

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПРИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН

Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

В настоящей работе рассматриваются неустановившиеся процессы при поперечных колебаниях стержней и пластин.

Обычные дифференциальные уравнения поперечных колебаний являются неволновыми — их интегрирование приводит к мгновенному распространению возмущения от источника колебаний вдоль всего стержня (пластины), что противоречит физическим представлениям и общим динамическим уравнениям теории упругости. Это противоречие связано с теми приближенными допущениями, которые делаются при выводе обычного уравнения колебаний. Учет инерции вращения элементов стержня (пластины) и влияния перерезывающих сил на прогиб приводит к волновым уравнениям.

Впервые такое волновое уравнение для случая стержня было выведено С. П. Тимошенко [1], который его применил для уточнения величин собственных частот при установившихся колебаниях. На волновой характер этого уравнения указали почти одновременно Прескотт [2] и Флюгге [3]. Попытка дать решение уравнения Тимошенко методом характеристик была сделана Пфайфером [4].

В работе получены две скорости распространения волн при поперечных колебаниях стержня; выведено волновое уравнение поперечных колебаний пластины и получены две соответствующие скорости; решены конкретные задачи о распространении волн от точечных источников (сосредоточенная сила, импульс, момент); получены отраженные волны в конечном двухопорном стержне. При больших моментах времени полученные волновые решения асимптотически переходят в известные неволновые решения А. И. Лурье [5], но существенно разнятся от последних в начальные моменты времени.

I. Скорости распространения волн при поперечных колебаниях

§ 1. Скорости распространения волн при поперечных колебаниях стержня. Уравнение поперечных колебаний стержня, с учетом инерции вращения и влияния перерезывания на прогиб, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^4} - \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \\ = \frac{q}{EJ} + \frac{1}{k_{\mu} \sigma} \left(\frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

где

$$c_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{k_{\mu}}{\rho}}, \quad C = \frac{\rho \sigma}{EJ} \quad (1.2)$$

¹ О работах [2], [3] и [4] автору стало известно после сдачи статьи в набор.

Здесь $q(x, t)$ — внешняя распределенная нагрузка на единицу длины, E — модуль Юнга, ρ — объемная плотность, μ — модуль сдвига, σ — площадь поперечного сечения стержня, J — момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси z (колебания происходят в направлении оси y), k — коэффициент, зависящий от формы сечения ($k = 2/3$ — для прямоугольного сечения, $k = 3/4$ — для кругового сечения).

Чтобы доказать волновой характер уравнения (1.1), будем решать его операционным способом, для чего умножим его на e^{-pt} и проинтегрируем по t от 0 до ∞ . Обозначая

$$v(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t) e^{-pt} dt \quad (1.3)$$

и считая начальные условия нулевыми, получим (при $q \equiv 0$)

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - p^2 \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{d^2 v}{dx^2} + p^2 \left(\frac{p^2}{c_1^2 c_2^2} + C \right) v = 0 \quad (1.4)$$

Если искать решение уравнения (1.4) в виде

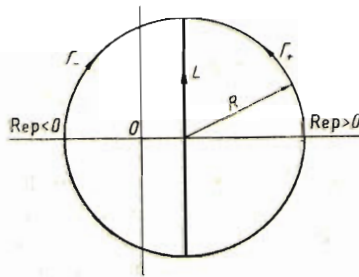
$$v(x, p) = e^{-nx} \quad (1.5)$$

то для n получается биквадратное уравнение, решая которое, будем иметь

$$n = \pm M \sqrt{p} \sqrt{p \mp N \sqrt{p^2 - a^2}} \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2}}, \\ N &= \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) : \left(\frac{1}{c_2^2} + \frac{1}{c_1^2} \right) \quad (1.7) \\ a &= 2\sqrt{c} : \left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2} \right) \end{aligned}$$



Фиг. 1.

Рассмотрим бесконечный стержень, считая $x > 0$. Общий интеграл уравнения (1.4), стремящийся к нулю при $x \rightarrow \infty$, имеет вид

$$v(x, p) = A_1(p) e^{-n_1 x} + A_2(p) e^{-n_2 x} \quad (1.8)$$

причем из четырех значений n надо взять два, удовлетворяющие на контуре Римана-Меллина условию

$$\operatorname{Re} n_1 > 0, \quad \operatorname{Re} n_2 > 0 \quad (1.9)$$

По формуле обращения

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [A_1(p) e^{-n_1 x} + A_2(p) e^{-n_2 x}] e^{pt} dp \quad (1.10)$$

где L — контур Римана-Меллина (фиг. 1). Постоянные A_1 и A_2 должны быть определены из двух граничных условий, зависящих от характера источника колебаний. Представим (1.10) еще так:

$$u = u_1 + u_2 \quad \left(u_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_L A_\nu(p) \exp(pt - n_\nu x) dp, \quad \nu = 1, 2 \right) \quad (1.11)$$

Для вычисления интегралов (1.11) дополним контур L вправо полу-кругом Γ_+ большого радиуса R . Тогда интегралы вдоль L и вдоль Γ_+ будут равны, так как внутри замкнутого контура $L + \Gamma_+$ у подинтегральной функции нет особых точек. Так как согласно (1.6) при больших $|p|$ величина n_1 будет порядка p/c_1 , а величина n_2 — порядка p/c_2 , то при достаточно большом R будет

$$u_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} A_\nu(p) \exp \left[p \left(t - \frac{x}{c_\nu} \right) \right] \exp \varepsilon_\nu x dp$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \varepsilon_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2) \quad (1.12)$$

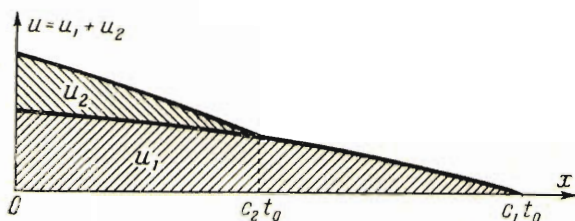
Если функции $A_1(p)$ и $A_2(p)$ равномерно стремятся к нулю¹ при $|p| \rightarrow \infty$, то согласно лемме Жордана будем иметь

$$u_\nu \equiv 0 \quad \text{при} \quad t < \frac{x}{c_\nu} \quad (\nu = 1, 2) \quad (1.13)$$

Если же $t > x/c_\nu$, то контур L надо дополнять контуром Γ_- , где $\text{Re } p < 0$; но тогда интеграл по замкнутому контуру $L + \Gamma_-$ не равен нулю, так как внутри него есть особые точки.

