Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГО-ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ

В. В. Соколовский

Настоящая работа содержит исследование вопроса о распространении волн в стержнях, материал которых обладает упругими и вязко-пластическими свойствами. Эти свойства материала описываются некоторыми зависимостями между напряжениями и деформациями, заданными в дифференциальной форме.

1. Зависимости между напряжениями и деформациями. Введем в рассмотрение зависимости между напряжением σ и деформацией ε для простого растяжения или сжатия, заданные в следующей форме:

$$E\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\sigma}{dt} \qquad \text{при} \quad |\sigma|<\sigma_s \tag{1.1}$$

$$E\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\sigma}{dt}+\varkappa kF(|\sigma|-\sigma_s) \qquad \text{при} \quad |\sigma|\geqslant\sigma_s \tag{1.2}$$

причем

$$F'(z)>0, \qquad F(0)=0, \qquad \varkappa=\operatorname{sign}\sigma$$

Мы пользуемся обозначениями: t — время, E — модуль упругости, σ_s — предел текучести, $\varepsilon_s=\sigma_s/E$ — деформация, соответствующая пределу текучести, k — физическая константа, размерность которой обратна размерности времени, $F(z)$ — функция, установленная экспериментально, $\overline{F}(z)$ — функция, обратная к $F(z)$, т. е.

$$\overline{F}\{F(z)\}=z$$

Заметим, что зависимость (1.2) справедлива при

$$\sigma_s\leqslant|\sigma|\leqslant\sigma_s+\overline{F}(\infty)$$

При весьма медленном деформировании в зависимости (1.2) можно опустить дифференциальные члены и получить условие пластичности в виде $|\sigma|=\sigma_s$; наоборот, при весьма быстром деформировании в зависимости (1.2) можно пренебречь свободным членом.

Зависимость (1.2) при $F(z)=z$ переходит в линейную зависимость

$$E\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{d\sigma}{dt}+\varkappa k(|\sigma|-\sigma_s) \qquad \text{при} \quad |\sigma|\geqslant\sigma_s \tag{1.3}$$

использованную К. Гогенемзером, В. Прагером и А. Ю. Ишлинским.

Функция $F(z)$ может быть выбрана различным образом. Приведем некоторые возможные виды этой функции:

$$\text{a)}\quad F(z)=\sigma_s\zeta^{\mu}, \qquad \text{b)}\quad F(z)=\sigma_s \operatorname{sh}\frac{\zeta}{\mu} \tag{1.4}$$

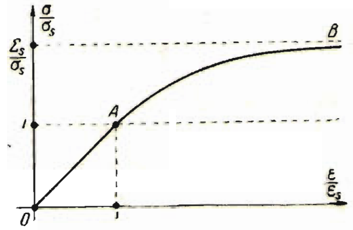
где μ — физическая константа, а величина $\zeta = z/\sigma_s$.

Исследуем деформацию стержня, происходящую по закону

$$\varepsilon=\lambda t \qquad (\lambda>0).$$

Уравнения (1.1), (1.2) после подстановки $t=\varepsilon/\lambda$ и интеграции дают

$$E\varepsilon=\sigma \quad (0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_s), \qquad E\varepsilon=\sigma_s+\Lambda\int_0^{\sigma_*}\frac{dz}{\Lambda-F(z)} \quad (\sigma\geqslant\sigma_s) \tag{1.5}$$



Фиг .1

где $\sigma_*=\sigma-\sigma_s$, $\Lambda=\lambda E/k$.

Написанные равенства устанавливают зависимость между ε и σ; она представлена графически на фиг. 1 в виде линии OAB.

Предельное значение Σ_s, к которому стремится σ при неограниченном возрастании ε, может быть представлено в виде

$$\Sigma_s=\sigma_s+\overline{F}(\Lambda)$$

При $F(z)=z$ формулы (1.5) принимают вид

$$E\varepsilon=\sigma \quad (0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_s), \qquad E\varepsilon=\sigma_s+\Lambda\ln\frac{\Lambda}{\Lambda+\sigma_s-\sigma} \quad (\sigma\geqslant\sigma_s) \tag{1.6}$$

При $\varepsilon\to\infty$ величина σ стремится к значению $\Sigma_s=\sigma_s+\Lambda$.

