Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

К ПРОБЛЕМЕ ГУРВИЦА ДЛЯ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. Н. Цапырин
(Казань)

Эту работу автор посвящает памяти незабвенного учителя Николая Григорьевича Чеботарева, под руководством которого она была выполнена.

В работе рассматривается задача Гурвица для трансцендентного уравнения вида

$$(a_1z^2 + a_2z + a_3)\ \operatorname{ch} z + (b_1z^2 + b_2z + b_3) \operatorname{sh} z = 0$$

с вещественными коэффициентами любого знака.

Метод решения основан на обобщении ряда Штурма. Результаты формулированы в виде неравенств, связывающих коэффициенты. Выполнение их необходимо и достаточно для того, чтобы корни данного уравнения лежали все в левой полуплоскости.

§ 1. Введение. Проблема, решенная Гурвицем [7]: определить условия, налагаемые на коэффициенты уравнения

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

для того, чтобы все его корни имели отрицательные вещественные части, была поставлена в силу потребностей техники. Известно, что малые колебания, подчиненные линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, устойчивы в том и только в том случае, если корни его характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части. Важность проблемы для технических приложений породила обширную литературу, дополняющую результат Гурвица в нескольких направлениях.

Некоторые авторы предложили более простые и элегантные выводы условий Гурвица, модифицируя вместе с тем форму этих условий. Так, И. Шур [12] привел решение проблемы к простому алгоритму, обобщив в то же время проблему на случай комплексных коэффициентов. Лиенар и Шипар [8], а также Фудживара [3] привели решение проблемы Гурвица, а также несколько родственных проблем к определению сигнатур некоторых эрмитовых форм.

Беньяминович [2] дал решение обобщенной проблемы Гурвица: определить, какое число корней заданного уравнения имеет отрицательные, какое нулевые и какое положительные вещественные части.

Принципиально более важным обобщением проблемы Гурвица является ее распространение на трансцендентные уравнения. В этом направлении первые результаты были получены Громмером [5], который установил для целых трансцендентных функций нулевого рода, т. е. представимых в форме:

$$C_0 \Pi \left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

критерий, подобный критерию Гурвица, т. е. требующий положительности всех диагональных миноров, отсчитываемых от верхнего левого угла бесконечной матрицы

$$\begin{Vmatrix} c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & \ldots \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & c_1 & c_0 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}$$

Подобный же результат был получен Фудживара [4].

М. Г. Крейн [1] указал на неточность критериев Громмера и Фудживара: при их соблюдении функция может иметь множитель вида $E(z^2)$, где $E(z)$ — произвольная целая функция с вещественными коэффициентами. Вместе с тем М. Г. Крейн предложил более общий критерий для произвольных целых функций, однако не исключающий возможности множителей вида $E(z^2)$

Несколько раньше Н. Г. Чеботарев [13] предложил более частный критерий, имеющий силу для целых функций произвольного рода, но ограниченных тем, что они не должны иметь равных по модулю, но несопряженных корней.

Н. Г. Чеботарев [16] нашел достаточные условия для отрицательности вещественных частей корней, которые являются необходимыми и достаточными для более жесткого требования, чем требование Гурвица: не только функция $f(z)$ должна иметь все корни с отрицательными вещественными частями, но также все достаточно близкие к ней функции, определяемые равенством

$$f(z, \varepsilon) = \varphi(z) + (1 + \varepsilon)\, \psi(z)$$

где ε достаточно мало, а функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ представляют собой разложение функции $f(z)$ на четную и нечетную части.

Н. Н. Мейман [9,10] существенно обобщил эти результаты и, в частности, определил широкий класс функций, для которых эти требования совпадают. В более ранней работе Л. С. Понтрягин [11] доказал это совпадение для функций, выражающихся полиномами от z, e^z.

Все перечисленные результаты по проблеме Гурвица для целых трансцендентных функций общего вида не применимы на практике, так как они приводят решение проблемы к установлению той или другой, но всегда бесконечной системы неравенств.

Поскольку дело идет о целых трансцендентных функциях общего вида, мы и не можем надеяться получить более эффективные результаты, так как целая функция может иметь бесчисленное множество корней, положение которых может быть в весьма большой мере произвольным. Однако для целых функций некоторых частных типов, зависящих от конечного числа постоянных, естественно добиваться результатов, позволяющих определять при помощи конечного числа действий, являются ли эти функции функциями Гурвица или нет. Это в большой мере выполнено для полиномом от x, $\cos x$, $\sin x$. Первый толчок в этом направлении произвела работа Гурвица[6], в которой была доказана конечность числа комплексных корней у уравнения вида

$$g(x)\sin x + h(x)\cos x = 0 \tag{1.1}$$

Гурвиц получил свой результат, рассматривая разложение функции

$$\frac{g(z)}{h(z)} + \operatorname{ctg} z \tag{1.2}$$

на частные дроби и доказав, что число пар комплексных корней этой функции не превышает числа отрицательных и мнимых элементарных дробей в этом разложении. Впоследствии этот метод рассуждения был воспринят Н. Г. Чеботаревым[15], который доказал возможность при помощи конечного числа действий выяснять, все ли корни уравнений типа (1.1) вещественны, а также решать для них проблему Гурвица.

Впрочем, в этой работе лишь доказано, что данные в ней условия лишь достаточны, а их необходимость была установлена только после появления цитированной работы Л. С. Понтрягина[11].

В другой своей работе[14] Н. Г. Чеботарев указал на другой способ решения этих задач, основанный на обобщении ряда Штурма. Этот способ имеет то преимущество, что позволяет, применяя чисто алгебраические операции (алгоритм Евклида), получать условия для буквенных уравнений. Это обстоятельство имеет важное значение ввиду того, что вопросы техники, выдвинувшие в последнее время проблему Гурвица как раз для уравнения типа (1.1), обычно требуют определения границ, внутри которых значения тех или других параметров, входящих в уравнение (1.1), оставляют его гурвицевым. В неопубликованной работе А. А. Соколова, посвященной тоже проблеме Гурвица для трансцендентных уравнений, дано несколько примеров такого рода технических вопросов. См. также статью Н. Г. Чеботарева[17].

В этой работе я по совету своего учителя Н. Г. Чеботарева предпринял детальное решение проблемы Гурвица для более частного уравнения

$$(a_1z^2 + a_2z + a_3)\operatorname{ch} z + (b_1z^2 + b_2z + b_3)\operatorname{sh} z = 0$$

где a_1, a_2, a_3, b_1, b_3, b_3 произвольные вещественные числа. Это существенно обобщает результат Н. Г. Чеботарева[17], решившего эту проблему для частного случая, когда эти коэффициенты положительны.

§ 2. Постановка задачи. *В случае полиномов* проблема Гурвица может быть решена следующим образом. Пусть $f(z)$ — полином, коэффициенты которого могут быть и комплексными. *Корни $f(z)$ лежат левее мнимой оси в том и только в том случае, если корни полинома*

$$F(z) = f(iz) \tag{2.1}$$

лежат выше вещественной оси (т. е. их мнимые части положительны). Чтобы найти условия для этого свойства полинома $F(z)$, представим его в виде суммы

$$F(z) = G(z) + iH(z) \tag{2.2}$$

где $G(z)$ и $H(z)$ — полиномы с вещественными коэффициентами.

Тогда, как можно доказать, *условия лежания $F(z)$ корней по одну сторону от вещественной оси равносильны условию того, чтобы полиномы $G(z)$ и $H(z)$ составляли вещественную пару*, т. е. чтобы полином

$$G(z) + \lambda H(z) \tag{2.3}$$

при всяком вещественном λ имел только вещественные корни. *Для этого необходимо и достаточно, чтобы корни полиномов $G(z)$ и $H(z)$ были все вещественны и перемежались*, т. е. между каждой парой корней одного из этих полиномов лежал один и только один корень другого полинома. *Чтобы получить условия перемежаемости корней в явном виде, образуем ряд* Штурма при помощи $G(z)$ и $H(z)$: делим тот из этих полиномов, степень которого выше (или не ниже), на другой, и в остатке меняем знак: затем делим второй полином на остаток и т. д. Условия заключаются или в положительности, или в последовательном чередовании знаков старших коэффициентов в остатках.

Как ни прост этот критерий для полиномов, его распространение на целые трансцендентные функции встречает ряд трудностей. Прежде всего *функции $G(z)$ и $H(z)$ составляют вещественную пару только в том случае, если наряду с $F(z)$ также функция*

$$F(z, \varepsilon) = G(z) + i(1 + \varepsilon) H(z)$$

при всяком достаточно малом ε имеет все корни по одну сторону от вещественной оси. В общем случае эти условия не совпадают. Л. С. Понтрягин [11] доказал их совпадение для случая, когда $f(z)$ является полиномом от z и e^z. Н. Н. Мейман [9] доказал это же для более общего класса функций

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i\alpha_k} p_k(z) \qquad (0 \leqslant \alpha_1 < \cdots < \alpha_n)$$

где $p_k(z)$ — полиномы.

Далее, *большую трудность представляет* установление *вещественности всех корней целой трансцендентной функции* (2.3). *Для случая полиномов $F(z, \cos z, \sin z)$* эта трудность была преодолена. Оказалось что *вещественность всех корней такого рода функций может быть установлена, если известно асимптотическое выражение для числа* *корней на интервале* $(-M, M)$, *где* M — *произвольное весьма большое число.* Этот факт прекрасно выражен в цитированной работе Л. С. Понтрягина[11]. Пусть задан полином $f(z, \cos z, \sin z)$. Л. С. Понтрягин располагает его по степеням свободно входящего z. Коэффициенты при каждой степени z не должны делиться на $\cos^2 z + \sin^2 z$. Этого можно добиться, пользуясь соотношением $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$. Пусть при высшей степени z, скажем z^r, стоит полином $\varphi_r(\cos z, \sin z)$. Если его степень относительно обеих переменных $\cos z$, $\sin z$ ниже, чем степень коэффициентов при других степенях z, то, как доказал Л. С. Понтрягин, функция $f(z, \cos z, \sin z)$ имеет бесчисленное множество комплексных корней. Если же степень $\varphi_r(\cos z, \sin z)$, равная s, не ниже, чем степень коэффициентов при всех других степенях z, то функция $f(z, \cos z, \sin z)$ имеет в полосе $-2K\pi + \varepsilon \leqslant x \leqslant 2K\pi + \varepsilon$ $(z = x + iy)$ при достаточно большом K и произвольно малом $\varepsilon > 0$ ровно $4sK + r$. Отсюда следует:

Чтобы функция $f(z, \cos z, \sin z)$ *не имела комплексных корней, необходимо и достаточно, чтобы на отрезке* $-2K\pi + \varepsilon \leqslant z \leqslant 2K\pi + \varepsilon$ *число ее корней при достаточно большом* K *было равно* $4sK + r$.

Далее, для установления критерия Гурвица для полинома

$$F(z, e^z) = \sum_{mn} a_{mn} z^m e^{nz} \tag{2.4}$$

с комплексными a_{mn} Л. С. Понтрягин определяет главный член этого полинома $a_{rs} z^r e^{sz}$, т. е. член с наивысшей степенью r, у которого и величина s не ниже, чем у других членов полинома. Главного члена может и не быть. Тогда:

Полином (2.4) *без главного члена всегда имеет корни с положительными, притом сколь угодно большими вещественными частями.*

Если полином (2.4) имеет главный член, то, делая подстановку $z \to iz$ и пользуясь формулой $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, его можно привести к виду $g(z) + ih(z)$, где $g(z)$ и $h(z)$ — полиномы от z, $\cos z$, $\sin z$.

Чтобы все корни полинома (2.4) *имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы корни функции* $g(z)$ *были все вещественны, перемежались с корнями функции* $h(z)$ *и чтобы для каждого такого корня* α *имело место* $h(\alpha) / g'(\alpha) < 0$.

Если поменять ролями функции $g(z)$ и $h(z)$, то для каждого корня β функции $h(z)$ будем иметь $g(\beta) / h'(\beta) > 0$.

Таким образом, вопрос приводится к нахождению асимптотической формулы для числа корней. Для ее нахождения Н. Г. Чеботарев[14] обобщил метод Штурма. Это обобщение позволяет привести вопрос о числе корней функции рассматриваемого вида к нахождению числа корней функции вида $\varphi(\cos z, \sin z)$, где $\varphi(u, v)$ — полином. Но так как простой подстановкой эта функция приводится к рациональной, то число ее корней определяется элементарным образом.

