Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКАЯ СФЕРИЧЕСКАЯ ВОЛНА НАГРУЖЕНИЯ

Ф. А. Бахшиян
(Москва)

В работе рассматривается распространение упруго-пластической сферической волны при условии отсутствия разгрузки. Задачей о распространении взрывной сферической волны в пластической среде в несколько иной постановке занимался Альтшулер [1].

§ 1. Рассмотрим движение упруго-пластической среды, ограниченной двумя концентрическими сферами радиусов a и b. В частном случае радиус внешней сферы b может равняться бесконечности. Если движение симметрично относительно центра сферы, то из трех уравнений движения сплошной среды останется одно.

Пусть u — радиальное перемещение, r — лагранжева координата точки. σ_r и $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ — напряжения, ρ — плотность. Уравнение движения в общем случае (предполагая конечность деформаций и перемещений) имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 + \frac{u}{r}\right)^2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial r} + \frac{2}{r}\left(1 + \frac{u}{r}\right)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)(\sigma_r - \sigma_\theta) \qquad (1.1)$$

К этому уравнению нужно присоединить соотношения между напряжениями и перемещениями. Мы будем исходить из теории малых упруго-пластических деформаций [2]. Согласно этой теории интенсивности напряжений σ_i и деформаций e_i связаны с перемещениями и между собой соотношениями

$$\sigma_r = \sigma + \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}(e_r - e), \qquad \sigma_r - \sigma_\theta = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}(e_r - e), \qquad \sigma_i = f(e_i) \qquad (1.2)$$

Здесь

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + \sigma_\varphi + \sigma_\theta), \qquad e = \frac{1}{3}(e_r + e_\theta + e_\varphi) = \frac{\theta}{3}, \quad \sigma = k\theta$$

причем e_r, e_θ, e_φ — главные деформации, k — модуль всестороннего сжатия. В случае симметрии и малых деформаций и перемещений эти соотношения упрощаются:

$$\sigma_r = k\theta - \frac{2}{3}\sigma_i, \qquad \sigma_r - \sigma_\theta = -\sigma_i$$
$$\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}, \qquad e_i = \pm\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) \qquad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1), получим

$$k\frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2}{3}\frac{\partial \sigma_i}{\partial r} - \frac{2}{r}\sigma_i = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

или

$$k\frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{2}{3}\frac{\partial f}{\partial e_i}\frac{\partial e_i}{\partial r} - \frac{2}{r}f(e_i) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Так как выражения θ и e_i согласно (1.3) содержат лишь первую производную перемещения, то динамическая задача теории пластичности при любом законе упрочнения приводится к квазилинейному гиперболическому уравнению относительно перемещения.

В дальнейшем ограничимся случаем идеальной пластичности $\sigma_i = \sigma_s = \text{const}$ и в формуле (1.3) для e_i выберем знак минус, считая $\partial u / \partial r$ отрицательной во всем диапазоне деформации. Тогда уравнение (1.1) примет вид

$$k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2u}{r^3}\right) - \frac{2_s}{r} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

Подстановки

$$u = \frac{2}{3}\frac{\sigma_s}{k} r \log r + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varphi}{r}\right) \qquad c_p{}^2 = \frac{k}{\rho}$$

приводят к обычному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c_p{}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \tag{1.5}$$

Заметим, что в случае линейного упрочнения

$$\sigma_i = \sigma_s + E'(e_i - e_s)$$

Поэтому в уравнении (1.5)

$$c_p{}^2 = \frac{1}{\rho}\left[k + \frac{4}{3}G(1-\lambda)\right] \qquad \left(\lambda = \frac{E-E'}{E}\right)$$

где G и E — известные физические постоянные.

Условимся величины, относящиеся к упругой и пластической зонам, снабжать индексами e и p соответственно. Уравнение (1.5) сохраняет силу и в упругой области, но при другой скорости волны:

$$c_e{}^2 = \frac{1}{\rho}\left[k + \frac{4}{3}G\right]$$

Присоединяя к (1.5) определенные начальные и граничные условия, можно решать различные смешанные динамические задачи.

§ 2. Допустим, что в сферической полости радиуса a бесконечной среды мгновенно возникает большое давление, которое в дальнейшем возрастает по такому закону, что интенсивность деформаций растет. В момент $t=0$ в среде возникают две концентрические волны — упругая и пластическая, распространяющиеся со скоростями c_e и $c_p < c_e$. Соответственно этому среду будем рассматривать состоящей из двух зон: непосредственно примыкающей к полости, где $e_i \geqslant e_s$, и внешней, где $e_i < e_s$. На границе между зонами должно выполняться условие $e_i = e_s$.