Равенства (1.13) показывают, что возмущение распространяется вдоль стержня двумя волнами со скоростями c_1 и c_2 .

Таким образом, установлен волновой характер уравнения (1.1). Фиг. 2 дает общее представление



Фиг. 2.

о характере распределения возмущения вдоль стержня в фиксированный момент времени t_0 .

Обычное уравнение поперечных колебаний стержня имеет вид

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Из сравнения с (1.1) видно, что оно соответствует случаю $c_1 = c_2 = \infty$, т. е. мгновенному распространению возмущения вдоль стержня; поэтому мы и называем такое уравнение неволновым. Составим отношение

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{k}}$$

где ν — коэффициент Пуассона; если принять $\nu = 1/3$, то для стержня прямоугольного сечения $c_1/c_2 = 2$, а для кругового сечения $c_1/c_2 \approx 1.88$.

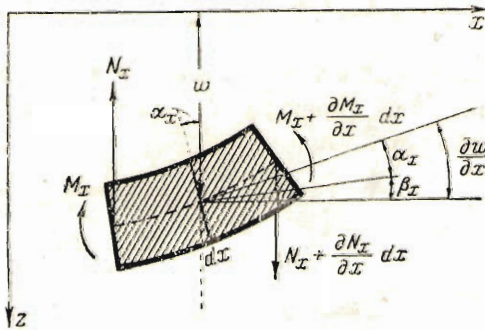
Если принять для стали $E = 2.14 \times 10^{12}$ дин/см², $\rho = 7.85$ г/см³ и $\mu = 8.19 \times 10^{11}$ дин/см², то $c_1 = 5.12 \times 10^5$, $c_2 = 2.56 \times 10^5$ см/сек для прямоугольного сечения и $c_2 = 2.72 \times 10^5$ см/сек для кругового сечения.

¹ Ниже будет видно, что при обычных граничных условиях $A(p)$ будет порядка p^{-m} , где $m > 0$.

§ 2. Волновое уравнение поперечных колебаний пластины. Рассмотрим тонкую пластину постоянной толщины h . Оси x, y поместим в средней плоскости, а ось z совместим с направлением колебаний.

Если мы хотим учитывать смещения не только вследствие изгибающих моментов (как это обычно делается), но и вследствие перерезывающих сил, то гипотеза прямых нормалей будет неприменима. Угол поворота нормали к средней поверхности надо считать состоящим из угла α , дающего поворот элемента пластины как целого, и угла β , характеризующего деформацию сдвига.

На фиг. 3 изображена деформация элемента пластины в плоскости xz . Через $w(x, y, t)$ обозначен прогиб средней плоскости—основная величина при поперечных колебаниях. Аналогичную картину будем иметь в плоскости yz где угол α_x , заменится на α_y , а β_x — на β_y .



Фиг. 3

Таким образом¹,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_x + \beta_x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_y + \beta_y \quad (2.1)$$

Обычные соотношения теории тонких пластин заменяются в наших условиях такими;

$$M_x = -D \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \alpha_y}{\partial y} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial \alpha_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \alpha_x}{\partial x} \right) \quad (2.2)$$

$$H = -D \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \alpha_x}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_y}{\partial x} \right)$$

где M_x и M_y — изгибающие моменты в плоскостях xz и yz , H — крутящий момент, $D = Eh^3 / [12(1-\nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость.

Перерезывающие силы N_x и N_y связаны с углами перерезывания β_x и β_y соотношениями

$$N_x = k\mu h \beta_x = k\mu h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x \right)$$

$$N_y = k\mu h \beta_y = k\mu h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \alpha_y \right)$$

$$k = \frac{\tau_{zx \text{ ср}}}{\tau_{zx \text{ max}}} = \frac{\tau_{yz \text{ ср}}}{\tau_{yz \text{ max}}} = \frac{2}{3} \quad (2.3)$$

Положительные направления сил и моментов указаны на фиг. 3.

Чтобы составить дифференциальное уравнение для прогиба $w(x, y, t)$, напишем уравнения поступательного и вращательного движения элемента пластины с измерениями dx, dy и h :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q$$

$$N_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \rho J \frac{\partial^2 \alpha_x}{\partial t^2}$$

$$N_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} + \rho J \frac{\partial^2 \alpha_y}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

¹ Если принять гипотезу прямых нормалей, то в (2.1) будет $\beta_x = \beta_y = 0$.

Здесь ρ —объемная плотность, $q(x, y, t)$ —внешняя распределенная нагрузка на единицу площади, $J = h^3 / 12$.