Для решения вопроса о перемежаемости корней двух функций рассматриваемого вида может служить тоже обобщение метода Штурма.

§ 3. Обобщение метода Штурма. Изложим сущность этого обобщения, близко придерживаясь статьи Н. Г. Чеботарева[17].

Даны два полинома $g(z, \cos z, \sin z)$ и $h(z, \cos z, \sin z)$ от переменных $z, \cos z$, $\sin z$ с вещественными коэффициентами. Чтобы определить число корней первого из них на отрезке (a, b) вещественной оси, расположим оба полинома по степеням свободно входящей переменной z:

$$V = g(z, \cos z, \sin z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \ldots + A_m$$
$$V_1 = h(z, \cos z, \sin z) = B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \ldots + B_n$$

где коэффициенты A_i, B_j $(i = 0, 1, 2, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, n)$ являются полиномами от $\cos z$, $\sin z$. Пусть $m \geqslant n$. Разделим V на V_1. При этом, чтобы не получать в частном дробных коэффициентов, предварительно умножим V на достаточно высокую четную степень B_0. Обозначая остаток от деления с измененным знаком через V_2, получим

$$C^2 V = V_1 Q_1 - V_2$$

где C^2 — степень B_0, на которую мы умножили V. Поступая точно так же с парой полиномов V_1, V_2, будет иметь

$$C_1^2 V_1 = V_2 Q_1 - V_3$$

Далее, разделим таким же образом V_2 на V_3 и т. д. Поскольку степени полиномов $V_1, V_2, V_3, \ldots$ относительно свободно входящего z с увеличением индекса i при V_i на единицу, снижаются по крайней мере на единицу, мы при некотором $s < n+1$ получим полином V_s, не содержащий свободно входящего z. Между полиномами $V, V_1, \ldots, V_s$ будут иметь место соотношения

$$C^2 V = V_1 Q_1 - V_2, \quad C_1^2 V_1 = V_2 Q_2 - V_3, \ldots, \quad C_{s-2}^2 V_{s-2} = V_{s-1} Q_{s-1} - V_s \quad (3.1)$$

Здесь $C, C_1, \ldots, C_{s-2}$, а также последний остаток V_s являются полиномами только от $\cos z$, $\sin z$.

Заметим, что вещественные корни этих полиномов находятся элементарным путем подстановкой

$$\operatorname{tg} \frac{z}{2} = t, \qquad \cos z = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin z = \frac{2t}{1+t^2} \quad (3.2)$$

которая преобразует эти функции в рациональные функции от t.

Точнее, это будут полиномы от t, деленные на некоторые степени полинома $1+t^2$. Найдя алгебраически корни этих полиномов, можно для каждого из корней t_i получить корни тригонометрических полиномов из формулы $z_{ik} = 2 \operatorname{arc\,tg} t_i + 2k\pi$, где k — произвольное целое число.

Пусть все корни полинома $CC_1C_2, \ldots, C_{s-2}V_s$ внутри интервала $(2k\pi,\ 2(k+1)\pi)$ будут $z_{1k}, \ldots, z_{pk}$ $(-\infty < k < \infty)$.

Заметим, что при подстановке (3.2) можно потерять корень $z = (2\nu+1)\pi$, который соответствует значению $t = \infty$. Поэтому нужно проверить дополнительно, является ли это значение корнем функции $CC_1C_2, \ldots, C_{s-2}V$, и, если является, нужно включить его в систему корней $z_{1k}, \ldots, z_{pk}$.

Пусть $P(z)$ означает число перемен знака в последовательности функций $V, V_1, V_2, \ldots, V_s$ при некотором значении z. Тогда разность $P(a)-P(b)$ выражает число потерь перемен знака в последовательности $V, V_1, \ldots, V_s$ при изменении переменной z от $z=a$ до $z=b$. Если эта разность отрицательна, то она выражает число приобретений перемен знака. В частности, будем называть потерю перемен знака в последовательности $V, V_1, \ldots, V_s$ на интервале $(z_{ik}-\varepsilon, z_{ik}+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ и сколько угодно мало, *потерей в точке* z_{ik} и обозначать через l_{ik}. Если на этом интервале произойдет приобретение перемен знака, то $l_{ik}<0$.

Будем называть корень α функции V корнем первой категории, если вблизи него отношение V/V_1 меняет знак минус на плюс, и корнем второй категории, если вблизи него отношение V/V_1 меняет знак плюс на минус. Из разложений вблизи $z=\alpha$

$$V(z)=(z-\alpha)V'(\alpha)+\ldots, \qquad V_1(z)=V_1(\alpha)\ldots$$

следует, что в случае $V_1(\alpha)/V'(\alpha)>0$ имеет место корень первой категории, а в случае $V_1(\alpha)/V'(\alpha)<0$ — корень второй категории. Случай кратного корня или корня, обращающего в нуль также $V_1(z)$, следует изучить отдельно. Если вблизи корня отношение V/V_1 не меняет знака, будем называть этот корень корнем нулевой категории. При счете корней функции V его не следует считать вовсе.

В частности, если в качестве $V_1(z)$ взята производная $V'(z)$, то все корни функции $V(z)$, простые и кратные, являются корнями первой категории.

В самом деле, пусть $z=\alpha$ есть корень кратности m функции $V(z)$.

Тогда имеют место разложения вида

$$V(z)=a(z-\alpha)^m+b(z-\alpha)^{m+1}+\cdots$$

$$V'(z)=am(z-\alpha)^{m-1}+b(m+1)(z-\alpha)^m+\cdots \qquad a\neq 0$$

$$\frac{V(z)}{V'(z)}=(z-\alpha)\frac{a+b(z-\alpha)+c(z-\alpha)^2+\cdots}{am+b(m+1)(z-\alpha)+\cdots}$$

Откуда видно, что при прохождении переменной z через значение $z=\alpha$ отношение $V'(z)/V(z)$ меняет знак минус на плюс.

Пусть переменная z принимает непрерывный ряд значений от $z=a$ до $z=b$. Тогда последовательность функций $V, V_1, \ldots, V_s$ будет претерпевать изменения в знаках только вблизи тех значений переменной, которые обращают в нуль какие-нибудь из функций $V, V_1, \ldots, V_s$. Это следует из непрерывности этих функций. Если какое-нибудь из таких значений, например, $z=a$, не принадлежит к числу значений $z_{1k}, \ldots, z_{pk}$, то это означает, что при $z=\alpha$ ни одна из функций $C, C_1, \ldots, C_{s-2}, V_s$ не обращается в нуль.

Поэтому, если, например $V_i(\alpha)=0$ $(0<i<s)$, то, пользуясь соотношениями (3.1), мы легко докажем, что ни одна из соседних функций $V_{i-1}(z)$ и $V_{i+1}(z)$ не обращается при $z=\alpha$ в нуль, так как в противном случае при $z=\alpha$ обратились бы в нуль все функции после-

довательности $V, V_1, \ldots, V_s$, что невозможно в силу $V_s(\alpha) \neq 0$. При этом, подставляя $z = \alpha$ в соотношение

$$C_{i-1}^2(z) V_{i-1}(z) = V_i(z) Q_i(z) - V_{i+1}(z) \tag{3.3}$$

в силу $V_i(\alpha) = 0$ и $C_{i-1}^2(\alpha) > 0$, получим

$$\operatorname{sign} V_{i-1}(\alpha) = -\operatorname{sign} V_{i+1}(\alpha) \tag{3.4}$$

и, таким образом, последовательность трех функций $V_{i-1}(z), V_i(z), V_{i+1}(z)$ при переходе через значение $z = \alpha$ не претерпит изменения числа перемен знака. Если же α есть корень функции $V(z)$, то при переходе через $z = \alpha$ последовательность двух функций $V(z), V_1(z)$ претерпит одну потерю числа перемен, если α есть корень первой категории, одно приобретение числа перемен, если α есть корень второй категории, и не претерпит изменения числа перемен, если α есть корень нулевой категории.

Обратимся к случаю, когда значение $z = \alpha$ совпадает с одним из значений $z_{1k}, \ldots, z_{pk}$, например z_{ik}. Ввиду того, что здесь может произойти много разнообразных обстоятельств, могущих изменить число потерь (или приобретений) числа перемен знаков, будем обозначать число потерь в интервале $(z_{ik} - \varepsilon, z_{ik} + \varepsilon)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ через l_{ik}. Однако при этом мы должны различать случаи, когда z_{ik} является и не является корнем первой функции $V(z)$.

В первом случае, чтобы не потерять общего счета корней функции $V(z)$, под l_{ik} будем разуметь число потерь перемен знака в последовательности $V_1(z), \ldots, V_s(z)$, получаемой из последовательности $V(z), V_1(z), \ldots, V_s(z)$ отбрасыванием первого члена $V(z)$.

Подсчитаем общее число потерь перемен на всем интервале (a, b). Пусть на этом интервале $V(z)$ имеет N_1 корней первой категории, N_2 корней второй категории и N_0 корней нулевой категории, так что

$$N = N_1 + N_2 + N_0 \tag{3.5}$$

где N означает общее число корней функции $V(z)$ на интервале (a, b). Общее число потерь перемен $P(a) - P(b)$ равно сумме потерь перемен вблизи всех точек, в окрестностях которых происходят изменения знаков в последовательности $V, V_1, \ldots, V_s$, т. е. вблизи корней функции $V(z)$, а также чисел $z_{1k}, \ldots, z_{pk}$. Таким образом,

$$P(a) - P(b) = N_1 - N_2 + \Sigma l_{ik}, \quad \text{или} \quad N_1 - N_2 = P(a) - P(b) - \Sigma l_{ik} \tag{3.6}$$

Чтобы сделать формулы (3.5) и (3.6) пригодными к нахождению чисел N_1, N_2 для сколь угодно больших интервалов (a, b), необходимо сделать два следующих замечания: если увеличивать интервал (a, b), то число членов в сумме Σl_{ik} неограниченно возрастает. Однако можно найти для Σl_{ik} при достаточно больших k выражения, зависящие только от i (но не от k). С другой стороны, число значений, которые принимает индекс i, конечно, так как равно числу корней алгебраического уравнения, получаемого из $CC_1, \ldots, C_{s-2}V_s$ подстановкой (3.2). Поэтому, если за интервал (a, b) возьмем $(-2K\pi + \varepsilon,\ 2K\pi + \varepsilon)$, где

K — некоторое весьма большое целое положительное число, то каждое увеличение числа K на единицу приведет к увеличению суммы Σl_{ik} на величину $\Sigma l_{i,K+1}+\Sigma l_{i,-K}$, т. е. на сумму ограниченного числа членов, каждый из которых, как покажем, не зависит от K. Это позволяет найти для суммы Σl_{ik} выражение, линейно зависящее от K.

Итак докажем, что при достаточно большом K число l_{ik} независимо от k. Число l_{ik} есть число потерь перемен знака в последовательности $V, V_1, \ldots, V_s$, или $V_1, \ldots, V_s$ на интервале $(z_{ik}-\varepsilon,\ z_{ik}+\varepsilon)$. Для его нахождения нам надо подставить $z=z_{ik}\pm\varepsilon$ в последовательность функций $V, V_1, \ldots, V_s$.

Вспоминая выражение $z_{ik}=2\operatorname{arc}\operatorname{tg} t_i+2k\pi$, при подстановке получим

$$\cos z_{ik}=\frac{1-t_i^2}{1+t_i^2}, \qquad \sin z_{ik}=\frac{2t_i}{1+t_i^2}$$

а эти формулы показывают, что при подстановке $z=z_{ik}$ в функции $V, V_1, \ldots, V_s$ они превращаются в полиномы от t_i с коэффициентами, не зависящими от значения k. Для каждого из этих полиномов можно найти верхнюю границу корней. Если k взято настолько большим, что z_{ik} лежит выше верхних границ корней всех полученных таким образом полиномов, то знаки получаемых при подстановке $z=z_{ik}$ в функции $V, V_1, \ldots, V_s$ значений не зависят от k. Даже если все коэффициенты какого-нибудь из этих полиномов обращаются в нуль (как это имеет место, например, для корня z_{ik} полинома $V_s(z)$, который не содержит свободно входящего z), то обе подстановки $z=z_{ik}-\varepsilon$ и $z=z_{ik}+\varepsilon$ превращают его в полиномы, коэффициенты которых зависят от ε, но не от k, и для корней которых можно найти верхние границы. Сравнение чисел перемен знаков в последовательности $V, V_1, \ldots, V_s$ при $z=z_{ik}-\varepsilon$ и при $z=z_{ik}+\varepsilon$ показывает таким образом, что для достатотно больших k число l_{ik} не зависит от k. Аналогично докажем такую же независимость для отрицательных k, настолько больших по абсолютному значению, что z_{ik} лежит ниже нижних границ корней всех полученных нами полиномов.