Исследуем деформацию стержня, происходящую под действием напряжения, заданного по закону

$$\sigma=p\,\frac{t}{t_0} \quad (0\leqslant t\leqslant t_0), \qquad \sigma=p\left(1-\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right) \quad (t_0\leqslant t\leqslant t_1)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) после перехода от t к σ легко интегрируется. Имеем:

нагружение

$$E\varepsilon=\sigma \quad (0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_s), \qquad E\varepsilon=\sigma+L\int_0^{\sigma_*}F(z)\,dz \quad (\sigma_s\leqslant\sigma\leqslant p)$$

разгружение

$$E(\varepsilon-\varepsilon_r)=\sigma \quad (0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_s), \qquad E(\varepsilon-\varepsilon_r)=\sigma-M\int_0^{\sigma_*}F(z)\,dz \quad (\sigma_s\leqslant\sigma\leqslant p)$$

Здесь обозначено

$$\sigma_*=\sigma-\sigma_s \qquad L=k\,\frac{t_0}{p}, \qquad M=k\,\frac{t_1-t_0}{p}, \qquad N=k\,\frac{t_1}{p}$$

Написанные равенства дают зависимость между ε и σ для нагружения и разгружения. Эта зависимость представлена графически на фиг. 2, нагружению соответствует линия OAB, а разгружению — линия BCD.

Остаточная деформация равна

$$E\varepsilon_r = N\int_0^{p_*} F(z)\,dz \qquad (p_* = p - \sigma_s)$$

При $F(z) = z$, эти формулы упрощаются и принимают вид:

нагружение

$$E\varepsilon = \sigma \qquad (0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_s)$$

$$E\varepsilon = \sigma + \frac{L}{2}(\sigma - \sigma_s)^2 \qquad (\sigma_s \leqslant \sigma \leqslant p)$$

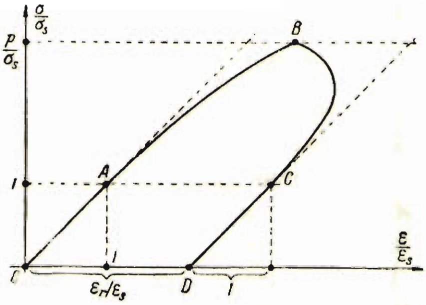
разгружение

$$E(\varepsilon - \varepsilon_r) = \sigma \qquad (0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_s)$$

$$E(\varepsilon - \varepsilon_r) = \sigma - \frac{M}{2}(\sigma - \sigma_s)^2 \qquad (\sigma_s \leqslant \sigma \leqslant p)$$

Остаточная деформация равна

$$E\varepsilon_r = \frac{N}{2}(p - \sigma_s)^2$$



Фиг. 2

§ 2. **Основные уравнения.** Рассмотрим полубесконечный или конечный стержень, у которого центры тяжести поперечных сечений лежат на одной прямой — оси стержня. Примем начало абсцисс $x = 0$ в конце стержня, положительную полуось $x > 0$ направим вдоль оси стержня. Обозначим через $\omega(x)$ площадь поперечного сечения с абсциссой x, а ω_0 — площадь поперечного сечения на конце стержня.

Для цилиндрического стержня $\omega = \omega_0$, для конического стержня $\omega = \omega_0(1 + x/d)^2$, где d — размерный параметр.

Дифференциальное уравнение движения поперечных сечений стержней при отсутствии объемных сил[1] (ρ — плотность материала)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\omega\sigma) = \rho\omega\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (2.1)$$

причем для напряжения σ и смещения u принято обычное правило знаков: положительное напряжение вызывает растяжение, а положительное смещение направлено в сторону возрастания x.

Деформация ε, скорость v и смещение u связаны между собой уравнениями

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2.2)$$

Зависимости (1.1) и (1.2) приводят к уравнениям

$$E\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} \qquad \text{при } |\sigma| \leqslant \sigma_s \qquad (2.3)$$

$$E\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial\sigma}{\partial t} + \varkappa k F(|\sigma| - \sigma_s) \qquad \text{при } |\sigma| > \sigma_s \qquad (2.4)$$

[1] Учет влияния объемных сил не представляет труда и ведет лишь к незначительному усложнению основных уравнений.

Система уравнений

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\omega'}{\omega}\sigma = \rho\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad E\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varkappa k \Phi\left(|\sigma| - \sigma_s\right) \tag{2.5}$$

где функция Φ определена равенствами

$$\Phi(z) = 0 \quad (z \leqslant 0), \qquad \Phi(z) = F(z) \quad (z \geqslant 0) \tag{2.6}$$

служит для определения напряжения σ и скорости v. Уравнение

$$E\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \varkappa k \Phi\left(|\sigma| - \sigma_s\right) \tag{2.7}$$

дает возможность найти деформацию ε.

Движение поперечных сечений стержня, которое отвечает решению уравнений (2.5), определенному в некоторой области изменения переменных t и x и обладающему в ней непрерывными производными первого порядка, называется *волной*.

Точка раздела двух волн, перемещающаяся с течением времени вдоль стержня, называется *фронтом*; на фронте величины σ и v непрерывны, но имеют разрывные производные.

Волны, на фронте которых величины σ и v разрывны, называются *прерывными* или *ударными* волнами.