Найдем сначала перемещение в упругой зоне. Введем безразмерные величины x, v и τ, определяя их равенствами

$$r = ax, \qquad u = av, \qquad t = \frac{a}{c_e}\tau \tag{2.1}$$

Тогда вместо (1.4) и (1.5) получим

$$\frac{\partial^2 v_e}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{2}{x}\frac{\partial v_e}{\partial x} - \frac{2v_e}{x^2} \tag{2.2}$$

$$v_e = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\varphi_e}{x}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \varphi_e}{\partial x^2} \tag{2.3}$$

Характеристики уравнения (2.3) определяются уравнениями $dx = \pm d\tau$. Вводя обозначение $1 + \tau = \tau_e$, общее решение уравнения (2.3), имеем в виде

$$\varphi_e = A_e(\tau_e + x) + B_e(\tau_e - x)$$

где A_e и B_e — произвольные функции указанных аргументов. Следовательно, перемещение в упругой зоне определяется формулой

$$v_e = \frac{1}{x}[A_e'(\tau_e + x) - B_e'(\tau_e - x)] - \frac{1}{x^2}[A_e(\tau_e + x) + B_e(\tau_e - x)] \qquad (2.4)$$

где штрихи означают производные по указанным аргументам.

Функции A_e и B_e определяются из следующих условий: так как в начальный момент среда находилась в покое, то в силу непрерывности перемещение должно исчезать на переднем фронте волны, т. е. $v_e = 0$ при $x = \tau_e$. Следствием этого условия являются кинематическое и динамическое условия, которые соответственно имеют вид

$$\frac{\partial v_e}{\partial \tau} + \frac{\partial v_e}{\partial x} = 0, \qquad \sigma_r + \rho c_e^2 \frac{\partial v_e}{\partial \tau} = 0 \qquad (2.5)$$

Кроме того, в силу первого из этих условий и уравнения (2.2) на фронте волны должно быть

$$\frac{\partial v_e}{\partial x} = -\frac{3}{2}\frac{e_s}{x} \text{ при } \qquad x = \tau_e \qquad (2.6)$$

На границе пластической зоны

$$r = a + ct \qquad \text{или} \qquad x = 1 + \frac{c_p}{c_e}\tau = 1 + \alpha\tau = \tau_p$$

имеем

$$e_i = -\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right) = e_s \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial v_e}{\partial x} - \frac{v_e}{x} = -\frac{3}{2}e_s$$

Простые вычисления показывают, что все эти условия выполняются, если $A_e \equiv 0$, а $B_e = \varphi_e$ удовлетворяет уравнению

$$(1 + \beta y)^2 B_e''(y) + 3(1 + \beta y) B_e'(y) + 3B_e(y) + \frac{3}{2}e_s(1 + \beta x) = 0 \qquad (2.7)$$

$$\left(\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{c_p}{c_e - c_p}\right)$$

и условиям

$$B_e(0) = 0, \qquad B_e'(0) = 0 \qquad (2.8)$$

Уравнение (2.7) имеет решение

$$B_e(y) = \gamma M(1 + \beta y)^m - \gamma N(1 + \beta y)^n - \gamma(1 + \beta y)^3 \qquad (2.9)$$

где

$$\gamma = \frac{e_s}{2(1 + 3\beta + 2\beta^2)} = \frac{(c_e - c_p)^2}{2c_e(c_e + c_p)}e_s \qquad (2.10)$$

а величины M и N определяются из уравнений $M - N = 1$, $Mm - nN = 3$ и оказываются равными

$$M = \frac{3 - n}{m - n}, \qquad N = \frac{3 - m}{m - n}$$

Показатели m и n суть корни уравнения

$$\beta^2 z^2 - (\beta^2 - 3\beta) z + 3 = 0 \tag{2.11}$$

Через число Пуассона ν эти корни выражаются формулой

$$z = 2 - \frac{3}{2} \sqrt{3 \frac{1-\nu}{1+\nu}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13\nu - 5}{1+\nu}} \tag{2.12}$$

Если $^5/_{13} < \nu < {}^1/_2$, то m и n находятся в пределах от 0 до 1, причем $m - n > 0$. Для большинства материалов $\nu < {}^5/_{13}$ и корни определяющего уравнения комплексны.