З а м е ч а н и е 1. Корни полинома $CC_1\ldots C_{s-2}$ включены в рассмотрение только потому, что нельзя гарантировать, что вблизи корня C_{i-1} полиномы V_i и V_{i+1} не обратятся одновременно в нуль, в то время как $V_{i-1}\neq 0$. Поэтому нельзя здесь сделать заключения, что знаки V_{i-1} и V_{i+1} будут вблизи этого значения противоположны, а это заключение необходимо в классической теории Штурма. Таким образом, необходимо включить в рассмотрение только те корни полинома $CC_1\ldots C_{s-2}$, которые обращают в нуль по крайней мере две соседние из функций $V, V_1, \ldots, V_s$. Это может значительно уменьшить число значений $z_{1k}, \ldots, z_{pk}$.

З а м е ч а н и е 2. Формулы (3.5) и (3.6) дают выражение не для общего числа $N=N_1+N_2+N_0$ корней функции $V(z)$, а только для разности N_1-N_2. Здесь надо принять во внимание, что для определения корней функции $V(z)$ можно выбрать вторую функцию $V_1(z)$ по нашему произволу. Меняя выбор $V_1(z)$, мы будем оставлять неизменным число N, в то время как остальные числа, входящие в формулы (3.5) и (3.6), будут претерпевать изменения. В частности, если за $V_1(z)$ выбрать производную $V'(z)$ от функции $V(z)$, все N корней окажутся первой категории, так что в этом случае будем иметь $N_1=N$, $N_2=0$, $N_0=0$.

Таким образом, формула (3.6) для $V_1(z) = V'(z)$ дает выражение для N как линейной функции от K, т. е. $N = SK + R$.

Из теоремы Л. С. Понтрягина следует, что это значение при всех достаточно больших K не превышает $4sK + r$, так что $S \leqslant 4s$, $R \leqslant r$.

При этом из той же теоремы следует, что *все корни функции $V(z)$ вещественны в том и только в том случае, если в этих формулах имеет место знак равенства*, т. е. если $S = 4s$, $R = r$.

Обратимся теперь к установлению критерия Гурвица. Мы видели, что *для того чтобы все корни функции $g(z) + ih(z)$ лежали выше вещественной оси, необходимо и достаточно, чтобы все корни функции $g(z)$ и $h(z)$ были вещественны и перемежались*. Итак мы прежде всего должны установить вещественность корней каждой из функций $g(z)$ и $h(z)$.

Далее, чтобы установить перемежаемость корней обеих функций, составим последовательность Штурма при помощи функций

$$V(z) = -g(z), \qquad V_1(z) = h(z) \tag{3.7}$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы для каждого из корней α функции $g(z)$ имело место $V_1(\alpha) / V'(\alpha) > 0$, т. е. все корни функции $V(z)$ были первой категории. Таким образом, в том и только в том случае, если эти условия соблюдаются, мы будем и для последней последовательности Штурма иметь $N_1 = N$, $N_2 = 0$, $N_0 = 0$ и выражение в правой части формулы (3.6) совпадает с выражением, полученным для последовательности Штурма, составленной при помощи функций

$$V(z) = g(z), \qquad V_1(z) = g'(z) \tag{3.8}$$

т. е. будет равно $4sK + r$.

Однако оказывается, что нет необходимости составлять последовательность Штурма при помощи функций (3.8). В самом деле, предположим, что последовательность Штурма, составленная при помощи функций (3.7), дает в правой части формулы (3.6) выражение $4sK + r$. Составляя новую последовательность Штурма, в котором функций $V(z)$ остается прежней, а в качестве $V_1(z)$ берется производная $V'(z)$, мы получим для правой части формулы (3.6) или то же значение, или большее, поскольку в ней роль N будет играть не $N_1 - N_2$, а $N_1 + N_2 + N_0$. Но в силу того, что последнее выражение равно числу корней в интервале $(-2\pi K + \varepsilon,\ 2\pi K + \varepsilon)$, оно на основании теоремы Л. С. Понтрягина не может превысить числа $4sK + r$ и поэтому будет в точности равно $4sK + r$. Это показывает, что все корни функции $V(z)$ вещественны. Далее, из того, что при выборе $V_1(z) = h(z)$ величина (3.6) принимает максимальное из возможных значений, следует, что все корни функции $V(z)$ первой категории, т. е. для всех этих корней α имеет место $V(\alpha) / V'(\alpha) > 0$.

Из этого следует, что между соседними корнями функции $V(z)$ содержится нечетное число корней функции $V_1(z)$, а поэтому функция $V_1(z)$ имеет в интервале $(-2\pi K + \varepsilon,\ 2\pi K + \varepsilon)$ по крайней мере $4sK + r - 1 + 2t$ корней, где $t \geqslant 0$, и может быть равно нулю только в том случае, если корни функций $V(z)$ и $V_1(z)$ перемежаются. Но для функции $V(z)$ и $V_1(z)$ число s имеет одно и то же значение, а число r

для $V_1(z)$ может иметь или равное, или меньшее значение. Поэтому опять в силу теоремы Л. С. Понтрягина функция $V_1(z)$ содержит в полосе $-2\pi K+\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi K+\varepsilon$ $(z=x+iy)$ плоскости комплексной переменной не больше $4sK+r$ корней, откуда

$$4sK+r \geqslant 4sK+r-1+2t \tag{3.9}$$

Отсюда $t=0$, т. е. корни функций $V(z)$ и $V_1(z)$ перемежаются. Далее, если в полосе $-2\pi K+\varepsilon \leqslant x \leqslant 2\pi K+\varepsilon$ содержится $2u$ комплексных корней функции $V_1(z)$, то должно иметь место

$$4sK+r \geqslant 4sK+r-1+2u \tag{3.10}$$

Отсюда следует $u=0$. Таким образом, все корни функции $V_1(z)$ тоже вещественны. Это позволяет нам утверждать, что все условия проблемы Гурвица выполнены, так что исходная функция имеет корни только с отрицательными вещественными частями.

Описанный метод дает возможность решить проблему Гурвица для всякой функции типа $f(z, e^z)$, где $f(u, v)$ — полином, если эта функция задана численно. Однако на практике нередко представляется необходимым знать, в каких границах изменения параметров, входящих в функцию, ее корни остаются левее мнимой оси. Поэтому весьма важно, хотя бы в частных случаях, представить условия проблемы Гурвица в виде неравенств, связывающих коэффициенты функции. Эта задача встречает большие трудности. Ниже рассматривается частный случай $s=1$, $r=2$.

§ 4. Проблема Гурвица для функции

$$H(z)=(a_1z^2+a_2z+a_3)\operatorname{ch} z+(b_1z^2+b_2z+b_3)\operatorname{sh} z \tag{4.1}$$

Полагая $z=iy$, получим

$$H(iy)=F(y)+iG(y)$$

где

$$\begin{aligned} F(y)&=(-a_1y^2+a_3)\cos y-b_2y\sin y\\ G(y)&=(-b_1y^2+b_3)\sin y+a_2y\cos y \end{aligned} \tag{4.2}$$

Требуется найти условия вещественности и перемежаемости корней этих функций. Для дальнейшего существенную роль играют знаки коэффициентов этих функций, поэтому целесообразно классифицировать функции $F(y)$ и $G(y)$ в зависимости от знаков их коэффициентов.

Покажем, что число комбинаций знаков при этих коэффициентах, подлежащих рассмотрению, может быть значительно уменьшено. Для этого выведем следующие необходимые признаки.

Теорема 1. *Чтобы все корни функции $F(y)$, определенной* (4.2), *были вещественны, необходимо, чтобы коэффициенты a_1 и a_3 имели одинаковые знаки.*

Доказательство. Представим уравнение $F(y)=0$ в виде

$$\Phi(y)=\frac{b_2y}{a_1y^2-a_3}+\operatorname{ctg} y=0 \tag{4.3}$$

Ниже будет исследовано, в каких случаях это преобразование приводит к потере корней.

Предположим, что a_1 и a_3 разных знаков. Тогда $\theta(y)$ будет иметь два мнимых полюса и, кроме того, полюс в каждой точке $y=\nu\pi$, где ν — произвольное целое число. На границах каждого интервала $(\nu\pi+\varepsilon, (\nu+1)\pi-\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ весьма мало, функция $\theta(y)$ принимает соответственно очень большое положительное и абсолютно очень большое отрицательное значение, а внутри этого интервала непрерывна, в силу чего внутри этого интервала имеет нечетное число корней. Если на всех такого рода интервалах при $\nu=-2K, -2K+1, \ldots, 2K-1$ где K — очень большое целое число, функция $\theta(y)$ имеет только по одному корню, то на всем интервале $(-2\pi K, 2\pi K)$ она имеет $4K$ корней. Но в силу теоремы Л. С. Понтрягина для вещественности всех корней функции $F(y)$ необходимо и достаточно, чтобы это число было равно $4sK+r$, т. е. в рассматриваемом случае $4K+2$. Таким образом, в этом случае функция $\theta(y)$ непременно имеет комплексные корни.

Докажем, что ни на одном интервале $(\nu\pi+\varepsilon, (\nu+1)\pi-\varepsilon)$ функция $\theta(y)$ не может иметь более одного корня. Пусть на каком-нибудь интервале $(\nu\pi+\varepsilon, (\nu+1)\pi-\varepsilon)$ функция $\theta(y)$ имеет $1+2t$ корней $(t\geqslant 1)$. В силу нечетности на интервале $(-(\nu+1)\pi+\varepsilon, -\nu\pi-\varepsilon)$ функция $\theta(y)$ будет иметь тоже $1+2t$ корней, и таким образом на интервале $(-2K\pi, 2K\pi)$ она будет иметь по крайней мере $4K+4t\geqslant 4K+4$ корней, в то время как по теореме Л. С. Понтрягина она не может иметь более $4K+2$ корней. Это противоречие доказывает теорему.

Теорема 2. *Чтобы все корни функции* $G(y)$, *определенной* (4.2), *были вещественны, необходимо, чтобы коэффициенты* b_1 *и* b_3 *были одного знака.*

Доказательство проводится совершенно так же: уравнение $G(y)=0$ преобразуется к виду

$$\vartheta(y)=\frac{-a_2y}{b_1y^2-b_3}+\operatorname{tg} y \tag{4.4}$$

функция $\vartheta(y)$ имеет полюсы в точках $z=(\nu+\frac{1}{2})\pi$. Если b_1 и b_3 разных знаков, то она сверх того имеет еще два мнимых полюса. Следовательно, в интервале $(-(2K-\frac{1}{2})\pi, (2K+\frac{1}{2})\pi)$ функция $\vartheta(y)$, наверное, имеет $4K$ корней. Дальнейшие рассуждения совпадают с рассуждениями в доказательстве теоремы 1.

Замечание. Переход от уравнения $F(y)=0$ к уравнению $\theta(y)=0$ сопровождается потерей корней тогда и только тогда, если уравнение $F(y)=0$ имеет общие корни с одним из уравнений

$$\sin y=0, \qquad -a_1y^2+a_3=0 \tag{4.5}$$

Решая уравнение $F(y)=0$ совместно с первым из (4.5) и принимая во внимание, что из $\sin y=0$ следует $\cos y=\pm 1\neq 0$, получим $-a_1y^2+a_3=0$, $\sin y=0$. Отсюда следует, что $y=\pm\sqrt{a_3/a_1}$ должны быть корнями $\sin y=0$, т. е. равны $\pm\nu\pi$, где ν — целое число. Это возможно только тогда, если a_1, a_3 одного и того же знака или если $a_3=0$. В рассматриваемом случае это невозможно.