Система уравнений (2.5) принадлежит к гиперболическому типу и обладает двумя семействами вещественных характеристик, дифференциальные уравнения которых имеют вид

$$x = \pm ct + \text{const}, \qquad c\,d\sigma \mp E\,dv + \left\{c\frac{\omega'}{\omega}\sigma \pm \varkappa k \Phi\left(|\sigma| - \sigma_s\right)\right\} dx = 0 \tag{2.8}$$

где обозначено $c^2 = E/\rho$.

Первые уравнения (2.8) определяют законы распространения фронтов прямой и обратной волн, перемещающихся соответственно в стороны возрастания и убывания x; вторые уравнения (2.8) дают законы изменения напряжения σ и скорости v вдоль этих фронтов.

Законы распространения фронтов прямой и обратной волн, таким образом, будут

$$x = \pm ct + \text{const}$$

Отсюда следует, что величина скорости распространения фронтов волн постоянна и равна c; для фронта, образовавшегося в сечении $x = x_0$ в момент $t = t_0$, имеем

$$x = x_0 \pm c(t - t_0)$$

Перейдем теперь к рассмотрению условий, которые должны иметь место на фронтах прерывных волн и на возмущенном конце стержня.

Условия кинематической и динамической совместности на фронтах прерывных волн, законы движения которых $x = x_0 \pm c(t - t_0)$, следуют из непрырывности смещения и теоремы о количестве движения.

Будем отмечать индексами — и + значения напряжения, деформации и скорости, к которым стремятся эти величины при приближении к фронту соответственно со стороны, где $t < t_0 \pm (x - x_0)/c$ и где $t > t_0 \pm (x - x_0)/c$. Разности этих значений будем обозначать

$$[\sigma] = \sigma^+ - \sigma^-, \qquad [\varepsilon] = \varepsilon^+ - \varepsilon^-, \qquad [v] = v^+ - v^-$$

Для фронтов $x = x_0 \pm c(t - t_0)$ прерывных волн кинематическое и динамическое условия имеют вид

$$c[\varepsilon] \pm [v] = 0, \qquad \rho c[v] \pm [\sigma] = 0 \tag{2.9}$$

причем верхние знаки относятся к фронту $x = x_0 + c(t - t_0)$ прямой волны, а нижние к фронту $x = x_0 - c(t - t_0)$ обратной волны.

Условия на конце стержня $x = 0$, испытывающего возмущение, зависят от характера этого возмущения. Остановимся на случаях, когда заданы напряжение или скорость на конце стержня как функции времени, либо на случае продольного удара, когда заданы масса и скорость ударяющего тела.

Для конца стержня $x = 0$, на котором задано напряжение или скорость, граничное условие имеет вид

$$\sigma = \sigma(t) \quad \text{или} \quad v = v(t) \qquad \text{при } x = 0 \tag{2.10}$$

Для конца стержня $x = 0$, по которому телом массы M произведен продольный удар со скоростью v_0, граничное условие будет

$$\sigma\omega_0 = M\frac{\partial v}{\partial t} \qquad \text{при } x = 0 \tag{2.11}$$

причем в начальный момент $t = 0$ известно $v = v_0$.

Условия в точке стационарного разрыва $x = l$, в которой площадь поперечного сечения ω претерпевает скачкообразное изменение, должны устанавливать непрерывность усилия и скорости.

Для сечения стержня $x = l$ имеют место условия

$$\sigma_2\omega_2 = \sigma_1\omega_1, \quad v_2 = v_1 \qquad \text{при } x = l \tag{2.12}$$

Индексами 1 и 2 отмечены напряжения, скорости и площади в сечении $x = l$, соответственно со стороны, где $x < l$ и где $x > l$.

Ниже будут использованы безразмерные величины[1]

$$\begin{gathered}
\tau = kt, \qquad \xi = k\frac{x}{c}, \qquad \delta = k\frac{d}{c}, \qquad \lambda = k\frac{l}{c} \\
U = \varkappa k\frac{u}{c\varepsilon_s} \quad V = \varkappa\frac{v}{c\varepsilon_s}, \qquad S = \frac{|\sigma|}{\sigma_s}, \qquad E = \varkappa\frac{\varepsilon}{\varepsilon_s} \\
f(\zeta) = \frac{1}{\sigma_s}F(z), \qquad \zeta = \frac{z}{\sigma_s}, \qquad m = \frac{kM}{\rho c\omega_0}, \qquad \theta = \frac{\omega_2}{\omega_1}
\end{gathered} \tag{2.13}$$

с сохранением за ними названий соответствующих величин, имеющих размерность. Функция $f(\zeta)$ обладает теми же свойствами, что и функция $F(z)$, т. е. $f'(\zeta) > 0$, $f(0) = 0$.

При $F(z) = z$ функция $f(\zeta) = \zeta$; при $F(z)$, определенной (1.4) имеем

$$\text{a)} \quad f(\zeta) = \zeta^\mu, \qquad \text{b)} \quad f(\zeta) = \operatorname{sh}\frac{\zeta}{\mu} \tag{2.14}$$

---

[1] Безразмерную деформацию E не следует смешивать с модулем упругости, обозначенным выше той же буквой.