С учетом (2.2) и (2.3) уравнение (2.4) принимает вид:

$$k_{\nu} \left(\Delta w - \frac{\partial x_x}{\partial x} - \frac{\partial x_y}{\partial y} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{q}{h} \quad (2.5)$$

$$k_{\nu} h \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha_x \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial x_y}{\partial y} \right) - D \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial x_x}{\partial y} + \frac{\partial x_y}{\partial x} \right) + \rho J \frac{\partial^2 x_x}{\partial t^2}$$

$$k_{\nu} h \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \alpha_y \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial x_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial x_x}{\partial x} \right) - D \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial x_x}{\partial y} + \frac{\partial x_y}{\partial x} \right) + \rho J \frac{\partial^2 x_y}{\partial t^2}$$

Дифференцируя второе из этих уравнений по x , а третье по y , складывая результаты и исключая из всей системы комбинацию $\partial \alpha_x / \partial x + \partial \alpha_y / \partial y$, получим уравнение поперечных колебаний пластины

$$\Delta \Delta w - \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} \right) \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} + \frac{1}{v_1^2 v_2^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + V \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{D} + \frac{1}{k_{\nu} h} \left(\frac{\rho J}{D} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \Delta q \right)$$

Здесь

$$v_1 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2\mu}{3\rho}}, \quad V = \frac{\rho h}{D} \quad (2.7)$$

§ 3. Скорости распространения волн в пластине. Решая уравнение (2.6) операционным методом при нулевых начальных условиях ($q \equiv 0$) получим для v уравнение

$$\Delta \Delta v - p^2 \left(\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} \right) \Delta v + p^2 \left(\frac{p^2}{v_1^2 v_2^2} + V \right) v = 0 \quad \left(v = \int_0^{\infty} w e^{-pt} dt \right) \quad (3.1)$$

Если ограничиться случаем бесконечной пластины и симметрии вращения, т. е. считать $w = w(r, t)$ и $v = v(r, p)$, то общий интеграл уравнения (3.1), стремящийся к нулю при $r \rightarrow \infty$, будет

$$v(r, p) = A_1(p) K_0(n_1 r) + A_2(p) K_0(n_2 r) \quad (3.2)$$

где K_0 —функция Макдональда, а n_1 и n_2 даются формулой (1.6) при замене c_1, c_2, C соответственно на v_1, v_2, V , причем должны быть выполнены условия (1.9). Постоянные A_1 и A_2 должны быть определены из граничных условий при $r = 0$.

Прогиб $w(r, t)$ дается формулой обращения Римана-Меллина

$$w(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L [A_1(p) K_0(n_1 r) + A_2(p) K_0(n_2 r)] e^{pt} dp \quad (3.3)$$

Если разбить смещение на две части, так что

$$w = w_1 + w_2 \quad \left(w_{\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_L A_{\nu}(p) K_0(n_{\nu} r) e^{pt} dp \quad (\nu = 1, 2) \right) \quad (3.4)$$

то, пользуясь асимптотическим выражением функции K_0 при больших значениях аргумента и повторяя рассуждения § 1, получим

$$w_{\nu} \equiv 0 \quad \text{при} \quad t < \frac{r}{v_{\nu}} \quad (\nu = 1, 2) \quad (3.5)$$

если только A_1 и A_2 равномерно стремятся к нулю при $|p| \rightarrow \infty$.

Равенства (3.5) показывают, что возмущение распространяется вдоль пластины в радиальном направлении двумя волнами со скоростями v_1 и v_2 . Таким образом, установлен волновой характер уравнения (2.6).

Обычное (классическое) уравнение поперечных колебаний пластины

$$\Delta \Delta w + V \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

является неволновым, так как оно получается из уравнения (2.6) предельным переходом при $v_1, v_2 \rightarrow \infty$.

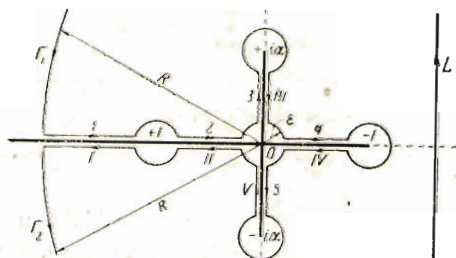
Составим отношение

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{3}{1-\nu}}$$

При $\nu = 1/3$ имеем $v_1/v_2 \approx 2.12$; при $\nu = 1/4$ имеем $v_1/v_2 = 2$. Принимая для стали те же значения E , ρ и μ , как и в случае стержня, получим $v_1 = 5.39 \times 10^5$ см/сек, $v_2 = 2.56 \times 10^5$ см/сек.

II. Поперечные колебания бесконечного стержня под действием постоянной сосредоточенной силы

§ 4. Граничные условия. Рассмотрим в качестве «основной» задачи действие внезапно прикладываемой (в момент $t=0$) и в дальнейшем постоянной сосредоточенной силы Q на бесконечный стержень¹. Выбирая начало координат в месте приложения силы и рассматривая правую часть стержня, где $x > 0$, будем иметь граничные условия



Фиг. 4

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{x=0} = \frac{Q}{2EJ}$$

или преобразованные по Лапласу

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = 0, \quad (4.2)$$

$$\left(\frac{d^3 v}{dx^3}\right)_{x=0} = \frac{Q}{2EJp}$$

Подставляя интеграл (1.8) в (4.2), получим значения постоянных

$$A_1 = \frac{Q}{2EJ} \frac{1}{pn_1(n_2^2 - n_1^2)}, \quad A_2 = -\frac{Q}{2EJ} \frac{1}{pn_2(n_2^2 - n_1^2)} \quad (4.3)$$

Решение задачи представляется контурными интегралами

$$\frac{2EJ}{Q} u = u_1 - u_2$$

$$u_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp(pt - n_\nu x)}{pn_\nu(n_2^2 - n_1^2)} dp, \quad u_\nu \equiv 0 \quad \text{при } t < \frac{x}{c_\nu} \quad (\nu=1, 2) \quad (4.4)$$

¹ Решение задачи для случая переменной силы получается из рассматриваемого при помощи интеграла Дюамеля. Решение для случая сосредоточенного импульса (момента) получается из решения «основной» задачи дифференцированием (по t или по x).