Решим уравнение $F(y)=0$ совместно со вторым из (4.5). Оно приведет при $b_2 \neq 0$ к уравнению $y \sin y = 0$, т. е. к ранее разобранным случаям. При $b_2 = 0$ придем к уравнению

$$(-a_1 y^2 + a_3)\cos y = 0$$

Для него справедливость теоремы 1 очевидна.

Аналогично, исследуя переход от уравнения $G(y)=0$ к уравнению $\vartheta(y)=0$, мы придем:

либо к уравнениям

$$b_1 y^2 - b_3 = 0, \qquad \cos y = 0 \tag{4.6}$$

Эти уравнения имеют общие корни с уравнением $G(y)=0$, если $\sqrt{b_3 / b_4} = (\nu + \frac{1}{2})\pi$, где ν — целое число,

либо к уравнениям

$$b_1 y^2 - b_3 = 0, \qquad a_2 y \cos y = 0$$

Здесь добавится одна из возможностей $b_3 = 0$ или $a_2 = 0$. Первая несовместима с условиями теоремы 2; вторая приводит к уравнению

$$(-b_1 y^2 + b_3)\sin y = 0$$

для которого справедливость теоремы 2 очевидна.

Итак, при решении проблемы Гурвица можно ограничиться случаями, при которых каждая из пар коэффициентов a_1, a_3 и b_1, b_3 одинакового знака. Меняя знаки при функции $H(z)$, можно сделать коэффициенты a_1, a_3 положительными. Кроме того, меняя в случае нужды i на $-i$, мы сделаем и коэффициенты b_1, b_3 положительными. После последнего преобразования мы не сможем различать случаи, когда функция (4.1) имеет корни правее или левее мнимой оси, и сначала ограничимся выводом условий вещественности и перемежаемости корней функций (4.2).

Таким образом, вопрос приводится к изучению четырех случаев:

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_3 > 0, \begin{cases} a_2 > 0, & b_2 > 0 \quad \mathrm{I} \\ a_2 < 0, & b_2 < 0 \quad \mathrm{II} \\ a_2 > 0, & b_2 < 0 \quad \mathrm{III} \\ a_2 < 0, & b_2 > 0 \quad \mathrm{IV} \end{cases} \tag{4.7}$$

Случай {I} был разобран Н. Г. Чеботаревым [17]. Интересно отметить, что в этом случае условия вещественности корней обеих функций (4.2) всегда соблюдены и вопрос приводится только к выводу условий перемежаемости. Чтобы убедиться в этом, докажем теорему.

Теорема 3. *Функция* $F(y)$, *определенная* (4.2), *при* $a_1 > 0$, $b_2 > 0$, $a_3 > 0$ *не может иметь комплексных корней.*

Доказательство. Перейдем к уравнению $\theta(y)=0$. Вводя обозначения

$$\frac{a_3}{a_1} = \alpha^2, \qquad \frac{b_3}{b_1} = A > 0$$

и пользуясь известным разложением $\operatorname{ctg} y$ на частные дроби, имеем

$$\theta(z) = \frac{A}{z^2 - \alpha^2} + \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \nu^2\pi^2} = 0$$

Положим $z = x + iy$ и выделим вещественную и мнимую части:

$$\frac{A(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{x+\nu\pi}{(x+\nu\pi)^2+y^2} + \frac{x-\nu\pi}{(x-\nu\pi)^2+y^2}\right] -$$

$$-iy\left\{\frac{A}{(x-\alpha)^2+y^2} + \frac{1}{x^2+y^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(x+\nu\pi)^2+y^2} + \frac{1}{(x-\nu\pi)^2+y^2}\right]\right\} = 0$$

Из того, что выражение в фигурных скобках при $A > 0$ всегда положительно, следует, что ни одно число $x + iy$ при $y \neq 0$ не обращает левой части уравнения в нуль, т. е. не является его корнем; и т. д.

Аналогично легко доказать теорему.

Теорема 4. *Функция* $G(y)$, *определенная* (4.2), *при* $b_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_3 > 0$ *не может иметь комплексных корней.*

§ 5. Составление функций Штурма. В дальнейшем в соответствии с (4.7) будем предполагать $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, если не оговаривается противное. Полагая

$$V = -F(y) = a_1 y^2 \cos y + b_2 y \sin y - a_3 \cos y \tag{5.1}$$

$$V_1 = G(y) = -b_1 y^2 \sin y + a_2 y \cos y + b_3 \sin y \tag{5.2}$$

и производя последовательное деление, придем к функциям Штурма

$$V_2 = -b_1 \sin y\,[(a_1 a_2 \cos^2 y + b_1 b_2 \sin^2 y)\,y + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\cos y \sin y] \tag{5.3}$$

$$V_3 = -b_1 \sin^3 y\,[A\cos^4 y + B\cos^2 y \sin^2 y + C\sin^4 y] \tag{5.4}$$

где

$$A = a_1 a_2^2 a_3, \qquad B = a_2 b_2 (a_1 b_3 + a_3 b_1) - (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2, \qquad C = b_1 b_2^2 b_3 \tag{5.5}$$

При этом роль C_i играют множители

$$\sin y, \qquad \varphi(y) = a_1 a_2 \cos^2 y + b_1 b_2 \sin^2 y$$

Поскольку первый из них обращает в нуль последнюю функцию Штурма V_3, мы не будем рассматривать его отдельно. Что касается множителя $\varphi(y)$, то он обращается в нуль только в случаях III и IV, указанных в (4.7). При разборе этих последних мы разберем возможность его обращения в нуль одновременно с двумя соседними из функций V, V_1, V_2, V_3.

Разберем поведение нулей последней функции Штурма V_3. Первый из двух ее множителей обращается в нуль в точках $y = \nu\pi$.

Подставим в V, V_1, V_2, V_3 значение $y = \nu\pi + \varepsilon$, где ε предположим весьма малой величиной обоих знаков и выделим в них наименьшие степени ε, от которых зависят знаки функций. Сначала положим $\nu \neq 0$:

$$\begin{aligned} &V \approx (-1)^\nu (a_1 \nu^2 \pi^2 - a_3), && V_1 \approx (-1)^\nu a_2 \nu\pi, \\ &V_2 \approx -(-1)^\nu a_1 a_2 b_1 \nu\pi\varepsilon, && V_3 \approx -(-1)^\nu A b_1 \varepsilon^3 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Рассмотрим перемены знаков вблизи точки $y = \nu\pi$, полагая $\varepsilon < 0$ и $\varepsilon > 0$. При этом отбросим общий множитель $-(-1)^\nu$, а также первую функцию V, поскольку первые две функции не меняют знаков. Имеем

	Случай I и III ($a_2>0$)				Случай II и IV ($a_2<0$)			
y	V_1	V_2	V_3	Число перемен знака	V_1	V_2	V_3	Число перемен знака
$-\nu\pi-\varepsilon$	+	+	−	1	−	−	−	0
$-\nu\pi+\varepsilon$	+	−	+	2	−	+	+	1
$\nu\pi-\varepsilon$	−	−	−	0	+	+	−	1
$\nu\pi+\varepsilon$	−	+	+	1	+	−	+	2

Итак, вблизи всех этих корней имеет место приобретение числа перемен, т. е. для этих корней следует положить $l_\nu=-1$.

Случай $\nu=0$ надо рассмотреть отдельно. Пусть $y=\varepsilon$. Члены с низшими степенями ε разложений функций V, V_1, V_2, V_3 по степеням ε имеют вид (5.7)

$$V\approx -a_2,\quad V_1\approx(a_2+b_3)\,\varepsilon,\quad V_2\approx-(a_1a_2+a_1b_3-a_3b_1)\,\varepsilon^2,\quad V_3\approx -Ab_1\varepsilon^3$$

Здесь надо различать случаи $a_2+b_3>0$ и $a_2+b_3<0$.

В первом из них функции V_1 и V_3 имеют противоположные знаки, так что независимо от знака функции V_2 число перемен в ряду V_1, V_2, V_3 не изменяется при переходе от $y=-\varepsilon$ к $y=+\varepsilon$. Имеем

	y	V	V_1	V_2	V_3	число перемен знака
$\nu=0$, $a_2+b_3>0$	$-\varepsilon$	−	−	?	+	1
	$+\varepsilon$	−	+	?	−	2

Таким образом, в случае $a_2+b_3>0$ корень $y=0$ тоже дает одно приобретение числа перемен знаков, так что $l_0=-1$.

Докажем, что в случае $a_2+b_3<0$ проблема Гурвица всегда решается отрицательно в силу того, что уравнение $G(y)=0$ непременно имеет комплексные корни. Для этого обратимся к уравнению $\vartheta(y)=0$, которое, вводя обозначения

$$-\frac{a_2}{b_1}=A>0,\qquad \frac{b_3}{b_1}=\alpha^2$$

можно представить в виде

$$\vartheta(y)=\frac{Ay}{y^2-\alpha^2}+\operatorname{tg}y=\frac{A}{2(y+\alpha)}+\frac{A}{2(y-\alpha)}+\operatorname{tg}y=0$$

Наше условие может быть записано так: (5.8)

$$\vartheta'(0)=\left[-\frac{A}{2(y+\alpha)^2}-\frac{A}{2(y-\alpha)^2}+\frac{1}{\cos^2 y}\right]_{y=0}=-\frac{A}{\alpha^2}+1=\frac{a_2}{b_3}+1=\frac{a_2+b_3}{b_3}<0$$

Пусть $(k-\frac{1}{2})\pi<\alpha<(k+\frac{1}{2})\pi$. Возьмем K весьма большим и непременно больше k и рассмотрим интервал[1] $\left(-(2K-\frac{1}{2})\pi,\ (2K+\frac{1}{2})\pi\right)$. Полюсы функции $\vartheta(y)$ на этом интервале

$$-(2K-\tfrac{1}{2})\pi,\ \ldots,\ -(k+\tfrac{1}{2})\pi,\ -\alpha,\ -(k-\tfrac{1}{2})\pi,\ \ldots,\ -\tfrac{1}{2}\pi,$$
$$+\tfrac{1}{2}\pi,\ \ldots,\ (k-\tfrac{1}{2})\pi,\ \alpha,\ (k+\tfrac{1}{2})\pi,\ \ldots,\ (2K+\tfrac{1}{2})\pi$$

[1] Это есть интервал Л. С. Понтрягина $(-2K\pi+\varepsilon,\ 2K\pi+\varepsilon)$ при $\varepsilon=\frac{1}{2}\pi$.

делят этот интервал на $4K+2$ частных интервала, внутри каждого из которых функция $\vartheta(y)$ непрерывна, а на границах обращается в бесконечность. При этом на всех интервалах, кроме (5.9)

$$\left(-\left(k+\tfrac{1}{2}\right)\pi,\ -\alpha\right),\quad \left(-\alpha,\ -\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\pi\right),\quad \left(\left(k-\tfrac{1}{2}\right)\pi,\ \alpha\right),\quad \left(\alpha,\ \left(k+\tfrac{1}{2}\right)\pi\right)$$

функция $\vartheta(y)$ у левой границы имеет отрицательное, а у правой границы положительное бесконечное значение, и поэтому на интервалах она имеет по нечетному числу корней. При этом в силу нечетности функции $\vartheta(y)$ симметричные относительно начала координат такие интервалы (их всего $4K-4$) содержат одно и то же число корней, так что их общее число на этих интервалах будет $4K-4+4u$, $u\geqslant 0$.

Далее, непарный интервал $\left(\left(2K-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2K+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ имеет точно один корень. Другой непарный интервал $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ +\frac{1}{2}\pi\right)$ разобьем на два интервала $\left(-\frac{1}{2}\pi, 0\right)$ и $\left(0,\ +\frac{1}{2}\pi\right)$. На втором из них $\vartheta(y)$ обращается в нуль на левой границе и в силу (5.8) принимает отрицательные значения, а у правой границы стремится к положительной бесконечности, в силу чего, кроме нуля, на этом интервале имеется нечетное число корней, скажем, $1+2v$, $v\geqslant 0$. Столько же содержится в силу нечетности $\vartheta(y)$ и на другом интервале $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ 0\right)$. Таким образом, на всем интервале $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ +\frac{1}{2}\pi\right)$ содержится корней всего

$$1+(1+2v)+(1+2v)=3+4v \qquad (v\geqslant 0)$$

Складывая все полученные числа, для числа корней функции $\vartheta(y)$ на интервале $\left(-\left(2K-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2K+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ получим

$$(4K-4+4u)+1+(3+4v)=4K+4(u+v) \qquad (u\geqslant 0,\ v\geqslant 0) \tag{5.10}$$

Поскольку функция $\vartheta(y)$ на этом интервале имеет не более $4K+2$ корней, должно иметь место $u=0$, $v=0$, так что число ее корней равно $4K$, а потому в силу теоремы Л. С. Понтрягина функция $\vartheta(y)$ непременно имеет комплексные корни. Наше утверждение доказано.