Полагая в этом случае

$$z = p + iq, \qquad \eta = \log(1 + \beta y) \tag{2.13}$$

получим решение уравнения (2.7) в форме

$$B_e(\eta) = (1 + \beta y)^p (C_1 \sin q\eta + C_2 \cos q\eta) - \gamma (1 + \beta y)^3 \tag{2.14}$$

Для определения C_1 и C_2 согласно (2.8) полагаем $y = 0$ в выражении (2.14) и в производной

$$B_e'(\eta) = \beta (1 + \beta y)^{p-1} [p (C_1 \sin q\eta + C_2 \cos q\eta) + \\ + q (C_1 \cos q\eta - C_2 \sin q\eta)] - 3\gamma\beta(1 + \beta y)^2 \tag{2.15}$$

Получим уравнения

$$C_2 - \gamma = 0, \qquad pC_2 + qC_1 = 3\gamma$$

Откуда

$$C_2 = \gamma, \qquad C_1 = \frac{\gamma(3-p)}{q} = \delta\gamma \tag{2.16}$$

Таким образом, имеем

$$B_e(y) = \gamma (1 + \beta y)^p (\delta \sin q\eta + \cos q\eta) - \gamma (1 + \beta y)^3 \tag{2.17}$$

$$v_e = \frac{\gamma}{x^2} (1 + \beta y)^3 - \frac{\gamma}{x^2} (1 + \beta y)^p \Big[(\delta \sin q\eta + \cos q\eta) + \frac{3\gamma\beta}{x} (1 + \beta y)^2 - \\ - \frac{\gamma\beta}{x} (1 + \beta y)^{p-1} (\delta\gamma - \gamma) \sin q\eta + \cos q\eta \Big], \qquad y = \tau_e - x \tag{2.18}$$

Если $^{11}/_{43} < \nu < {}^5/_{13}$, то p и q находятся в интервале от 0 до $^1/_2$. Заметим также, что $1 \leqslant 1 + \beta(\tau_e - x) < x$.

§ 3. Перемещение в пластической зоне определяется формулой

$$v_p = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_s}{k} x \log x + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varphi_p}{x} \tag{3.1}$$

где φ_p удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial \tau^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} \tag{3.2}$$

Общее решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\varphi_p = A_p (\tau_p + x) + B_p (\tau_p - x) \tag{3.3}$$

где A_p и B_p — произвольные функции.

Для определения этих функций имеем следующие условия: на внутренней границе

$$\sigma_r = -f(\alpha\tau) \quad \text{при} \quad x = 1 \tag{3.4}$$

где $f(\alpha\tau)$ — заданная функция;

на границе пластической зоны $\tau_p = x$ перемещение непрерывно

$$v_p = v_e \quad \text{при} \quad \tau_p = x \tag{3.5}$$

Воспользуемся сначала условием (3.5). Замечая, что

$$1 + \beta(\tau_e - \tau_p) = 1 + \alpha\tau = \tau_p$$

из (2.18) получим

$$v_e = (3\beta + 1)\gamma x - \gamma x^{p-2}[L \sin q \log x + (3\beta + 1) \cos q \log x] = \omega(x) \tag{3.6}$$

$$L = \delta + \beta(\delta p - q)$$

Определяя v_p из (3.3) дифференцированием и полагая $\tau_p = x$, получим

$$\frac{2\sigma_s}{3k} x \log x + \frac{1}{x}[A_p'(2x) - B_p'(0)] - \frac{1}{x^2}[A_g(2x) + B_q(0)] = \omega(x)$$

Заменяя $2x$ на x, после преобразований найдем

$$xA_p'(x) - 2A_p(x) = \frac{x^2}{2}\omega(^1/_2 x) - \frac{\sigma_s}{Gk} x^3 \log\frac{x}{2} + xB_p'(0) + 2B_p(0) \tag{3.7}$$

Обозначая ради краткости правую часть (3.7) через $\Omega(x)$, получим

$$A_p(x) = C_1 x^2 + x^2 \int \frac{\Omega(x)}{x^3} dx$$

или, выполнив квадратуру, найдем

$$A_p(x) = C_1 x^2 + (3\beta + 1)\gamma\frac{x^3}{4} - 2\gamma\left(\frac{x}{2}\right)^p \left(L_1 \sin q \log\frac{x}{2} + L_2 \cos q \log\frac{x}{2}\right) -$$

$$- \frac{\sigma_s}{6k} x^3 \left(\log\frac{x}{2} - 1\right) - xB_p'(0) - B_p(0) \tag{3.8}$$