Подставляя n_ν из (4.6) и применяя теорему Бореля, получим решение задачи в такой форме:

$$\frac{8EJC}{Qa^2(1/c_2^2 - 1/c_1^2)} u(x, t) = \int_{x/c_1}^t (t - \tau) J_1(x, \tau) d\tau - \int_{x/c_2}^t (t - \tau) J_2(x, \tau) d\tau \quad (4.5)$$

где

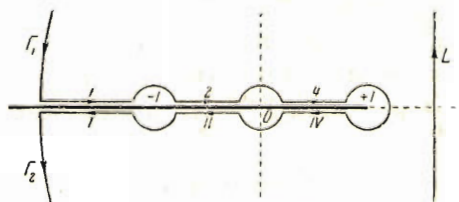
$$J_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\exp(aqt - n_\nu x)}{n_\nu \sqrt{q^2 - 1}} dq \quad (p = aq) \quad (\nu = 1, 2) \quad (4.6)$$

$$n_\nu = P \sqrt{q} \sqrt{q \mp N \sqrt{q^2 - 1}} \quad (P = aM)$$

§ 5. Вычисление некоторых контурных интегралов. Имея в виду дальнейшие приложения к колебаниям пластин, вычислим обобщенные контурные интегралы такого вида:

$$J_{\sigma s}^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{aqt} K_\sigma(n_\nu x)}{n_\nu s \sqrt{q^2 - 1}} dq \quad (\nu = 1, 2) \quad (5.1)$$

где K_σ — функция Макдональда, а σ и s — пока произвольные комплексные числа.



Фиг. 5

Легко видеть, что интегралы (4.5) получаются из контурных интегралов (5.1) при $\sigma = s = 1/2$ после умножения на $(2\pi/x)^{1/2}$.

Вычисление интегралов (5.1) будем производить при $t > x/c_\nu$, так как при $t < x/c_\nu$ будет $J_{\sigma s}^{(\nu)} \equiv 0$.

Подинтегральные функции имеют точки разветвления

$$q = \mp 1, \quad q = 0, \quad q = \pm i\alpha, \quad \alpha = \frac{N}{\sqrt{1 - N^2}} \quad (5.2)$$

Поэтому при дополнении контура L влево полукругом большого радиуса надо обойти все точки разветвления. Получаемый контур изображен на фиг. 4.

Можно показать, что при $R \rightarrow \infty$ интегралы по полукругам Γ_1 и Γ_2 будут стремиться к нулю, если выполнено условие $\text{Re } s > -3/2$, а интегралы по малым кружкам радиуса ε , охватывающим точки разветвления, будут стремиться к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, если выполнено условие

$$\text{Re } \frac{s}{2} - 1 < \text{Re } \frac{\sigma}{2} < 1 - \text{Re } \frac{s}{2} \quad (5.3)$$

Таким образом при $R \rightarrow \infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ вычисляемые интегралы $J_{\sigma s}^{(\nu)}$ сводятся к интегралам по прямолинейным путям, лежащим на противоположных берегах соответствующих разрезов.

Исходные ветви многозначных функций на L должны быть выбраны в соответствии с условием (1.9), а значения подинтегральных функций на прямолинейных путях должны получаться аналитическим продолжением.

Для удобства вычислений вводим обозначения

$$q = \rho e^{i\varphi}, \quad q - 1 = \rho_1 e^{i\varphi_1}, \quad q + 1 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$$

$$\psi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$z_\nu = q \mp N \sqrt{q^2 - 1} = r e^{i\theta} \quad (\nu = 1, 2) \quad (5.4)$$

Тогда

$$\sqrt{q^2 - 1} = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{i\psi}$$

$$n_\nu = P \sqrt{\rho} r \exp \frac{i(\varphi + \theta)}{2} \quad (\nu = 1, 2) \quad (5.5)$$

Если условиться аргумент $q(\varphi)$ на L считать изменяющимся от $-\frac{1}{2}\pi$ до $+\frac{1}{2}\pi$, то ψ на L будет также изменяться от $-\frac{1}{2}\pi$ до $+\frac{1}{2}\pi$, а условие (1.9) будет выполнено, если взять $-\frac{1}{2}\pi < \theta < +\frac{1}{2}\pi$ на L .

Установив исходные значения аргументов φ , ψ и θ , представим их изменение, а также изменение всех величин, входящих в подынтегральные функции, в табл. 1, где обозначено

$$\omega = \sqrt{N \sqrt{\rho^2 + 1} - \rho}, \quad r = \sqrt{1 - N^2} \sqrt{\rho^2 + \alpha^2} \quad (5.6)$$

Так как для интеграла $J_{ss}^{(2)}$ точки $q = \pm i\alpha$ при принятых ветвях многозначных функций не будут особыми, то контур интегрирования будет несколько иным (фиг. 5). Изменения аргумента и других величин, входящих в подынтегральные функции, приведены в нижней части табл. 1.

После довольно громоздких выкладок искомые контурные интегралы приводятся к обычным вещественным определенным интегралам следующего вида:

$$J_{ss}^{(1)} = J_{ss}^{*} + J_{ss}^{(2)} \quad (5.7)$$

где

$$J_{ss}^{*} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \{ \pi \cos(a\rho t - \pi s) I_\sigma(P\omega \sqrt{\rho} x) +$$

$$+ [\sin a\rho t - \sin(a\rho t - \pi(\sigma + s))] K_\sigma(P\omega \sqrt{\rho} x) \} \frac{d\rho}{(P\omega \sqrt{\rho})^s \sqrt{\rho^2 + 1}}$$

$$J_{ss}^{(2)} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left\{ e^{-a\rho t} \operatorname{Re} \frac{K_\sigma [P\sqrt{\rho}(-\lambda + i\mu)x]}{[P\sqrt{\rho}(-\lambda + i\mu)]^s} + \right.$$

$$\left. + e^{a\rho t} \operatorname{Re} \frac{K_\sigma [P\sqrt{\rho}(\lambda + i\mu)x]}{[P\sqrt{\rho}(\lambda + i\mu)]^s} \right\} \frac{d\rho}{\sqrt{1 - \rho^2}}$$

Здесь I_σ — функция Бесселя от мнимого аргумента и

$$\lambda = \sqrt{\frac{r + \rho}{2}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{r - \rho}{2}} \quad (5.8)$$