Доказательство требует некоторого видоизменения в тех случаях, когда $\alpha=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$ совпадает с одним из полюсов функции $\operatorname{tg} y$ или же лежит в интервале $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ +\frac{1}{2}\pi\right)$.

В первом случае весь интервал $\left(-\left(2K-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \left(2K+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ разделится не на $4K+2$ интервала, а лишь на $4K$; но зато при переходе от $G(y)=0$ к $\vartheta(y)=0$ мы потеряем два корня, так что общий счет корней $G(y)=0$ останется прежний и наши рассуждения не потеряют силы. В случае $0<\alpha<\frac{1}{2}\pi$ на интервале $(0,\alpha)$ в силу (5.8) у левой и правой границ функция $\vartheta(y)$ отрицательна и потому будет иметь четное число корней, интервал же $\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\pi\right)$ будет иметь у обеих границ положительные значения $\vartheta(y)$. Принимая во внимание нечетность функции $\vartheta(y)$ для числа ее корней на интервале $\left(-\frac{1}{2}\pi,\ +\frac{1}{2}\pi\right)$, получим $1+4v$ $(v\geqslant 0)$.

Остальных интервалов теперь будет $4K-1$ (из них один непарный с одним корнем), и число корней на них будет

$$(4K-2+4u)+1=4K-1+4u \qquad (u\geqslant 0)$$

Таким образом, на интервале $(-(2K-\frac{1}{2})\pi, (2K+\frac{1}{2})\pi)$ общее число корней представится попрежнему выражением (5.10).

Рассматривая функцию $\theta(y)$, аналогично доказывается, что в случае $a_3+b_2<0$ решение проблемы Гурвица будет тоже отрицательным.

Мы произвели подсчеты для корней уравнения $\sin y=0$. Для всех них при $a_2+b_3>0$, $a_3+b_2>0$ имеет место $l_\nu=-1$. Это позволяет решить проблему Гурвица для того случая, когда уравнение

$$A\cos^4 y+B\cos^2 y\sin^2 y+C\sin^4 y=0 \tag{5.11}$$

не имеет вещественных корней. В этом случае корни уравнения $\sin y=0$ (кроме исключительных корней уравнения $\varphi(y)=0$) являются единственными корнями, подлежащими учету в формуле (3.6). На интервале $(-2K\pi+\varepsilon, 2K\pi+\varepsilon)$ этих корней всего $4K$, так что

$$\sum_{ik} l_{ik}=-4K \tag{5.12}$$

Остается вычислить значение $P(-2K\pi+\varepsilon)-P(2K\pi+\varepsilon)$.

Составим функции Штурма для значений $y=-2K\pi+\varepsilon$ и $y=2K\pi+\varepsilon$, считая $\varepsilon>0$ очень малым, а $K>0$ очень большим. Опять подсчитаем эти значения с точностью до бесконечно малых высшего порядка, причем условимся брать при заданном K достаточно малое ε. Имеем

$$\begin{aligned}
&V(-2K\pi+\varepsilon)\approx 4a_1\pi^2K^2-a_3, && V(2K\pi+\varepsilon)\approx 4a_1\pi^2K^2-a_3\\
&V_1(-2K\pi+\varepsilon)\approx -2a_2\pi K, && V_1(2K\pi+\varepsilon)\approx 2a_2\pi K\\
&V_2(-2K\pi+\varepsilon)\approx 2a_1a_2b_1\pi K\varepsilon, && V_2(2K\pi+\varepsilon)\approx -2a_1a_2b_1\pi K\varepsilon\\
&V_3(-2K\pi+\varepsilon)\approx -Ab_1\varepsilon^3, && V_3(2K\pi+\varepsilon)\approx -Ab_1\varepsilon^3.
\end{aligned}$$

Соответственно рассматриваем случаи $a_2>0$ и $a_2<0$. Имеем

	Случай I и III ($a_2>0$)					Случай II и IV ($a_2<0$)				
y	V	V_1	V_2	V_3	$P(y)$	V	V_1	V_2	V_3	$P(y)$
$-2K\pi+\varepsilon$	+	−	+	−	3	+	+	−	−	1
$2K\pi+\varepsilon$	+	+	−	−	1	+	−	+	−	3

Итак, в случаях I и III имеем $P(-2K\pi+\varepsilon)-P(2K\pi+\varepsilon)=3-1=2$; следовательно, подставляя в (3.6) и пользуясь (5.12), находим

$$P(-2K\pi+\varepsilon)-P(2K\pi+\varepsilon)-\sum_{ik} l_{ik}=+2-(-4K)=4K+2 \tag{5.13}$$

Это число совпадает с максимально возможным числом корней и таким образом в случаях I и III при $a_2+b_3>0$, $a_3+b_2>0$ и мнимых корнях уравнения (5.11) проблема Гурвица решается положительно.

В случаях же II и IV имеем $P(-2K\pi+\varepsilon)-P(2K\pi+\varepsilon)=1-3=-2$ и формула (3.6) дает

$$P(-2K\pi+\varepsilon)-P(2K\pi+\varepsilon)-\sum_{ik} l_{ik}=-2-(-4K)=4K-2 \tag{5.14}$$

Таким образом, в случаях II и IV при $a_2+b_3>0$ и мнимых корнях уравнения (5.11) проблема Гурвица решается отрицательно, — в (5.14) недостает четырех корней до максимального числа $4K+2$.

§ 6. Условия вещественности корней вспомогательного уравнения. Представим в более удобной форме условие вещественности корней вспомогательного уравнения

$$A\cos^4 y + B\cos^2 y\sin^2 y + C\sin^4 y = 0 \tag{6.1}$$

где

$$A = a_1 a_2^2 a_3, \quad B = a_2 b_2 (a_1 b_3 + a_3 b_1) - (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2, \quad C = b_1 b_2^2 b_3 \tag{6.2}$$

Это условие допускает простое представление, если представить абсолютные значения коэффициентов в виде квадратов

$$a_1 = \alpha_1^2, \quad a_2 = \pm\alpha_2^2, \quad a_3 = \alpha_3^2, \quad b_1 = \beta_1^2, \quad b_2 = \pm\beta_2^2, \quad b_3 = \beta_3^2 \tag{6.3}$$

Представим уравнение (6.1) в виде

$$A\,\mathrm{ctg}^4 y + B\,\mathrm{ctg}^2 y + C = 0 \qquad (t = \mathrm{tg}^2 y)$$

Условие вещественности корней уравнения (6.1) приводим к условию неотрицательности корней квадратного уравнения; это условие в силу $A > 0$, $C > 0$ имеет вид

$$B < 0, \qquad B^2 - 4AC \geqslant 0 \tag{6.4}$$

Коэффициенты a_2, b_2, имеющие неопределенные знаки плюс или минус, входят в коэффициенты уравнения (6.1) только в виде произведения $a_2 b_2$, а потому мы должны разобрать отдельно случаи, когда это произведение положительно и когда отрицательно, т. е. согласно (4.7), с одной стороны, случаи I и II, а с другой — случаи III и IV.

Случай I и II ($a_2 b_2 > 0$). Подставляя (6.3) в неравенства (6.4), имеем

$$\alpha_2^2\beta_2^2(\alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_1^2) - (\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)^2 < 0 \tag{6.5}$$

$$[\alpha_2^2\beta_2^2(\alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_1^2) - (\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)^2]^2 - 4\alpha_1^2\alpha_3^2\beta_1^2\beta_3^2\alpha_2^4\beta_2^4 \geqslant 0 \tag{6.6}$$

Неравенство (6.6) можно преобразовать к виду

$$[\alpha_2^2\beta_2^2(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)^2 - (\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)^2]\,[\alpha_2^2\beta_2^2(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 - \\ - (\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)^2] \geqslant 0 \tag{6.7}$$

Сокращая его на $(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)^2(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2$, получим

$$[\alpha_2^2\beta_2^2 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2]\,[\alpha_2^2\beta_2^2 - (\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)^2] \geqslant 0 \tag{6.8}$$

Поскольку левая часть неравенства (6.5) больше второго множителя в неравенстве (6.7), оба множителя в последнем, а также в неравенстве (6.8) должны быть отрицательны:

$$\alpha_2^2\beta_2^2 - (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 < 0, \qquad \alpha_2^2\beta_2^2 - (\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)^2 < 0$$

Из этих неравенств последнее является следствием первого, которое может быть представлено в виде

$$|\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1| > \alpha_2\beta_2 \tag{6.9}$$

Обратно, если это неравенство соблюдается, то будут неположительны оба множителя в неравенстве (6.8), а также и в неравенстве (6.7)

$$(\alpha_1{}^2\beta_3{}^2-\alpha_3{}^2\beta_1{}^2)^2 > \alpha_2{}^2\beta_2{}^2(\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1)^2, \quad (\alpha_1{}^2\beta_3{}^2-\alpha_3{}^2\beta_1{}^2)^2 > \alpha_2{}^2\beta_2{}^2(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)^2$$

Складывая их и деля на 2, придем к неравенству (6.5). Таким образом, условия (6.4) равносильны одному условию (6.9), которое можно представить также в виде

$$\left|\sqrt{a_1b_3}-\sqrt{a_3b_1}\right| > \sqrt{a_2b_2} \tag{6.10}$$

Случай III и IV ($a_2b_2 < 0$). Подставляя в неравенства (6.4) выражения (6.3), где надо будет положить $a_2b_2=-\alpha_2^2\,\beta_2^2$, получим

$$-\alpha_2{}^2\beta_2{}^2(\alpha_1{}^2\beta_3{}^2+\alpha_3{}^2\beta_3{}^2)-(\alpha_1{}^2\beta_3{}^2-\alpha_3{}^2\beta_1{}^2)^2 \leqslant 0 \tag{6.11}$$

$$[-\alpha_2{}^2\beta_2{}^2(\alpha_1{}^2\beta_3{}^2+\alpha_3{}^2\varepsilon_1{}^2)-(\alpha_1{}^2\beta_3{}^2-\alpha_3{}^2\beta_1^2)^2]^2-4\alpha_1{}^2\alpha_3{}^2\beta_1{}^2\beta_3{}^2\alpha_2{}^4\beta_2{}^4 \geqslant 0 \tag{6.12}$$

Первое из этих неравенств соблюдается всегда. Неравенство же (6.12) может быть переписано так:

$$[\alpha_2{}^2\beta_2{}^2(\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1)^2+(\alpha_1{}^2\beta_3{}^2-\alpha_3{}^2\beta_1{}^2)^2][\alpha_2{}^2\beta_2{}^2(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)^2+(\alpha_1{}^2\beta_2{}^2-\alpha_3{}^2\beta_1{}^2)^2] \geqslant 0$$

Это неравенство также соблюдается всегда, так как оба множителя в его левой части неотрицательны.

Мы приходим к следующему результату.

При $a_2b_2>0$ (случаи I и II) корни уравнения (6.1) вещественны тогда и только тогда, если соблюдается неравенство (6.10).

При $a_2b_2<0$ (случаи III и IV) корни уравнения (6.1) вещественны.