Все дальнейшие рассуждения проводятся для любого вида функции $f(\zeta)$. Однако встречающиеся в формулах интегралы могут быть легко вычислены, если функция $f(\zeta)$ задана формулами (2.14).

Кроме приведенных выше, введем обозначение

$$\Omega(\xi)=\frac{c}{k}\,\frac{\omega'(x)}{\omega(x)}$$

Ясно, что для цилиндрического стержня $\Omega=0$, а для конического стержня $\Omega=2/(\xi+\delta)$.

§ 3. Преобразование основных уравнений. Уравнения (2.5) в безразмерных переменных принимают вид

$$\frac{\partial V}{\partial\tau}=\frac{\partial S}{\partial\xi}+\Omega S,\qquad \frac{\partial V}{\partial\xi}=\frac{\partial S}{\partial\tau}+\varphi(S-1) \tag{3.1}$$

где функция φ определена равенствами

$$\varphi(\zeta)=0\quad(\zeta\leqslant 0),\qquad \varphi(\zeta)=f(\zeta)\quad(\zeta\geqslant 0) \tag{3.2}$$

Уравнение (2.7) в безразмерных переменных будет

$$\frac{\partial E}{\partial\tau}=\frac{\partial S}{\partial\tau}+\varphi(S-1) \tag{3.3}$$

Дифференциальные уравнения характеристик (2.8) принимают вид

$$\xi=\pm\tau+\text{const},\qquad dS\mp dV+\{\Omega S\pm\varphi(S-1)\}\,d\xi=0 \tag{3.4}$$

Первые уравнения (3.4) дают в безразмерных переменных законы распространения фронтов прямой и обратной волн, перемещающихся соответственно в стороны возрастания и убывания ξ; вторые уравнения (3.4) определяют законы изменения S и V вдоль этих фронтов.

Законы распространения фронтов прямой и обратной волн будут

$$\xi=\pm\tau+\text{const}$$

Для фронта, возникшего в сечении $\xi=\xi_0$ в момент $\tau=\tau_0$, имеем

$$\xi=\xi_0\pm(\tau-\tau_0)$$

В плоскости $\tau\xi$ фронты волн, т. е. характеристики, образуют два ортогональных семейства прямых, параллельных биссектрисам координатных углов. Фронты прерывных волн называют *линиями разрыва*.

В дальнейшем будем применять новые переменные α и β

$$\alpha=\frac{1}{2}(\tau+\xi),\quad \beta=\frac{1}{2}(\tau-\xi);\quad \text{или}\quad \tau=\alpha+\beta,\quad \xi=\alpha-\beta \tag{3.5}$$

Уравнения (3.1) путем перехода от τ и ξ к α и β могут быть представлены в каноническом виде

$$\frac{\partial V}{\partial\beta}+\frac{\partial S}{\partial\beta}=\Omega S-\varphi(S-1),\qquad \frac{\partial V}{\partial\alpha}-\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\Omega S+\varphi(S-1) \tag{3.6}$$

Для *цилиндрического* стержня $\Omega=0$ и уравнения (3.6) имеют вид

$$V+S=\psi_1(\alpha),\qquad V-S=\psi_2(\beta)\qquad (S\leqslant 1) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\beta}+\frac{\partial S}{\partial\beta}=-f(S-1),\qquad \frac{\partial V}{\partial\alpha}-\frac{\partial S}{\partial\alpha}=+f(S-1)\qquad (S\geqslant 1) \tag{3.8}$$

где $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\beta)$ — произвольные функции.

Для *конического* стержня $\Omega = 2/(\xi+\delta)$ и уравнения (3.6) будут

$$V+S=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{\psi_1(\alpha)+\psi_2(\beta)}{\xi+\delta}\right\},\qquad V-S=\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{\psi_1(\alpha)+\psi_2(\beta)}{\xi+\delta}\right\}\qquad (S\leqslant 1)\tag{3.9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\beta}+\frac{\partial S}{\partial\beta}=\frac{2S}{\xi+\delta}-f(S-1),\qquad \frac{\partial V}{\partial\alpha}-\frac{\partial S}{\partial\alpha}=\frac{2S}{\xi+\delta}+f(S-1)\qquad (S\geqslant 1)\tag{3.10}$$

где $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\beta)$ — попрежнему произвольные функции.

При $f(\zeta)=\zeta$ в правых частях уравнений (3.8) и (3.10) функция $f(S-1)$ должна быть заменена на $S-1$.