Таблица 1

Путь интегрирования	φ (от, до)	η	ρ (от, до)	$\rho_1 \rho_2$	ψ (от, до)	$\sqrt{\rho^2 - 1}$	$r_x, r_y = r \cos \theta, r_y = r \sin \theta$	θ (от, до)	n_1 (верхн. часть табл.) n_2 (нижн. часть табл.)
L	$-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$	—	—	—	$-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$	—	—	$-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$	$\operatorname{Re} n_1 > 0$
1	π	$-\rho$	$\infty, 1$	$\rho^2 - 1$	π	$-\sqrt{\rho^2 - 1}$	$r = \rho - N\sqrt{\rho^2 - 1}$	π	$P e^{\pi i} \sqrt{\rho - N\sqrt{\rho^2 - 1}}^{1/2}$
2	π	$-\rho$	1, 0	$1 - \rho^2$	$\frac{1}{2}\pi$	$i\sqrt{1 - \rho^2}$	$r_x = -\rho, r_y = -N\sqrt{1 - \rho^2}$	$\frac{3}{2}\pi$	$P \sqrt{\rho} \sqrt{r} \exp \frac{1}{2} \pi i \exp \frac{1}{2} i\theta$
3	$\frac{1}{2}\pi$	$i\rho$	0, ∞	$\rho^2 + 1$	$\frac{1}{2}\pi$	$i\sqrt{\rho^2 + 1}$	$r = N\sqrt{\rho^2 + 1 - \rho}$	$\frac{3}{2}\pi$	$P \omega \sqrt{\rho} e^{\pi i}$
III	$\frac{1}{2}\pi$	$i\rho$	$\infty, 0$	$\rho^2 + 1$	$\frac{1}{2}\pi$	$i\sqrt{\rho^2 + 1}$	$r = N\sqrt{\rho^2 + 1 - \rho}$	$-\frac{1}{2}\pi$	$P \omega \sqrt{\rho}$
4	0	ρ	0, 1	$1 - \rho^2$	$\frac{1}{2}\pi$	$i\sqrt{1 - \rho^2}$	$r_x = +\rho, r_y = -N\sqrt{1 - \rho^2}$	$-\frac{1}{2}\pi, 0$	$P \sqrt{\rho} \sqrt{r} \exp \frac{1}{2} i\theta$
IV	0	ρ	1, 0	$1 - \rho^2$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-i\sqrt{1 - \rho^2}$	$r_x = +\rho, r_y = +N\sqrt{1 - \rho^2}$	$0, \frac{1}{2}\pi$	$P \sqrt{\rho} \sqrt{r} \exp \frac{1}{2} i\theta$
5	$-\pi$	$-i\rho$	0, ∞	$\rho^2 + 1$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-i\sqrt{\rho^2 + 1}$	$r = N\sqrt{\rho^2 + 1 - \rho}$	$\frac{1}{2}\pi$	$P \omega \sqrt{\rho}$
V	$-\frac{1}{2}\pi$	$-i\rho$	$\infty, 0$	$\rho^2 + 1$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-i\sqrt{\rho^2 + 1}$	$r = N\sqrt{\rho^2 + 1 - \rho}$	$-\frac{3}{2}\pi$	$P \omega \sqrt{\rho} e^{-\pi i}$
II	$-\pi$	$-\rho$	0, 1	$1 - \rho^2$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-i\sqrt{1 - \rho^2}$	$r_x = -\rho, r_y = N\sqrt{1 - \rho^2}$	$-\frac{3}{2}\pi, -\pi$	$P \sqrt{\rho} \sqrt{r} \exp \frac{-1}{2} \pi i \exp \frac{1}{2} i\theta$
I	$-\pi$	$-\rho$	1, ∞	$\rho^2 - 1$	$-\pi$	$-\sqrt{\rho^2 - 1}$	$r = \rho - N\sqrt{\rho^2 - 1}$	$-\pi$	$P e^{-\pi i} \sqrt{\rho - N\sqrt{\rho^2 - 1}}^{1/2}$
L	$-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$	—	—	—	$-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$	—	—	$\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi$	$\operatorname{Re} n_2 > 0$
1	π	$-\rho$	$\infty, 1$	$\rho^2 - 1$	π	$-\sqrt{\rho^2 - 1}$	$r = \rho + N\sqrt{\rho^2 - 1}$	π	$P e^{\pi i} \sqrt{\rho + N\sqrt{\rho^2 - 1}}^{1/2}$
2	π	$-\rho$	1, 0	$1 - \rho^2$	$\frac{1}{2}\pi$	$i\sqrt{1 - \rho^2}$	$r_x = -\rho, r_y = N\sqrt{1 - \rho^2}$	$\frac{1}{2}\pi$	$P \sqrt{\rho} \sqrt{r} \exp \frac{1}{2} \pi i \exp \frac{1}{2} i\theta$
4	0	ρ	0, 1	$1 - \rho^2$	$\frac{1}{2}\pi$	$i\sqrt{1 - \rho^2}$	$r_x = +\rho, r_y = N\sqrt{1 - \rho^2}$	$\frac{1}{2}\pi, 0$	$P \sqrt{\rho} \sqrt{r} \exp \frac{1}{2} i\theta$
IV	0	ρ	1, 0	$1 - \rho^2$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-i\sqrt{1 - \rho^2}$	$r_x = +\rho, r_y = -N\sqrt{1 - \rho^2}$	$0, -\frac{1}{2}\pi$	$P \sqrt{\rho} \sqrt{r} \exp \frac{1}{2} i\theta$
II	$-\pi$	$-\rho$	0, 1	$1 - \rho^2$	$-\frac{1}{2}\pi$	$-i\sqrt{1 - \rho^2}$	$r_x = -\rho, r_y = -N\sqrt{1 - \rho^2}$	$-\frac{1}{2}\pi, -\pi$	$P \sqrt{\rho} \sqrt{r} \exp \frac{-1}{2} \pi i \exp \frac{1}{2} i\theta$
I	$-\pi$	$-\rho$	1, ∞	$\rho^2 - 1$	$-\pi$	$-\sqrt{\rho^2 - 1}$	$r = \rho + N\sqrt{\rho^2 - 1}$	$-\pi$	$P e^{-\pi i} \sqrt{\rho + N\sqrt{\rho^2 - 1}}^{1/2}$