§ 7. Необходимые и достаточные критерии. Будем предполагать соблюдение условия вещественности попарно противоположных корней u_1, u_2, u_3, u_4 биквадратного уравнения ($C>0$, $A>0$)

$$Cu^4+Bu^2+A=0 \qquad (u=\operatorname{tg} y) \tag{7.1}$$

Пусть

$$u_1>0, \quad u_2>u_1, \quad u_3=-u_2, \quad u_4=-u_1 \tag{7.2}$$

Этим корням в каждом интервале $(\nu\pi, (\nu+1)\pi)$ соответствуют четыре значения $\operatorname{tg} y$. Для тех из них, которые лежат в интервале $(0, \pi)$, введем обозначения

$$\operatorname{tg}\tau_1=u_1, \quad \operatorname{tg}\tau_2=u_2, \quad \operatorname{tg}\tau_3=u_3, \quad \operatorname{tg}\tau_4=u_4 \tag{7.3}$$

Из условий (7.2) вытекает

$$0<\tau_1<\tau_2<\tfrac{1}{2}\pi, \quad \tau_3=\pi-\tau_2, \quad \tau_4=\pi-\tau_1, \quad \tfrac{1}{2}\pi<\tau_3<\tau_4<\pi \tag{7.4}$$

По аналогии с корнями функции V введем для этих корней функции V_3 понятие категории. Будем говорить, что корень τ первой категории, если при переходе y от $\tau-\varepsilon$ к $\tau+\varepsilon$ отношение $V_2(y)/V_3(y)$ меняет знак минус на плюс. Если же это отношение меняет знак плюс на минус, то будем говорить, что корень τ второй катагории. Для корней первой (соответственно второй) категории при переходе через них последовательность Штурма теряет (соответственно приобретает) одну перемену знаков, так что для $l_\tau = +1$ (соответственно $l_\tau = -1$).

Наряду с корнями τ_1, τ_2, τ_3, τ_4 мы будем рассматривать также корни уравнения (7.1), лежащие в каждом из интервалов $(\nu\pi, (\nu+1)\pi)$:

$$\nu\pi + \tau_1, \quad \nu\pi + \tau_2 \quad \nu\pi + \tau_3, \quad \nu\pi + \tau_4 \qquad (0 < \tau_1 < \tau_2 < \tfrac{1}{2}\pi < \tau_3 < \tau_4 < \pi)$$

Изучим отношение

$$\frac{V_2(y)}{V_3(y)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2 \operatorname{tg}^2 y)\, y + (a_1b_3 - a_3b_1)\operatorname{tg} y}{\cos^2 y \sin^2 y\, [C \operatorname{tg}^4 y + B \operatorname{tg}^2 y + A]} \tag{7.5}$$

Знаменатель V_3 этого выражения вблизи концов интервала $(\nu\pi, (\nu+1)\pi)$ положителен, так как его первые два множителя всегда положительны, а выражение в квадратных скобках при $\operatorname{tg} y = 0$ равно A, причем $A > 0$. Внутри этого интервала будем иметь

$$\begin{array}{llll} V_3(y) > 0 & (0 < y < \tau_1), & V_3(y) > 0 & (\frac{1}{2}\pi < y < \tau_3) \\ V_3(y) < 0 & (\tau_1 < y < \tau_2), & V_3(y) < 0 & (\tau_3 < y < \tau_4) \\ V_3(y) > 0 & (\tau_2 < y < \frac{1}{2}\pi), & V_3(y) > 0 & (\tau_4 < y < \pi) \end{array} \tag{7.6}$$

причем $V_3(y) \to \infty$ при $y \to \frac{1}{2}\pi$.

Итак, знаменатель выражения (7.5) меняет знак плюс на минус при прохождении через корни с нечетными значками и минус на плюс при прохождении через корни с четными значками.

Обратимся к числителю выражения (7.5). Его поведение различно в каждом из четырех случаев, а потому рассмотрим их отдельно.

Случай I ($a_2 > 0$, $b_2 > 0$). В этом случае коэффициент при свободно входящем y всегда положителен. Второй член $(a_1b_3 - a_2b_1)\operatorname{tg} y$ при неравенстве $a_1b_3 - a_3b_1 > 0$ для $y = k\pi + \tau_1$ и $y = k\pi + \tau_2$ будет положительным, а для $y = k\pi + \tau_3$ и $y = k\pi + \tau_4$ будет отрицательным. При неравенстве $a_1b_3 - a_2b_1 < 0$ наоборот. Иначе говоря, произведение

$$(a_1b_3 - a_3b_1)\operatorname{tg} \tau_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{7.7}$$

для первой пары корней $k\pi + \tau_1$ и $k\pi + \tau_2$ будет положительным, а для второй пары $k\pi + \tau_3$ и $k\pi + \tau_4$ отрицательным или наоборот, смотря по знаку выражения $a_1b_3 - a_3b_1$.

Если произведение (7.7) положительно, числитель $V_2(y)$ выражения (7.5) при всех положительных значениях k остается положительным. Если же произведение (7.7) отрицательно, числитель $V_2(y)$ для соответствующих $y_{ik} = k\pi + \tau_i$ при большом k положителен, а при малом k отрицателен. Границей между положительными и отрицательными значениями $V_2(y)$ является число k_i, удовлетворяющее неравенствам

$$(k_i - 1)\pi + \tau_i + \frac{(a_1b_3 - a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_i}{a_1a_2 + b_1b_2 \operatorname{tg}^2\tau_i} < 0 < k_i\pi + \tau_i + \frac{(a_1b_3 - a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_i}{a_1a_2' + b\, b_2 \operatorname{tg}^2\tau_i}$$

где $i = 1, 2$ либо $i = 3, 4$.

Условимся, как это принято в теории чисел, под величиной, заключенной в квадратные скобки $[\ldots]$, понимать наибольшее целое число, не превышающее эту величину, причем будем исключать случаи, когда под знаком [...] содержится целое число, т. е. выносить его за знак [...]. Для k_i получим выражение

$$k_i = \left[-\frac{\tau_i}{\pi} - \frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1) \operatorname{tg} \tau_i}{\pi (a_1 a_2 + b_1 b_2 \operatorname{tg}^2 \tau_i)} \right] + 1 \qquad \binom{i = 1,\ 2}{i = 3,\ 4} \tag{7.8}$$

Приминительно к случаю, когда произведение (7.7) положительно, число k_i, определяемое формулой (7.8), будет неположительным. Таким образом, в общем случае, т. е. для $i = 1, 2, 3, 4$, формула (7.8) остается в силе, причем будем иметь

$$k_i (a_1 b_3 - a_3 b_1) \operatorname{tg} \tau_i \leqslant 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{7.9}$$

Сумма $\sum l_{ik}$, соответствующая корням $y_{ik} = k\pi + \tau_i$ $(i = 1,\ 2, 3, 4)$, на интервале $(-2K\pi,\ 2K\pi)$ при достаточно большом K равна

$$\sum_{ik} l_{ik} = \sum_{i=1}^{4} (l_{i,-2K} + \cdots + l_{i,k_i-1} + l_{ik_i} + \cdots + l_{i,2K-1}) \tag{7.10}$$

Для ее вычисления заметим, что корни $y_{ik} = k\pi + \tau_i$ с нечетными значками i при $k \geqslant k_i$ являются корнями второй категории,—для них $l_{ik} = -1$; при $k \leqslant k_{i-1}$ являются корнями первой.—для них $l_{ik} = +1$.

Для корней с четными значками имеет место обратное соотношение. Отсюда получим

$$\begin{aligned} \sum l_{ik} = \{[(-1)(2K - k_1) + (+1)(2K + k_1) + \\ + (-1)(2K - k_3) + (+1)(2K + k_3)] + [(+1)(2K - k_2) + \\ + (-1)(2K + k_2) + (+1)(2K - k_4) + (-1)(2K + k_4)]\} = \\ = 2k_1 + 2k_3 - 2k_2 - 2k_4 = 2(k_1 - k_2 + k_3 - k_4) \end{aligned} \tag{7.11}$$

Подставляя τ_1, τ_2, $\tau_3 = \pi - \tau_2$, $\tau_4 = \pi - \tau_1$ в правую часть (7.8), найдем $k_3 = -k_2$, $k_4 = -k_1$. Подставляя эти значения в (7.11), найдем

$$\sum l_{i,k} = 4(k_1 - k_2) \tag{7.12}$$

Это выражение, как и следовало ожидать, не зависит от значения K. Докажем явным образом, что оно не может быть отрицательным. Для этого обратимся к формуле (7.8) и докажем, что $k_1 - k_2 \geqslant 0$, $k_3 - k_4 \geqslant 0$. Для этого достаточно установить положительность выражений:

$$-\frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1) \operatorname{tg} \tau_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2 \operatorname{tg}^2 \tau_1} - \tau_1 + \frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1) \operatorname{tg} \tau_2}{a_1 a_2 + b_1 b_2 \operatorname{tg}^2 \tau_2} + \tau_2$$

$$-\frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1) \operatorname{tg} \tau_3}{a_1 a_2 + b_1 b_2 \operatorname{tg}^2 \tau_3} - \tau_3 + \frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1) \operatorname{tg} \tau_4}{a_1 a_2 + b_1 b_2 \operatorname{tg}^2 \tau_4} + \tau_4$$

Второе из них переходит в первое после подстановки

$$\tau_3 = \pi - \tau_2, \qquad \operatorname{tg} \tau_3 = -\operatorname{tg} \tau_2, \qquad \tau_4 = \pi - \tau_1, \qquad \operatorname{tg} \tau_4 = -\operatorname{tg} \tau_1 \tag{7.13}$$

а потому достаточно установить положительность первого выражения. Оно равно

$$(\tau_2 - \tau_1) + \frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1)(\operatorname{tg} \tau_2 - \operatorname{tg} \tau_1)(a_1 a_2 - b_1 b_2 \operatorname{tg} \tau_1 \operatorname{tg} \tau_2)}{(a_1 a_2 + b_1 b_2 \operatorname{tg}^2 \tau_1)(a_1 a_2 + b_1 b_2 \operatorname{tg}^2 \tau_2)} \tag{7.14}$$

В этом выражении первое слагаемое положительно. Во втором слагаемом множитель $\operatorname{tg}\tau_2 - \operatorname{tg}\tau_1$ и знаменатель положительны. Остается установить положительность множителя $(a_1b_3 - a_3b_1)(a_1a_2 - b_1b_2 \operatorname{tg}\tau_1 \operatorname{tg}\tau_2)$.

Корни $\operatorname{tg}\tau_1$, $\operatorname{tg}\tau_2$, $\operatorname{tg}\tau_3$, $\operatorname{tg}\tau_4$ уравнения 4-й степени (7.1) удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{tg}\tau_1 \operatorname{tg}\tau_2 \operatorname{tg}\tau_3 \operatorname{tg}\tau_4 = \frac{A}{C} = \frac{\alpha_1^2\alpha_2^4\alpha_3^2}{\beta_1^2\beta_2^4\beta_3^2}$$

Но $\operatorname{tg}\tau_3 = -\operatorname{tg}\tau_2$, $\operatorname{tg}\tau_4 = -\operatorname{tg}\tau_1$ и, $\operatorname{tg}\tau_1 > 0$, $\operatorname{tg}\tau_2 > 0$; поэтому

$$\operatorname{tg}\tau_1 \operatorname{tg}\tau_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_1\beta_2^2\beta_3} > 0$$

Следовательно,

$$(a_1b_3 - a_3b_1)(a_1a_2 - b_1b_2 \operatorname{tg}\tau_1 \operatorname{tg}\tau_2) = (\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)\left(\alpha_1^2\alpha_2^2 - \beta_1^2\beta_2^2\frac{\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_1\beta_2^2\beta_3}\right) =$$
$$= (\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\frac{\alpha_1\alpha_2^2}{\beta_3} = (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)\frac{\alpha_1\alpha_2^2}{\beta_3} \geqslant 0$$

Для решения проблемы Гурвица в случае I вспомним выражения (3.6) и (5.13). В случае вещественных корней уравнения (7.1) из выражения (5.13) надо еще вычесть $\sum l_{ik}$, распространенную на рассмотренные корни, т. е. (7.12), — получим $4K + 2 - 4(k_1 - k_2)$.

Проблема Гурвица решается в положительном смысле тогда и только тогда, если это выражение равно $4K + 2$, т. е. если $k_1 = k_2$, или в силу формулы (7.8)

$$\left[\frac{(a_1b_3 - a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_1}{\pi(a_1a_2 + b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_1)} + \frac{\tau_1}{\pi}\right] = \left[\frac{(a_1b_3 - a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_2}{\pi(a_1a_2 + b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_2)} + \frac{\tau_2}{\pi}\right] \tag{7.15}$$

Это условие можно выразить явно через коэффициенты. Из решения уравнения (7.1) и согласно (7.3) имеем

$$\tau_1 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}}, \quad \tau_2 = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}} \tag{7.16}$$

Подставляя эти выражения в (7.15), получим искомое условие.