Замечание. Уравнения (3.8) при $f(\zeta)=\zeta$ могут быть преобразованы к более простому виду. Действительно, замена искомых функций S и V на функции p и q по формулам

$$S-1=p\exp\left(-\frac{\tau}{2}\right),\quad V=q\exp\left(-\frac{\tau}{2}\right)$$

приводит к уравнениям

$$\frac{\partial q}{\partial\beta}+\frac{\partial p}{\partial\beta}=\frac{1}{2}(q-p),\qquad \frac{\partial q}{\partial\alpha}-\frac{\partial p}{\partial\alpha}=\frac{1}{2}(q+p)$$

После исключения q получим уравнение телеграфного вида

$$4\frac{\partial^2 p}{\partial\alpha\,\partial\beta}=p$$

Для приближенного решения полученных дифференциальных уравнений удобно пользоваться разностным методом. Значения искомых величин S и V на плоскости $\tau\xi$ в конечном числе точек пересечения прямолинейных характеристик $\beta=\text{const}$ (пронумерованных индексами $k-1,\ k,\ \ldots$) и прямолинейных характеристик $\alpha=\text{const}$ (пронумерованных индексами $l-1,\ l,\ \ldots$) находятся из разностных уравнений

$$V_{k,l}+S_{k,l}=V_{k,l-1}+S_{k,l-1}+(\beta_l-\beta_{l-1})\ \{\Omega S-\varphi(S-1)\}_{k,l-1}$$
$$V_{k,l}-S_{k,l}=V_{k-1,l}-S_{k-1,l}+(\alpha_k-\alpha_{k-1})\ \{\Omega S+\varphi(S-1)\}_{k-1,l}$$

соответствующих дифференциальным уравнениям (3.6)

Для фронтов $\xi=\xi_0\pm(\tau-\tau_0)$ прерывных волн условия кинематической и динамической совместности в безразмерных переменных выражаются в виде следующих равенств:

$$[E]\pm[V]=0,\qquad [V]\pm[S]=0\tag{3.11}$$

в которых верхние знаки относятся к фронту $\xi=\xi_0+(\tau-\tau_0)$ прямой волны, а нижние знаки — к фронту $\xi=\xi_0-(\tau-\tau_0)$ обратной волны.

Для конца стержня $\xi=0$, на котором задано напряжение или скорость, граничное условие имеет вид

$$S=S(\tau)\quad\text{или}\quad V=V(\tau)\qquad \text{при}\ \ \xi=0\tag{3.12}$$

где $S(\tau)$ или $V(\tau)$ — заданные функции.

Для конца стержня $\xi=0$, подвергшегося продольному удару, граничное условие будет

$$S=m\frac{\partial V}{\partial\tau}\qquad\text{при}\ \ \xi=0\tag{3.13}$$

причем в начальный момент $\tau=0$ известно $V=V_0$.

Для сечения стержня $\xi=\lambda$, в котором площадь поперечного сечения претерпевает скачкообразное изменение:

$$S_2\theta=S_1, \qquad V_2=V_1 \qquad \text{при } \xi=\lambda \tag{3.14}$$

§ 4. Фронты прерывных волн. Займемся сначала определением напряжений деформаций и скоростей на передних фронтах прерывных прямых и обратных волн. Рассмотрим прерывную прямую волну, распространяющуюся в полубесконечном или конечном стержнях и образовавшуюся в результате мгновенного возмущения на конце стержня $\xi=0$ в начальный момент $\tau=0$.

Закон распространения переднего фронта прямой волны дается уравнением ($\tau_0=\xi_0=0$)

$$\xi=\tau, \qquad \text{или} \qquad \beta=0, \ \alpha=\xi \tag{4.1}$$

устанавливающим, что фронт перемещается в сторону возрастания ξ.

Напряжение, деформация и скорость претерпевают на переднем фронте прямой волны скачки — прямая волна будет *прерывной* волной.

В плоскости $\tau\xi$ фронт прямой волны изображается прямой *разрыва* $\xi=\tau$ — биссектрисой координатного угла. Область движения расположена между биссектрисой $\xi=\tau$ и осью $\xi=0$.

Будем отмечать индексом 0 значения напряжений деформаций и скоростей в концевом сечении $\xi=0$.

Кинематическое и динамическое условия (3.11) на переднем фронте $\xi=\tau$ прямой волны приводят к равенствам

$$S=E=-V \tag{4.2}$$

Значения напряжения, деформации и скорости в концевом сечении $\xi=0$ в момент $\tau=0$ связаны равенствами

$$S_0=E_0=-V_0 \tag{4.3}$$

Уравнение, определяющее напряжение вдоль переднего фронта $\xi=\tau$ прямой волны, может быть получено из уравнений (3.4) и условий (4.2).