§ 6. Решение задачи в определенных интегралах. Полагая в (5.7) для случая стержня $\sigma = s = 1/2$ и умножая на $(2\pi/x)^{1/2}$, получим окончательное решение задачи в виде

$$Pu(x, t) = \int_{x/c_1}^t (t-\tau) J^*(x, \tau) d\tau + \int_{x/c_1}^{x/c_2} (t-\tau) J^{(2)}(x, \tau) d\tau \quad (x < c_2 t) \quad (6.1)$$

$$Pu(x, t) = \int_{x/c_1}^t (t-\tau) [J^*(x, \tau) + J^{(2)}(x, \tau)] d\tau \quad (c_2 t < x < c_1 t)$$

$$P = \frac{8EJC}{Qa^2(1/c_2^2 - 1/c_1^2)}; \quad u(x, t) \equiv 0 \quad (x > c_1 t)$$

$$J^*(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\sin a\rho t \operatorname{ch}(P\omega \sqrt{\rho} x)}{P\omega \sqrt{\rho} \sqrt{\rho^2 + 1}} d\rho$$

$$J^{(2)}(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left\{ \lambda \cos(P\mu \sqrt{\rho} x) \operatorname{sh}(a\rho t - P\lambda \sqrt{\rho} x) - \right. \\ \left. - \mu \sin(P\mu \sqrt{\rho} x) \operatorname{ch}(a\rho t - P\lambda \sqrt{\rho} x) \right\} \frac{d\rho}{Pr \sqrt{\rho} \sqrt{1-\rho^2}}$$

Непосредственно под силой, т. е. при $x=0$, будем иметь

$$Pu(0, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{a\rho t - \sin a\rho t}{a^2 \rho^2 P\omega \sqrt{\rho} \sqrt{\rho^2 + 1}} d\rho \quad (6.2)$$

Этот вид решения удобен для малых t . Для больших t целесообразно сделать подстановку $a\rho t = z$; тогда

$$u(0, t) = \frac{Q}{2\pi E J b^3} t \sqrt{t} \int_0^{a\alpha t} \frac{z - \sin z}{z^2 \sqrt{z}} \frac{dz}{g(z)} \quad (b = \sqrt[4]{C}) \quad (6.3)$$

где

$$g(z) = \sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2 t^2}} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{z^2}{a^2 t^2}} - \frac{z}{Nat}}$$

Следовательно, при больших t смещение асимптотически представляется в виде

$$u(0, t) \approx \frac{Qt \sqrt{t}}{2\pi E J b^3} \int_0^{\infty} \frac{z - \sin z}{z^2 \sqrt{z}} dz = Q \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{t \sqrt{t}}{3E J b^3} \quad (6.4)$$

так как входящий сюда интеграл равен $2/3 \sqrt{2\pi}$.

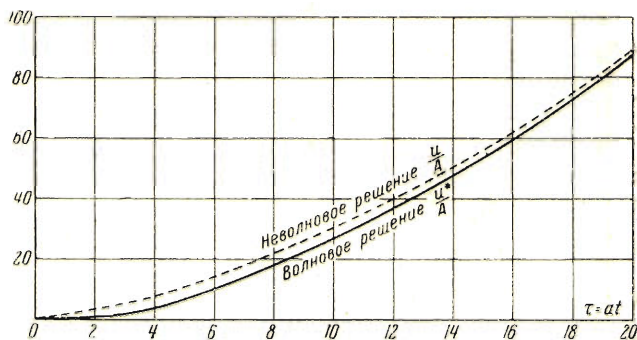
Выражение (6.4) полностью совпадает с неволновым решением соответствующей граничной задачи, полученным А. И. Лурье^[1]. Таким образом, при больших моментах времени волновое решение асимптотически совпадает с неволновым (в целях упрощения выкладок, здесь это доказано только для точки $x=0$). Однако в начальные моменты волновое решение существенно отличается от неволнового. В самом деле, согласно (6.2) при малых t смещение будет порядка t^3 , в то время как неволновое решение при всех t дает порядок $t \sqrt{t}$. На фиг. 6

приводится график волнового u^* и неволнового u смещений при $x=0$, отнесенных к одной и той же постоянной

$$A = \frac{Q \sqrt{2/\pi}}{3EJb^3a \sqrt{a}}$$

При этом принято

$$\frac{c_1}{c_2} = 2, N = \frac{3}{5}, \alpha = \frac{3}{4}$$



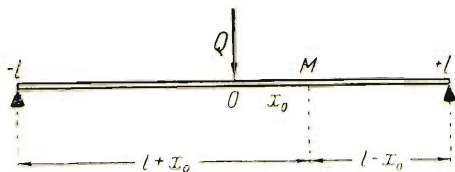
Фиг. 6

Следует отметить, что полученное решение дает прогиб, неограниченно возрастающий со временем. Этот физически несплющенный результат объясняется тем, что рассматривается бесконечный стержень. В случае конечного стержня указанное обстоятельство не имеет места.

