(x, y, z)$, мы, очевидно, для определения плотности ν также получим уравнение Фредгольма[3].

---

[1] Как нетрудно видеть, функция F, определяемая (2.26), является аналогом фундаментального решения для случая, когда граничное условие (1.2) содержит лишь производные высшего порядка, т. е. имеет вид (см. сноску на стр. 330).

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=0}^{l} a_{m-l,\, l-j,\, j}\frac{\partial^m u}{\partial x^{m-l}\partial y^{l-j}\partial z^j}=f$$

[2] В соответствии со сказанным ранее, это условие эквивалентно требованию, чтобы тригонометрический полином

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{j=0}^{l}(i)^{m-j}b_{m-l,\, l-j,\, j}\cos^{m-l}\theta\sin^{l-j}\theta$$

не имел кратных вещественных корней.

[3] Взяв функцию $u(x, y, z)$ в какой-либо другой форме, отличной от (1.3) и (1.4) или (1.3) и (2.26), мы, вообще говоря, получим для плотности ν либо уравнение Фредгольма первого рода, либо сингулярное интегральное уравнение. Преобразование же последнего в уравнение Фредгольма второго рода потребовало бы построения соответствующего регуляризующего оператора, что, как известно, само по себе представляет значительные трудности.

Между прочим отметим, что условия, которым должны удовлетворять коэффициенты при высших производных в (1.2), чтобы выражение в (2.3) не имело кратных вещественных корней, будет, повидимому, совпадать с условиями, необходимыми для преобразования сингулярного уравнения (к которому указанным образом может быть приведена задача) в уравнение Фредгольма.

§ 3. Остановимся теперь на случае, когда коэффициенты a_{klj} — постоянные числа. Как легко видеть, уравнение Фредгольма, которое мы при этом получим для определения плотности, исходя из (1.3) и (1.4), будет совпадать с уравнением (2.5), к которому приводится задача Дирихле. Это обстоятельство, как нам кажется, представляет интерес и заслуживает быть отмеченным.

Нетрудно показать, что если S есть поверхность сферы, то при постоянных a_{klj} решение задачи может быть получено в квадратурах.

Действительно, уравнение (2.15) в этом случае запишется в форме

$$\nu(\theta_0, \varphi_0) + \frac{1}{4\pi R} \int\limits_S \nu(\theta, \varphi) \frac{1}{r_0}\, dS = f(\theta_0, \varphi_0) \tag{3.1}$$

где R — радиус сферы и θ, φ — ее сферические координаты.

Допустим, что функция $f(\theta, \varphi)$ удовлетворяет так называемым условиям Дирихле. Тогда имеют место разложения

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi), \qquad \nu(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n^*(\theta, \varphi) \tag{3.2}$$

в которых Y_n и Y_n^* — соответствующие сферические функции; первые из них известны и определяются из равенств [2]

$$\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) P_n(\mu) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0) \tag{3.3}$$

где P_n — полиномы Лежандра и

$$\mu = \sin\theta \sin\theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \cos\theta \cos\theta_0 \tag{3.4}$$

Далее, имеем

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n P_n(\mu) \qquad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \tag{3.5}$$

и, кроме того,

$$\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} Y_m(\theta, \varphi) P_n(\mu) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0 \qquad (m \neq n)$$

$$\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} Y_n(\theta, \varphi) P_n(\mu) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varphi_0) \tag{3.6}$$

Соотношения, аналогичные (3.3) и (3.6), имеют место также для функций $\nu(\theta, \varphi)$ и $Y_n^*(\theta, \varphi)$.

Рассматривая интеграл, содержащийся в левой части уравнения (3.1), как предельное значение (изнутри сферы) потенциала простого слоя и подставив в это уравнение вместо функций f, ν и $1/r$ их разложения из (3.2) и (3.5), будем иметь на основании формул (3.6)

$$Y_n^*(\theta, \varphi) = \frac{2n+1}{2n+2} Y_n(\theta, \varphi) \qquad (n = 0, 1, \ldots, \infty) \tag{3.7}$$

Отсюда получим

$$\nu(\theta_0, \varphi_0) = f(\theta_0, \varphi_0) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi} \frac{(2m+1)}{(2m+2)} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) P_n(\mu) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{3.8}$$

Умножим теперь обе части равенства

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\mu+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\mu) \tag{3.9}$$

сначала на $f(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, а затем на $f(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\alpha$, и выполним почленное интегрирование в первом случае по переменным θ и φ соответственно в пределах $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ и $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, а во втором случае также и по α в пределах $0\leqslant\alpha\leqslant 1$. После этого, перейдя к пределу $\alpha\longrightarrow 1$ в первом из равенств, которые мы таким образом получим, будем иметь

$$\begin{gathered}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta,\varphi)}{\sqrt{2(1-\mu)}}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)P_n(\mu)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\\ \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)\log\frac{(1+\mu)}{\sqrt{1-\mu}\,(\sqrt{2}-\sqrt{1-\mu})}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi=\\ =\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)P_n(\mu)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi\end{gathered} \tag{3.10}$$

С помощью этих соотношений преобразуем формулу к виду (3.8)

$$\nu(\theta_0,\varphi_0)=f(\theta_0,\varphi_0)- \tag{3.11}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\varphi)\left\{\frac{1}{\sqrt{2(1-\mu)}}-\frac{1}{2}\log\frac{(1+\mu)}{\sqrt{1-\mu}\,(\sqrt{2}-\sqrt{1-\mu})}\right\}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Наконец, подставив это выражение для плотности $\nu(\theta, \varphi)$ в равенство (1.3) и взяв в нем F из (1.4), получим решение задачи.

Примечание. В частности, когда граничное равенство (1.2) принимает вид, рассмотренный в примечании III § 2, причем k, l и m — постоянные числа и S является поверхностью сферы, условие (2.23), указывающее, что вектор с составляющими k, l и m (соответственно по осям координат x, y и z) лежит в касательной плоскости к сфере, будет, очевидно, выполняться в точках окружности большего круга, перпендикулярного к этому вектору. Обозначим, аналогично тому как прежде, через S_j $(j=1, 2)$ поверхности полусфер, на которые разделяется при этом S. Тогда, подставив в формулу

$$u(x, y, z)=\sum_{j=1}^{2}\int_{S_j}\nu F_j\, dS \tag{3.12}$$

где F_1 и F_2 равны соответственно выражениям (2.17) и (2.19), вместо плотности ν ее значение из (3.11), получим решение в этом случае.

Поступила в редакцию
6 VIII 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн М. и Неймарк М. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. 1936.

Смирнов В. И. Курс высшей математики. 1933. т. III.