Действительно, если в первое дифференциальное уравнение (3.4)

$$\frac{dS}{d\xi}-\frac{dV}{d\xi}+\Omega S+\varphi(S-1)=0$$

подставить $V=-S$, то получим

$$2\frac{dS}{d\xi}+\Omega S+\varphi(S-1)=0 \tag{4.4}$$

Перепишем уравнения (4.4), принимая во внимание формулы (3.2).

$$2\frac{dS}{d\xi}+\Omega S=0 \qquad (S\leqslant 1) \tag{4.5}$$

$$2\frac{dS}{d\xi}+\Omega S+f(S-1)=0 \qquad (S\geqslant 1) \tag{4.6}$$

Для *цилиндрического* стержня, когда $\Omega=0$, уравнения (4.5) — (4.6) легко интегрируются. Приведем эти решения.

Решение уравнений (4.5) есть постоянное

$$S = S_0 \qquad (S \leqslant 1) \tag{4.7}$$

Решение уравнения (4.6)

$$2\frac{dS}{d\xi} + f(S-1) = 0$$

может быть получено весьма просто.

При $f(\zeta) = \zeta$

$$S = 1 + (S_0 - 1)\exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \qquad (S \geqslant 1) \tag{4.8}$$

Формула (4.7) имеет место при $S_0 \leqslant 1$, а формула (4.8) при $S_0 \geqslant 1$.

При $f(\zeta)$ произвольного вида

$$\frac{\xi}{2} + \int\limits_{A_0}^{A} \frac{d\zeta}{f(\zeta)} = 0 \qquad (S \geqslant 1) \tag{4.9}$$

где $A_0 = S_0 - 1$, $A = S - 1$.

При $f(\zeta)$ вида (2.14) интеграл, входящий в уравнение (4.9), может быть легко найден; напряжение S определяется равенствами:

a) при $f(\zeta) = \zeta^\mu$

$$S = 1 + \left\{(S_0 - 1)^{1-\mu} - (1-\mu)\frac{\xi}{2}\right\}^{\frac{1}{1-\mu}} \tag{4.9a}$$

b) при $f(\zeta) = \operatorname{sh}\frac{\zeta}{\mu}$

$$S = 1 + 2\mu \operatorname{Ar\,th}\left\{\exp\left(-\frac{\xi}{2\mu}\right)\operatorname{th}\left(\frac{S_0 - 1}{2\mu}\right)\right\} \tag{4.9b}$$

Для *конического* стержня, когда $\Omega = 2/(\xi + \delta)$, уравнения (4.5) и (4.6) также интегрируются. Дадим эти решения.

Решение уравнения (4.5) имеем простой вид:

$$S = S_0 \frac{\delta}{\xi + \delta} \qquad (S \leqslant 1) \tag{4.10}$$

Решение уравнения (4.6) при $f(\zeta) = \zeta$:

$$2\frac{dS}{d\xi} + \frac{2S}{\xi + \delta} + S - 1 = 0$$

также не представляет труда. Имеем

$$S = 1 + \frac{2}{\xi + \delta}\left(\exp\frac{\gamma - \xi}{2} - 1\right) \qquad (S \geqslant 1) \tag{4.11}$$

где

$$\gamma = 2\ln\left\{1 + (S_0 - 1)\frac{\delta}{2}\right\}$$

Это напряжение имеет место лишь на участке $0 \leqslant \xi \leqslant \gamma$, где $S \geqslant 1$; на соседнем участке $\xi > \gamma$, где $S < 1$, выражение (4.11) теряет механический смысл, а напряжение должно быть найдено из уравнения (4.5).

Решение уравнения (4.5) для конического стержня после определения постоянного из условия непрерывности S в сечении $\xi = \gamma$ дает

$$S = \frac{\gamma + \delta}{\xi + \delta} \qquad (S \leqslant 1) \tag{4.12}$$

Формула (4.10) имеет место при $S_0 \leqslant 1$, а формулы (4.11)—(4.12) при $S \geqslant 1$. Заметим, что формулы (4.11)—(4.12) переходят в формулу (4.8) при $\delta = \infty$.

Рассмотрим новую прерывную прямую волну, распространяющуюся в полубесконечном или конечном стержнях и образовавшуюся в результате мгновенного возмущения на конце стержня $\xi = 0$ в момент $\tau = \tau_0$.

Закон распространения переднего фронта новой прямой волны дается уравнением ($\xi_0 = 0$)

$$\xi = \tau - \tau_0, \quad \text{или} \quad \beta = \tau_0 / 2, \quad \alpha = \xi + \tau_0 / 2 \tag{4.13}$$

устанавливающим, что фронт перемещается в сторону возрастания ξ.

Напряжение, деформация и скорость претерпевают на переднем фронте новой прямой волны конечные скачки — новая прямая волна будет *прерывной* волной.

В плоскости $\tau\xi$ фронт $\xi = \tau - \tau_0$ новой прямой волны изображается *прямой разрыва*, параллельной биссектрисе координатного угла.

Условимся отмечать индексами $-$ и $+$ значения напряжения, деформации и скорости, к которым стремятся эти величины при приближении к фронту $\xi = \tau - \tau_0$ соответственно, со стороны, где $\tau < \xi + \tau_0$ и где $\tau > \xi + \tau_0$; будем отмечать индексом 0 значения напряжений, деформаций и скоростей в концевом сечении $\xi = 0$.