III. Поперечные колебания стержня конечной длины

§ 7. Распространение и отражение волн. Рассмотрим двухопорный стержень длины $2l$, нагруженный по середине (фиг. 7) постоянной сосредоточенной силой Q . Для смещения $u(x, t)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (7.1)$$



Фиг. 7

Нулевые начальные условия и граничные условия будут

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} &= 0, & \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{x=0} &= \frac{Q}{2EJ} \\ (u)_{x=l} &= 0, & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=l} &= 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Интегрируя (7.1) по способу, предложенному Г. А. Гринбергом^[6], можно получить решение

задачи в виде ряда

$$\frac{EJ}{Q} u(x, t) = \frac{l^3}{6} + \frac{x^3}{12} - \frac{l^2 x}{4} + \frac{1}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \xi_k x}{\xi_k^4} \frac{m_2^2 \cos m_1 t - m_1^2 \cos m_2 t}{m_2^2 - m_1^2}$$

где (7.3)

$$\xi_k = \frac{2k+1}{2} \frac{\pi}{l}, \quad m_{1,2} = \sqrt{\frac{\alpha_k \pm \sqrt{\alpha_k^2 - 4c_1^2 c_2^2 \xi_k^4}}{2}}, \quad \alpha_k = \xi_k^2 (c_1^2 + c_2^2) + c_1^2 c_2^2 C$$

Аналогичный ряд может быть получен и для неволнового уравнения^[5].

Ряды (7.3) непригодны для выяснения волнового характера колебаний и изучения отраженных волн. Для волнового уравнения (7.1) возможен другой анализ его решений, дающий распространение и отражение волн. Однако такой анализ неприменим к неволновому уравнению.

Будем решать уравнение (7.1) операционным способом. Преобразованное уравнение получим в виде

$$\frac{d^4 v}{dx^4} - p^2 \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{d^2 v}{dx^2} + p^2 \left(\frac{p^2}{c_1^2 c_2^2} + C \right) v = 0 \quad \left(v = \int_0^{\infty} u e^{-pt} dt \right) \quad (7.4)$$

Общий интеграл этого уравнения будет

$$v(x, p) = A_1 \operatorname{ch} n_1 x + B_1 \operatorname{sh} n_1 x + A_2 \operatorname{ch} n_2 x + B_2 \operatorname{sh} n_2 x \quad (7.5)$$

где n_1 и n_2 даются формулой (1.6).

Подставляя (7.5) в преобразованные по Лапласу граничные условия (7.2) и определяя постоянные A_1, A_2, B_1, B_2 , получим

$$\frac{2EJ}{Q} u(x, t) = \frac{1}{p(n_2^2 - n_1^2)} \left[\frac{\operatorname{sh} n_2(x-l)}{n_2 \operatorname{ch} n_2 l} - \frac{\operatorname{sh} n_1(x-l)}{n_1 \operatorname{ch} n_1 l} \right] \quad (7.6)$$

Если применить формулу обращения и вычислить контурный интеграл суммированием по вычетам (точек разветвления не будет), то получится в точности ряд (7.3).

Но операционный способ позволяет решать задачу и иначе, а именно, до применения формулы обращения воспользуемся разложением

$$\frac{\operatorname{sh} n(x-l)}{\operatorname{ch} nl} = -e^{-nx} + e^{-n(2l-x)} + e^{-n(2l+x)} - e^{-n(4l-x)} - \\ - e^{-n(4l+x)} + e^{-n(6l-x)} + e^{-n(6l+x)} - \dots \quad (7.7)$$

Подставляя (7.7) в (7.6) и применяя формулу обращения, имеем

$$\frac{2EJ}{Q} u(x, t) = U_2 - U_1 \quad (7.8)$$

$$U_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{-e^{-n_\nu x} + e^{-n_\nu(2l-x)} + e^{-n_\nu(2l+x)} - e^{-n_\nu(4l-x)} - e^{-n_\nu(4l+x)} + \dots}{pn_\nu(n_2^2 - n_1^2)} e^{p t} dp$$

где $\nu = 1, 2$. При $l \rightarrow \infty$ отсюда получается решение для бесконечного стержня (4.4)

Заметим теперь, что прочие интегралы в (7.8) представляют собой такие же интегралы u_1 и u_2 , где вместо x подставлено $2l \pm x, 4l \pm x$ и т. д. Следовательно ($\nu = 1, 2$)

$$U_\nu \equiv 0 \quad \left(0 < t < \frac{x}{c_\nu} \right) \quad (7.9)$$

$$U_\nu \equiv -u_\nu(x, t) \quad \left(\frac{x}{c_\nu} < t < \frac{2l+x}{2} \right) \quad (7.10)$$

$$U_\nu \equiv -u_\nu(x, t) + u_\nu(2l-x, t) \quad \left(\frac{2l-x}{c_\nu} < t < \frac{2l+x}{c_\nu} \right) \quad (7.11)$$

$$U_\nu \equiv -u_\nu(x, t) + u_\nu(2l-x, t) + u_\nu(2l+x, t) \quad \left(\frac{2l+x}{c_\nu} < t < \frac{4l-x}{c_\nu} \right) \quad (7.12)$$

$$U_\nu \equiv -u_\nu(x, t) + u_\nu(2l-x, t) + u_\nu(2l+x, t) - \\ - u_\nu(4l-x, t) \quad \left(\frac{4l-x}{c_\nu} < t < \frac{4l+x}{c_\nu} \right) \quad (7.13)$$

Равенства (7.9), (7.10)... при $\nu=1$ дают распространение и отражение от концов волны со скоростью c_1 . В самом деле, пусть наблюдатель находится в фиксированной точке $M(x=x_0)$ стержня (фиг. 7). Тогда согласно (7.9) при $t < x_0/c_1$ волна еще не пришла в точку M . На следующем интервале согласно (7.10) точку M достигнет волна, вышедшая в момент $t=0$ из точки $x=0$. На следующем интервале согласно (7.11) добавится волна, отраженная от конца $x=l$; ее путь равен $l+l-x_0=2l-x_0$. На следующем интервале согласно (7.12) присоединится волна, отраженная от конца $x=-l$; ее путь будет равен $l+l+x_0=2l+x_0$ и т. д. Аналогичными рассуждениями равенства (7.9), ... при $\nu=2$ можно интерпретировать распространением и отражением волны со скоростью c_2 .