Здесь C_1 — произвольное постоянное, а L_1 и L_2 имеют значения

$$L_1 = \frac{(p-2)L + q(3\beta+1)}{(p-2)^2 + q^2}, \qquad L_2 = \frac{(p-2)(3\beta+1) - qL}{(p-2)^2 + q^2} \tag{3.9}$$

Все члены правой части (3.8), которые не содержат произвольных величин, обозначим $Q(x)$. Тогда

$$A_p(x) = C_1 x^2 - xB_p'(0) - B_p(0) + Q(x) \tag{3.10}$$

Напряжение σ_r выражается через φ_p формулой

$$\sigma_r = \frac{k}{x}\frac{\partial^2 \varphi_p}{\partial x^2} + 2\sigma_s \log x \tag{3.11}$$

Функция B_p определяется из условия (3.4). Подставляя (3.3) в (3.11) и полагая $x = 1$, получим

$$A_p''(\tau_p + 1) + B_p''(\tau_p - 1) = -\frac{1}{k} f(\alpha\tau)$$

или, вспомнив, что $\tau_p = 1 + \alpha\tau$, и заменяя $\alpha\tau$ через S, получим уравнение

$$A_p''(S+2) + B_p''(S) = -\frac{1}{k} f(S) \tag{3.12}$$

Так как A_p уже известно, то из (3.12) функция B_p определяется двукратным интегрированием. Находим

$$B_p''(S) = -A_p''(2+S) = \frac{1}{k} f(S) \tag{3.13}$$

$$B_p'(S) = C_2 - A_p'(2+S) - \frac{1}{k}\int_0^S f(\xi)\, d\xi \tag{3.14}$$

$$B_p(S) = C_3 + C_2 S - A_p(1+S) - \frac{1}{k}\int_0^S (S-\xi) f(\xi)\, d\xi \tag{3.15}$$

Из (3.14) и (3.15) получаем связь между произвольными постоянными:

$$C_2 = B_p'(0) + A_p'(2), \qquad C_3 = B_p(0) + A_p(2)$$

или на основании (3.10)

$$C_2 = 4C_1 + Q'(2), \qquad C_3 = 4C_1 + Q(2) \tag{3.16}$$

При вычислении напряжений и перемещений аргументами служат $\tau_p - x$ в (3.15) и $\tau_p + x$ в (3.10). Опуская простые, но громоздкие вычисления, приведем окончательные формулы для напряжения σ_r и безразмерной скорости

$$\sigma_r = 2\sigma_s \log x + \frac{k}{x}\left[Q''(\tau_p + x) - Q''(2 + \tau_p - x) - \frac{1}{k} f(\tau_p - x)\right] \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial v_p}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{x}\left[Q''(\tau_p + x) + Q''(2 + \tau_p - x) + \frac{1}{k} f(\tau_p - x)\right] -$$

$$- \frac{\alpha}{x^2}\left[Q'(\tau_p + x) - Q'(2 + \tau_p - x) + Q'(2)\right] - \frac{1}{k}\int_0^{\tau_p - x} f(\xi)\, d\xi \tag{3.18}$$

Полагая в этих формулах $x = \tau_p$, получим

$$\sigma_r = 2\sigma_s \log \tau_p + \frac{k}{\tau_p}\left[Q''(2\tau_p) - Q''(2) - \frac{1}{k} f(0)\right] \tag{3.19}$$

$$\left(\frac{\partial v_p}{\partial x}\right)_{\tau_p} = \frac{\alpha}{\tau_p}\left[Q''(2\tau_p) + Q''(2) + \frac{1}{k} f(0)\right] - \frac{\alpha}{x^2} Q'(2\tau_p) \tag{3.20}$$

Из уравнений (3.19) и (3.20) усматриваем, что напряжение и скорость на фронте волны зависят только от начального значения давления.

Поступила в редакцию
25 I 1948

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Некоторые вопросы теории пластических деформаций. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 4

2. Альтшулер Л. В. О взрыве в сжимаемой пластической среде. ДАН. 1946. Т. 52. № 3.