Кинематическое и динамическое условия (3.11) на фронте $\xi = \tau - \tau_0$ новой прямой волны имеют вид

$$[S] = [E] = -[V] \tag{4.14}$$

Значения напряжений, деформацией и скоростей в концевом сечении $\xi = 0$ в момент $\tau = \tau_0$ связаны равенствами

$$[S_0] = [E_0] = -[V_0] \tag{4.15}$$

Уравнение, определяющее напряжение вдоль переднего фронта $\xi = \tau - \tau_0$ новой прямой волны, может быть получено из уравнения (3.4) и условия (4.14). Действительно, перепишем первое дифференциальное уравнение (3.4), отметив индексами $+$ напряжение и скорость:

$$\frac{dS^+}{d\xi} - \frac{dV^+}{d\xi} + \Omega S^+ + \varphi(S^+ - 1) = 0$$

Подставляя в это уравнение $V^+ = -S^+ + V^- + S^-$, получим

$$2\frac{dS^+}{d\xi} + \Omega S^+ + \varphi(S^+ - 1) = \frac{dS^-}{d\xi} + \frac{dV^-}{d\xi} \tag{4.16}$$

Перепишем уравнение (4.16), принимая во внимание формулы (3.2) для двух наиболее интересных вариантов:

$$2\frac{dS^+}{d\xi} + \Omega S^+ = \frac{dS^-}{d\xi} + \frac{dV^-}{d\xi} \qquad (S^+ \leqslant 1,\ S^- \geqslant 1) \tag{4.17}$$

$$2\frac{dS^+}{d\xi} + \Omega S^+ + f(S^+ - 1) = \frac{dS^-}{d\xi} + \frac{dV^-}{d\xi} \qquad (S^+ \geqslant 1,\ S^- \leqslant 1) \tag{4.18}$$

Остальные два варианта могут быть рассмотрены аналогично.

Для *цилиндрического стержня*, когда $\Omega = 0$, уравнения (4.17) — (4.18) могут быть проинтегрированы. Приведем эти решения.

Решение уравнения (4.17)

$$2\frac{dS^+}{d\xi} = \frac{dS^-}{d\xi} + \frac{dV^-}{d\xi}$$

может быть легко найдено:

$$2(S^+ - S_0^+) = (S^- - S_0^-) + (V^- - V_0^-) \qquad (S^+ \leqslant 1,\ S^- \geqslant 1) \qquad (4.19)$$

Решение уравнения (4.18) при $f(\zeta) = \zeta$:

$$2\frac{dS^+}{d\xi} + (S^+ - 1) = \frac{dS^-}{d\xi} + \frac{dV^-}{d\xi}$$

в частном случае, когда $S^- = \mathrm{const}$, $V^- = \mathrm{const}$, которым мы и ограничимся, не представляет труда. Имеем

$$S^+ = 1 + (S_0^+ - 1)\exp\left(-\frac{\xi}{2}\right) \qquad (S^+ \geqslant 1,\ S^- \leqslant 1) \qquad (4.20)$$

Рассмотрим прерывную обратную волну, распространяющуюся в полубесконечном или конечном стержнях и образовавшуюся при отражении прямой волны в сечении $\xi = \lambda$, которое является местом скачкообразного изменения площади поперечного сечения или концом стержня.

Отраженная волна возникнет в момент $\tau = \lambda$, когда передний фронт $\xi = \tau$ прямой волны, перемещаясь на участке $0 \leqslant \xi < \lambda$, достигнет $\xi = \lambda$.

Закон распространения переднего фронта отраженной обратной волны на участке $0 \leqslant \xi < \lambda$ дается уравнением $(\tau_0 = \xi_0 = \lambda)$

$$\xi = 2\lambda - \tau, \qquad \text{или} \qquad \alpha = \lambda, \quad \beta = \lambda - \xi \qquad (4.21)$$

т. е. фронт отраженной волны перемещается в сторону убывания ξ.

Напряжение, деформация и скорость претерпевают на переднем фронте отраженной волны конечные скачки — отраженная волна будет *прерывной* волной.

В плоскости $\tau\xi$ фронт $\xi = 2\lambda - \tau$ отраженной волны изображается прямой *разрыва*, ортогональной к биссектрисе координатного угла.

Условимся отмечать индексами — и + значения напряжения, деформации и скорости, к которым стремятся эти величины при приближении к фронту $\xi = 2\lambda - \tau$ соответственно со стороны, где $\tau < 2\lambda - \xi$ и где $\tau > 2\lambda - \xi$; будем отмечать индексом $*$ значения напряжения, деформации и скорости в сечении $\xi = \lambda$, подсчитанные со стороны $\xi < \lambda$.