Случай II ($a_2 < 0$, $b_2 < 0$). В числителе выражения (7.5) коэффициент $a_1a_2 + b_1b_2\operatorname{tg}^2 y$ при свободно входящем y в силу $a_2 < 0$, $b_2 < 0$ всегда отрицателен, а потому мы, сохранив для k_j выражение (7.8), должны поменять ролями корни первой и второй категорий. Вычисляя сумму $\sum l_{ik}$ аналогично случаю I, получим [см. формулу (7.12)]

$$\sum l_{ik} = -4(k_1 - k_2) \tag{7.17}$$

В то же время для этого случая выражения (7.14) в силу $a_2 = -\alpha_2^2$, $b_2 = -\beta_2^2$ может быть преобразовано. Из уравнения (7.1) имеем, используя обозначения (7.3):

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}^2\tau_1 \operatorname{tg}^2\tau_2 = \frac{A}{C} = \frac{\alpha_1^2\alpha_2^4\alpha_3^2}{\beta_1^2\beta_2^4\beta_3^2}; \qquad \operatorname{tg}\tau_1 \operatorname{tg}\tau_2 = \frac{\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_1\beta_2^2\beta_3} \qquad (0<\tau_1<\tau_2<\tfrac{1}{2}\pi) \\ &\operatorname{tg}^2\tau_1 + \operatorname{tg}^2\tau_2 = -\frac{B}{C} = \frac{(\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)^2 - \alpha_2^2\beta_2^2(\alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_1^2)}{\beta_1^2\beta_2^4\beta_3^2} \end{aligned} \tag{7.18}$$

Теперь преобразуем отдельные сомножители выражения (7.14):

$$a_1 b_3 - a_2 b_1 = \alpha_1^2 \beta_3^2 - \alpha_3^2 \beta_1^2, \qquad \operatorname{tg} \tau_2 - \operatorname{tg} \tau_1 = \sqrt{(\operatorname{tg} \tau_2 - \operatorname{tg} \tau_1)^2}$$

$$(\operatorname{tg} \tau_2 - \operatorname{tg} \tau_1)^2 = \operatorname{tg}^2 \tau_2 + \operatorname{tg}^2 \tau_1 - 2 \operatorname{tg} \tau_1 \operatorname{tg} \tau_2 =$$

$$= \frac{(\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)^2 - \alpha_2^2\beta_2^2(\alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_1^2) - 2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3\beta_1\beta_2^2\beta_3}{\beta_1^2\beta_2^4\beta_3^2} =$$

$$= \frac{(\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)^2 - \alpha_2^2\beta_2^2(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)^2}{\beta_1^2\beta_2^4\beta_3^2} = \frac{(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)^2\left[(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 - \alpha_2^2\beta_2^2\right]}{\beta_1^2\beta_2^4\beta_3^2} \tag{7.19}$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \tau_2 - \operatorname{tg} \tau_1 = \frac{(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)\sqrt{(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 - \alpha_2^2\beta_2^2}}{\beta_1\beta_2^2\beta_3} \tag{7.20}$$

Далее, $(a_2 = -\alpha_2^2,\ b_2 = -\beta_2^2)$

$$a_1 a_2 - b_1 b_2 \operatorname{tg} \tau_1 \operatorname{tg} \tau_2 = -\alpha_1^2\alpha_2^2 + \beta_1^2\beta_2^2 \frac{\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3}{\beta_1\beta_2^2\beta_3} = -\frac{\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)}{\beta_3} \tag{7.21}$$

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2 \operatorname{tg}^2 \tau_1)(a_1 a_2 + b_1 b_2 \operatorname{tg}^2 \tau_2) =$$

$$= a_1^2 a_2^2 + b_1^2 b_2^2 \operatorname{tg}^2 \tau_1 \operatorname{tg}^2 \tau_2 + a_1 a_2 b_1 b_2 (\operatorname{tg}^2 \tau_1 + \operatorname{tg}^2 \tau_2) =$$

$$= \alpha_1^4\alpha_2^4 + \beta_1^4\beta_2^4 \frac{\alpha_1^2\alpha_2^4\alpha_3^2}{\beta_1^2\beta_2^4\beta_3^2} + \alpha_1^2\alpha_2^2\beta_1^2\beta_2^2 \frac{(\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)^2 - \alpha_2^2\beta_2^2(\alpha_1^2\beta_3^2 + \alpha_3^2\beta_1^2)}{\beta_1^2\beta_2^4\beta_3^2} =$$

$$= \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{\beta_2^2\beta_3^2}\Big(\alpha_1^2\alpha_2^2\beta_2^2\beta_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2\beta_1^2\beta_2^2 + \alpha_1^4\beta_3^4 + \alpha_3^4\beta_1^4 - 2\alpha_1^2\alpha_3^2\beta_1^2\beta_3^2 -$$

$$- \alpha_1^2\alpha_2^2\beta_2^2\beta_3^2 - \alpha_2^2\alpha_3^2\beta_1^2\beta_2\Big) = \frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{\beta_2^2\beta_3^2}(\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)^2 \tag{7.22}$$

Наконец, подставляя найденные значения в выражение (7.14), найдем

$$(\tau_2 - \tau_1) - \frac{(\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)(\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1)\sqrt{(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 - \alpha_2^2\beta_2^2}\,\alpha_1\alpha_2^2(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\beta_2^2\beta_3^2}{\beta_1\beta_2^2\beta_3^2(\alpha_1^2\beta_3^2 - \alpha_3^2\beta_1^2)^2\alpha_1^2\alpha_2^2} =$$

$$= (\tau_2 - \tau_1) - \frac{\sqrt{(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 - \alpha_2^2\beta_2^2}}{\alpha_1\beta_1} \tag{7.23}$$

Доказано, что это выражение положительно. С другой стороны, из неравенств $0 < \tau_1 < \tau_2 < \frac{1}{2}\pi$ следует, что оно не превышает $\frac{1}{2}\pi$, т. е.

$$0 < \frac{\tau_2 - \tau_1}{\pi} - \frac{\sqrt{(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)^2 - \alpha_2^2\beta_2^2}}{\pi\alpha_1\beta_1} \leqslant \frac{1}{2} \tag{7.24}$$

Но если разность величин не превышает $^1/_2$, то разность их целых частей не превышает 1; отсюда, принимая во внимание формулы (7.8) и доказанные раньше $k_1 - k_2 \geqslant 0$, имеем

$$0 \leqslant k_1 - k_2 \leqslant 1 \tag{7.25}$$

Чтобы получить для этого случая выражение (3.6), надо от выражения (5.14) отнять выражение (7.17). Имеем $4K - 2 + 4(k_1 - k_2)$. Из (7.25) следует, что это число не превышает $(4K - 2) + 4 = 4K + 2$. Оно равно $4k + 2$ тогда и только тогда, если задача Гурвица решается в положительном смысле. Таким образом, критерий Гурвица для случая II имеет вид $k_1 - k_2 = 1$, т. е.

$$\left[-\frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1)\operatorname{tg}\tau_1}{\pi(a_1 a_2 + b_1 b_2 \operatorname{tg}^2\tau_1)} - \frac{\tau_1}{\pi}\right] - \left[-\frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1)\operatorname{tg}\tau_2}{\pi(a_1 a_2 + b_1 b_2 \operatorname{tg}^2\tau_2)} - \frac{\tau_2}{\pi}\right] = +1 \tag{7.26}$$

где τ_1, τ_2, $\operatorname{tg}\tau_1$, $\operatorname{tg}\tau_2$ находятся из формул (7.16).

В случаях III и IV коэффициент при свободно входящем y в числителе выражения (7.5), т. е. $a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2 y$, принимает значения разных знаков при $y=\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$. В самом деле, эти случаи можно охарактеризовать неравенством $a_2b_2<0$. Произведение

$$(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_1)(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_2)=-\frac{\alpha_1^2\alpha_2^2}{\beta_2^2\beta_3^2}(\alpha_1^2\beta_3^2-\alpha_3^2\beta_1^2)^2<0$$

отрицательно, следовательно, множители имеют разные знаки.

Случай III $(a_2>0,\ b_2<0)$. Функция $a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2 y$ при $y=0$ положительна и в интервале $0<y<\frac{1}{2}\pi$ убывает, а потому при $y=\tau_1$ она положительна, а при $y=\tau_2$ отрицательна. Далее, при $y=\tau_3$ она отрицательна, а при $y=\tau_4$ положительна. Принимая во внимание знаменатель выражения (7.5), мы заключаем, что при больших значениях $k\ (k\geqslant k_i)$ корни τ_1 и τ_2 второй категории, а корни τ_3 и τ_4 первой категории. Таким образом, [см. (7.11)]

$$\begin{gathered}\sum l_{ik}=\{[(-1)(2K-k_1)+(-1)(2K-k_2)+(+1)(2K-k_3)+(+1)(2K-k_4)]+\\+[(+1)(2K+k_1)+(+1)(2K+k_2)+(-1)(2K+k_3)+(-1)(2K+k_4)]\}=\\=2k_1+2k_2-2k_3-2k_4=4(k_1+k_2)\end{gathered}$$

Это число следует вычесть из (5.13). Имеем $4K+2-4(k_1+k_2)$.

Критерий Гурвица приводится к тому, что это выражение должно быть равно $4K+2$, т. е. что $k_1+k_2=0$, или [см. (7.8)]

$$\left[-\frac{(a_1b_3-a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_1}{\pi(a_1a_2+b_1b_2)\operatorname{tg}^2\tau_1}-\frac{\tau_1}{\pi}\right]+\left[-\frac{(a_1b_3-a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_2}{\pi(a_1a_2+b_1b_2)\operatorname{tg}^2\tau_2}-\frac{\tau_2}{\pi}\right]=-2 \qquad (7.27)$$

В случае III левая часть этого условия всегда $\geqslant -2$, так как сумма выражений, стоящих под знаком $[\dots]$, больше чем -1:

$$\begin{gathered}-\frac{(a_1b_3-a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_1}{\pi(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_1)}-\frac{\tau_1}{\pi}-\frac{(a_1b_3-a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_2}{\pi(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_2)}-\frac{\tau_2}{\pi}=\\=-\frac{(a_1b_3-a_3b_1)(\operatorname{tg}\tau_1+\operatorname{tg}\tau_2)(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}\tau_1\operatorname{tg}\tau_2)}{\pi(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_1)(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_2)}-\frac{\tau_1+\tau_2}{\pi}.\end{gathered}$$

Первое слагаемое, как легко убедиться, положительно, а второе в силу $0<\tau_1<\tau_2<\frac{1}{2}\pi$ больше чем -1.

Случай IV $(a_2<0,\ b_2>0)$. Функция $a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2 y$ при $y=0$ отрицательна и на интервале $0<y<\frac{1}{2}\pi$ растет, а потому

$$a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_1<0, \qquad a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_2>0$$

Мы видим, что в случае IV распределение корней по категориям обратно случаю III. При больших значениях $k\ (k\geqslant k_i)$ корни τ_1 и τ_2 первой категории, а τ_3 и τ_4 — корни второй категории. Таким образом,

$$\begin{gathered}\sum l_{ki}=\{[(+1)(2K-k_1)+(+1)(2K-k_2)+(-1)(2K-k_3)+\\+(-1)(K-k_4)]+[(-1)(2K+k_1)+(-1)(2K+k_2)+(+1)(2K+k_3)+\\+(+1)(2K+k_4)]\}=-2k_1-2k_2+2k_3+2k_4=-4(k_1+k_2)\end{gathered}$$

Это число следует вычесть из (5.14). Имеем $4K-2+4(k_1+k_2)$.

Критерий Гурвица приводится к тому, что это выражение должно быть равно $4K+2$, т. е. должно быть $k_1+k_2=1$, или [см. (7.8)]

$$\left[-\frac{(a_1b_3-a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_1}{\pi(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_1)}-\frac{\tau_1}{\pi}\right]+\left[-\frac{(a_1b_3-a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_2}{\pi(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_2)}-\frac{\tau_2}{\pi}\right]=-1 \quad (7.28)$$

Докажем, что левая часть этого выражения в случае IV всегда меньше -1. В самом деле, для суммы выражений, стоящих под знаком $[\ldots]$, имеем

$$-\frac{(a_1b_3-a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_1}{\pi(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_1)}-\frac{\tau_1}{\pi}-\frac{(a_1b_3-a_3b_1)\operatorname{tg}\tau_2}{\pi(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_1)}-\frac{\tau_2}{\pi}=$$
$$=-\frac{(a_1b_3-a_3b_1)(\operatorname{tg}\tau_1+\operatorname{tg}\tau_2)(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}\tau_1\operatorname{tg}\tau_2)}{\pi(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_1)(a_1a_2+b_1b_2\operatorname{tg}^2\tau_2)}-\frac{\tau_1+\tau_2}{\pi}<0$$

так как здесь каждое слагаемое отрицательно.