IV. Бесконечная пластина, нагруженная сосредоточенной силой

§ 8. Граничные условия. Рассмотрим действие постоянной сосредоточенной силы Q на бесконечную пластину. Выбирая начало полярных координат в месте приложения силы, будем иметь граничные условия

$$\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_{r=0} = 0, \quad \left(r \frac{\partial \Delta w}{\partial r}\right)_{r=0} = \frac{Q}{2\pi D} \tag{8.1}$$

Преобразуя (8.1) по Лапласу, получим

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=0} = 0, \quad \left(r \frac{d\Delta w}{dr}\right)_{r=0} = \frac{Q}{2\pi D\rho} \tag{8.2}$$

Подставляя общий интеграл (3.2) в (8.2), получим

$$A_1(p) = -A_2(p) = \frac{Q}{2\pi D} \frac{1}{p(n_2^2 - n_1^2)} \tag{8.3}$$

Решение задачи имеет вид

$$\frac{2\pi D}{Q} w(r, t) = w_1 - w_2 \tag{8.4}$$

где

$$w_\nu = \int_L \frac{K_0(n_\nu r)}{n_2^2 - n_1^2} \frac{e^{pt}}{p} d\rho, \quad w_\nu \equiv 0 \text{ при } t < \frac{r}{v_\nu} \quad (\nu=1, 2)$$

Подставляя n_ν из (4.6) и применяя теорему Бореля, получим

$$\frac{8\pi DV}{Qa^2(1/v_2^2 - 1/v_1^2)} w(r, t) = \int_{r/v_1}^t (t-\tau) J^{(1)}(r, \tau) d\tau - \int_{r/v_2}^t (t-\tau) J^{(2)}(r, \tau) d\tau \tag{8.5}$$

где

$$J^{(\nu)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{sq\tau}}{\sqrt{q^2 - 1}} K_0(n_\nu r) dq \quad (\nu=1, 2)$$

§ 9. Решение задачи в определенных интегралах. Легко видеть, что интегралы $J^{(1)}$ и $J^{(2)}$ в (8.5) получаются из обобщенных контурных интегралов вида (5.1) при $s = \sigma = 0$. В таком случае сразу получаем решение задачи в виде

$$\Pi w(r, t) = \int_{r/v_1}^t (t-\tau) J^*(r, \tau) d\tau + \int_{r/v_1}^{r/v_2} (t-\tau) J^{(2)}(r, \tau) d\tau \quad (r < v_2 t) \tag{9.1}$$

$$\Pi w(r, t) = \int_{r/v_1}^t (t - \tau) [J^*(r, \tau) + J^{(2)}(r, \tau)] d\tau \quad (v_2 t < r < v_1 t)$$

$$w(r, t) \equiv 0 \quad (r > v_1 t)$$

$$\Pi = \frac{8\pi DV}{Qa^2(1/v_2^2 - 1/v_1^2)}, \quad J^* = \int_0^a \frac{\cos a\rho t}{\sqrt{\rho^2 + 1}} I_0(P\omega \sqrt{\rho} r) d\rho$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \left\{ e^{-a\rho t} \operatorname{Re} K_0 [P\sqrt{\rho}(-\lambda + i\mu)r] + e^{a\rho t} \operatorname{Re} K_0 [P\sqrt{\rho}(\lambda + i\mu)r] \right\} \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

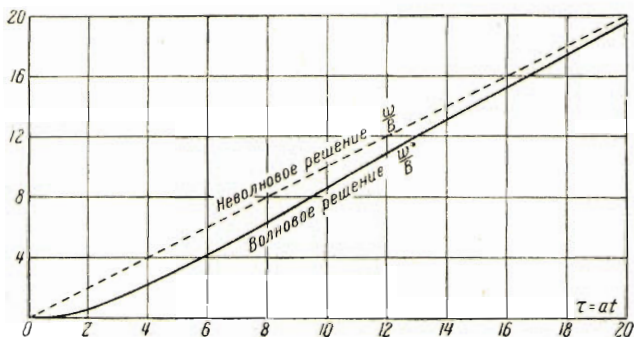
Все обозначения те же, что и в случае стержней, с заменой c_1, c_2, C соответственно на v_1, v_2, V . Непосредственно под силой, при $r = 0$ имеем

$$w(0, t) = \frac{Qh^2}{96\pi D} (c_1^2 - 1) \int_0^a \frac{1 - \cos a\rho t}{\rho^2 \sqrt{1+\rho^2}} d\rho \quad (9.2)$$

После подстановки $a\rho t = z$, легко получить для больших значений t

$$w(0, t) \approx \frac{Qh^2}{96\pi D} (c_1^2 - 1) at \int_0^\infty \frac{1 - \cos z}{z^2} \times \frac{Q}{8\sqrt{D\rho}h} t \quad (9.3)$$

Выражение (9.3) совпадает с соответствующим неволновым решением



Фиг. 8

А. И. Лурье^[5], т. е. и в случае пластины имеет место асимптотическое совпадение волнового и неволнового решений при больших t . Однако при малых t эти решения существенно разнятся: волновое решение согласно (9.2) будет порядка t^2 , а неволновое — порядка t . На фиг. 8 приводятся графики волнового w^* и неволнового w смещений при $r = 0$, отнесенных к величине $B = Q/8a\sqrt{D\rho}h$.

Поступила в редакцию
8 XII 1947

Ленинградский политехнический
институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле. 1932.
2. Prescott. J. Philos. Magazine 1942. No 225.
3. Flugge W. ZAMM. 1942. Bd. 22. Nr 6.
4. Pfeiffer G. ZAMM. 1947. Nr 2.
5. Лурье А. И. Операционное исчисление в приложении к задачам механики. ОНТИ НКТП СССР. Л.—М. 1938.
6. Гринберг Г. А. Изв. АН СССР. Сер. физич. 1946. Т. X.