Таким образом, мы аналитически выразили критерий для проблемы Гурвица во всех тех случаях, когда a_1, a_3, b_1 b_3 положительны. Комбинация положительных a_1, a_3 с отрицательными b_1, b_3 (или, обратно, отрицательных a_1, a_3 с положительными b_1, b_3) получается в результате замены i на $-i$ в исходной функции $H(x+iy)$. С другой стороны, она получится, если изменить знаки при всех коэффициентах одной из двух первых функций Штурма $V(y)$ или $V_1(y)$. Но в результате последнего преобразования последовательные функции Штурма попеременно изменят знак или останутся неизменными, — все постоянства перейдут в перемены и обратно, а корни изменят свои категории. В результате выражения (5.6) и (5.7) изменят свои знаки на обратные.

Поскольку в разобранных случаях в выражениях (5.13) и (5.14) в качестве коэффициента при K будут $+4$, то после этого преобразования он станет равным -4 и мы не получим выражения $4K+2$, которое необходимо и достаточно для положительного решения проблемы Гурвица. Отсюда вытекает, что комбинация $a_1>0$, $a_3>0$, $b_1<0$, $b_3<0$ не дает функций, все корни которых имели бы отрицательные вещественные части. Характер преобразования $x+iy \to x-iy$ показывает, что при этой комбинации знаков среди прочих будут получаться функции, все корни которых имеют положительные вещественные части.

§ 8. Граничные случаи. В исследовании поставленной проблемы Гурвица классификации случаев была ограничена строгими неравенствами (>0, <0), т. е. из $\geqslant 0$ или $\leqslant 0$ равенство исключалось. Кроме того, в условиях не рассматривались случаи равенств $a_2=0$ и $a_2+b_3=0$; наконец, не рассматривались случаи, когда в условиях (7.15), (7.26), (7.27) и (7.28) под знаком $[\ldots]$ стоят целые числа. Ниже, оставляя в стороне детальный разбор, приводятся общие соображения, с помощью которых могут быть исследованы граничные случаи.

В основу исследования положим принцип непрерывной зависимости корней от коэффициентов. Он дан Гурвицем [6] в виде теоремы.

Пусть в области B плоскости z функция $f(z)$ и каждая из функций $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ... имеет характер рациональной функции. Далее, пусть в этой же области имеет место равномерно $\lim \varphi_n(z)=f(z)$ *при* $n\to\infty$.

Тогда точки сгущения корней уравнения $\varphi_1(z)=0,\ \varphi_2(z)=0,\ \ldots,\ \varphi_n(z)=0,\ \ldots,$ *в области B совпадают с решениями уравнения* $f(z)=0$. *При этом в сколь угодно малой окрестности r-кратного корня уравнения* $f(z)=0$ *лежит точно r корней уравнения* $\varphi_n(z)=0$, *поскольку n превосходит определенное (зависящее от выбора окрестности) число.*

Если мы получим в качестве необходимого критерия для проблемы Гурвица систему неравенств

$$\psi_i(a_2,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2\ b_3)\geqslant 0 \qquad i=1,2\ .\ .\ .\ ,r \tag{8.1}$$

в то время как неравенства

$$\psi_i(a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ b_3)>0 \qquad i=1,2\ .\ .\ .\ ,r \tag{8.2}$$

дают достаточный критерий, — случай, когда несколько неравенств этой системы обращаются в равенства, дает функцию, которую можно рассматривать как предельную для системы функций, удовлетворяющих неравенствам (8.2), и, следовательно, все корни которых лежат левее мнимой оси. Тогда из теоремы Гурвица следует, что предельная функция имеет все корни левее или по крайней мере на мнимой оси. С другой стороны, эту же функцию можно рассматривать как предельную для системы функций, для каждой из которых не соблюдаются даже неравенства (8.1) и, следовательно, каждая из которых имеет хотя бы один корень правее мнимой оси. Если бы мы знали, что эти корни имеют точку сгущения (например, это имело бы место, если бы мы рассматривали корни внутри конечной области), то эта точка сгущения была бы корнем предельной функции. Поскольку эта последняя не имеет корней правее мнимой оси, этот корень предельной функции должен лежать на мнимой оси. Однако в общем случае нельзя утверждать, что предельная функция имеет корни на мнимой оси.

Таким образом, *если функция* $f(z)$ *удовлетворяет условиям* (8.1), *но не удовлетворяет условиям* (8.2), *то ее корни лежат левее мнимой оси или, быть может, на самой мнимой оси.*

Такое же заключение можно сделать относительно функций, коэффициенты которых являются пограничными относительно принятой нами классификации и поэтому не были нами рассмотрены. Поэтому если нахождение корней на мнимой оси допустимо по характеру поставленной задачи, то все эти пограничные функции надо считать дающими положительное решение проблемы Гурвица. В противном случае целесообразнее всего специально исследовать, не лежат ли корни исследуемой функции на мнимой оси. Это исследование проводится следующим образом.

Если функция $H(z)$ имеет корни на мнимой оси, то в этом и только в этом случае $H(iy)=F(y)+iG(y)$ имеет вещественные корни, которые, очевидно, должны быть общими корнями функций $F(y)$ и $G(y)$. Вопрос приводится к нахождению тех общих корней функций $F(y)$ и $G(y)$, которые при том вещественны.

Обратимся к частному виду функции $F(y)$ и $G(y)$, определенных согласно (4.2)

Исключая $\cos y$ и $\sin y$ из системы уравнений (4.2), придем к биквадратному уравнению

$$a_1b_1y^4+(a_2b_2-a_1b_3-a_3b_1)\,y^2+a_3b_3=0 \tag{8.3}$$

Решая его и подставляя его корни в одно из уравнений (4.2), найдем необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция $H(z)$ имела чисто мнимые корни: если его левая часть обращается в нуль, то это означает, что $H(z)$ имеет корни на мнимой оси; в противном случае не имеет. Эта задача решается элементарно для каждого численного примера. Нетрудно было бы написать также ее решение в общем виде. Мы здесь ограничимся двумя примерами.

1. *Случай* $a_1=0$. Уравнение (8.3) и условие вещественности его корней соответственно будут

$$(a_2b_2-a_3b_1)\,y^2+a_3b_3=0. \qquad a_2b_2-a_3b_1<0$$

Чтобы функция $H(z)$ имела чисто мнимые корни, необходимо и достаточно соблюдение равенства

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{a_3b_3}{a_3b_1-a_1b_2}}=\sqrt{\frac{b_2{}^2b_3}{a_3(a_3b_1-a_2b_2)}}$$

2. *Случай* $a_2=0$ (или $b_2=0$). Уравнение (8.3) имеет вид

$$a_1b_1y^4-(a_1b_3+a_3b_1)\,y^2+a_3b_3=0$$

Подставив корни этого уравнения

$$y_1=\pm\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}, \qquad y_2=\pm\sqrt{\frac{b_3}{b_1}}$$

соответственно y_1 в первое, а y_2 во второе уравнение (4.2), получим

$$b_2\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}\sin\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}=0, \qquad a_2\sqrt{\frac{b_3}{b_1}}\cos\sqrt{\frac{b_3}{b_1}}=0$$

Отсюда следует соответственно

$$a_3=a_1\nu^2\pi^2, \qquad b_3=b_1\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)^2\pi^2 \tag{8.4}$$

где ν — целое число.

Выполнение хоть одного из равенств (8.4) необходимо и достаточно, чтобы функция $H(z)$ при $a_2=0$ или $b_2=0$ имела чисто мнимые корни.

Резюмируем изложенную задачу Гурвица для функции $H(z)$, опуская граничные случаи. Необходимым условием является одинаковость знаков коэффициентов a_1, a_3, b_1, b_3. Меняя в случае надобности знак $H(z)$, можно считать все эти коэффициенты положительными.

Далее, необходимыми являются неравенства $a_2+b_3>0$, $a_3+b_2>0$.

Дальнейшие условия различны в зависимости от знаков a_2 и b_1. Поэтому различаются частные случаи I, II, III, IV, определенные (4.7).

При исследовании в рассмотрение вводится *вспомогательное уравнение* $C\operatorname{tg}^4y+B\operatorname{tg}^2y+A=0$, где A, B и C определены (6.2).

В случаях III и IV, т. е. когда согласно (4.7) $a_2b_2<0$, корни вспомогательного уравнения всегда вещественны; в случаях I и II, т. е. когда $a_2b_2>0$, они вещественны, если имеет место (6.10).

Необходимые и достаточные признаки различны в случае комплексных и в случае вещественных корней.

А. *Комплексные корни* вспомогательного уравнения. Необходимо и достаточно, чтобы $a_2 > 0$, $b_2 > 0$, т. е. имел бы место случай I. В случае II решение проблемы Гурвица отрицательно. Случаи III и IV вообще несовместимы с А.

В. *Вещественные корни* вспомогательного уравнения. Обозначая корни вспомогательного уравнения $\operatorname{tg}\tau_1$, $\operatorname{tg}\tau_2$, $\operatorname{tg}\tau_3$, $\operatorname{tg}\tau_4$ так, что $0 < \tau_1 < \tau_2 < \frac{1}{2}\pi < \tau_3 < \tau_4 < \pi$, имеем $\tau_3 = \pi - \tau_2$, $\tau_4 = \pi - \tau_1$ Тогда необходимые и достаточные условия в случаях I, II, III и IV будут иметь соответственно вид (7.15), (7.26), (7.27) и (7.28).

Поступила в редакцию
9 I 1946

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер и Крейн. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков. 1933, Стр. 231-252.
2. Benjaminowitsch S. Ueber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einer Halbebene und auf ihrem Rande. Monatshefte der Math. und Phys. Bd. 42, 1925. S 279—308.
3. Fujiwara M. Ueber die algebraischen Gleichungen, deren Wurzeln in einem Kreise oder in einer Halbebene liegen. Math. Zeitschrift Bd. 24, 1925. S. 161—169.
4. Fujiwara M. Ueber die Nullstellen der ganzen Funktionen vom Geschlecht Null und Eins. Tôhoku Math. Journal T. 25. 1925. S. 27—35.
5. Grommer J. Ueber ganze transzendente Funktionen mit lauter reellen Nullstellen. Journ. für Math. T. 144. 1914.
6. Hurwitz A. Ueber die Wurzeln einiger transzendenten Gleichungen. Mitt. Math. Ges. Hamb. Bd. 2. 1890. S. 25—31.
7. Hurwitz A. Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. Math. Ann. Bd. 46. 1895. S. 273-284.
8. Liénard et Chipart. Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique. Journ. de math. (6), 10. 1914. P. 291—346.
9. Мейман Н. К проблеме Эрмита-Гурвица для целых трансцендентных функций. ДАН СССР. 1940. Т 40. N 2. Стр. 55—58.
10. Мейман Н. К вопросу о распределении нулей целой функции. ДАН СССР. 1940. Т. 40. N 5. Стр. 200—203.
11. Понтрягин Л. С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций. Изв. АН. СССР. Серия мат. 1942. Т. 6. № 3.
12. Schur J. Ueber algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen. Zeitschr. für ang. Math. und Mech. 1921. Nr. 1.
13. Tschebotaröw N. Ueber die Realität von Nullstellen ganzer transzendenter Funktionen. Math. Ann. 1928. Bd. 99.
14. Чеботарев Н. Г. Об одном видоизменении способов Штурма и Фурье. ДАН СССР. 1942. Т. 34. N 1. Стр. 3—6.
15. Чеботарев Н. Г. Об одном частном виде трансцендентных уравнений. ДАН СССР. 1942. Т. 34. N 2. Стр. 42—45.
16. Чеботарев Н. Г. Об одном видоизменении постановки задачи Гурвица. ДАН СССР. 1942. Т. 35. Стр. 251—254.
17. Чеботарев Н. Г. Задача Гурвица для трансцендентных функций. Труды Ленинградской Военно-Воздушной Академии.