Кинематическое и динамическое условия (3.11) на фронте $\xi = 2\lambda - \tau$ отраженной обратной волны принимают вид

$$[S] = [E] = [V] \qquad (4.22)$$

Значения напряжений, деформаций и скоростей в сечении $\xi = \lambda$ в момент $\tau = \lambda$ связаны равенствами

$$S_*^- = E_*^- = -V_*^-, \qquad S_*^+ = E_*^+ = -\theta V_*^+ = \frac{2\theta}{1+\theta} S_*^- \qquad (4.23)$$

следующими из условий (3.14), (4.2) и (4.22).

Равенства (4.23) могут быть также использованы, когда сечение

$\xi=\lambda$ является концом стержня; для закрепленного или свободного конца соответственно

$$\theta=\infty, \quad S_*{}^+=E_*{}^+=2S_*{}^-, \quad V_*{}^+=0$$

или

$$\theta=0, \quad S_*{}^+=E_*{}^+=0, \quad V_*{}^+=2V_*{}^-$$

Уравнение, определяющее напряжение вдоль переднего фронта $\xi=2\lambda-\tau$ отраженной обратной волны, может быть найдено из уравнений (3.4) и условий (4.22). Действительно, перепишем второе уравнение (3.4), отметив индексами $+$ напряжение и скорость:

$$\frac{dS^+}{d\xi}+\frac{dV^+}{d\xi}+\Omega S^+-\varphi(S^+-1)=0$$

Подставляя в это уравнение $V^+=S^++V^--S^-$, получим

$$2\frac{dS^+}{d\xi}+\Omega S^+-\varphi(S^+-1)=\frac{dS^-}{d\xi}-\frac{dV^-}{d\xi} \tag{4.24}$$

Перепишем уравнения (4.24), учитывая формулы (3.2) для двух наиболее интересных вариантов:

$$2\frac{dS^+}{d\xi}+\Omega S^+ =\frac{dS^-}{d\xi}-\frac{dV^-}{d\xi} \qquad (S^+\leqslant 1,\ S^-\geqslant 1) \tag{4.25}$$

$$2\frac{dS^+}{d\xi}+\Omega S^+-f(S^+-1)=\frac{dS^-}{d\xi}-\frac{dV^-}{d\xi} \qquad (S^+\geqslant 1,\ S^-\leqslant 1) \tag{4.26}$$

Остальные два варианта могут быть рассмотрены аналогично.

Для *цилиндрического* стержня, когда $\Omega=0$, уравнения (4.25)—(4.26) могут быть проинтегрированы. Приведем эти решения.

Решение уравнения (4.25)

$$2\frac{dS^+}{d\xi}=\frac{dS^-}{d\xi}-\frac{dV^-}{d\xi}$$

может быть без труда получено:

$$2S^+=S^--V^-+\frac{4\theta}{1+\theta}S_*{}^- \qquad (S^+\leqslant 1,\ S^-\geqslant 1) \tag{4.27}$$

Решение уравнения (4.26) при $f(\zeta)=\zeta$:

$$2\frac{dS^+}{d\xi}-(S^+-1)=\frac{dS^-}{d\xi}-\frac{dV^-}{d\xi}$$

в случае, когда $S^-=\mathrm{const}$, $V^-=\mathrm{const}$, не представляет труда. Имеем

$$S^+=1+\left(\frac{2\theta}{1+\theta}S_*{}^--1\right)\exp\frac{\xi-\lambda}{2} \qquad (S^+\geqslant 1,\ S^-\leqslant 1) \tag{4.28}$$

Равенства (4.27) и (4.28) могут быть также применены, когда сечение $\xi=\lambda$ является концом стержня; для закрепленного конца $\theta=\infty$, для свободного конца $\theta=0$.

§ 5. Прерывные волны. Займемся теперь определением напряжений, деформаций и скоростей, появляющихся в стержнях после прохождения переднего фронта прерывной прямой волны.

Рассмотрим прерывные волны, распространяющиеся в полубесконечном или конечном стержнях, возникшие в результате возмущения на конце стержня $\xi = 0$.

Деформация E выражается формулой

$$E = S(\tau, \xi) + \int_{\xi}^{\tau} \varphi \{S(z, \xi) - 1\} dz \tag{5.1}$$

следующей из уравнения (3.3) и условия (4.2).

Допустим сначала, что в поперечном сечении с абсциссой ξ с момента $\tau = \xi$ до момента $\tau = \tau(\xi)$ имело место напряжение $S \leqslant 1$, а с момента $\tau = \tau(\xi)$ возникло напряжене $S \geqslant 1$.

Деформация E имеет вид

$$E = S(\tau, \xi) \quad (\xi \leqslant \tau < \tau(\xi)), \qquad E = S(\tau, \xi) + \int_{\tau(\xi)}^{\tau} f\{S(z, \xi) - 1\} dz \quad (\tau > \tau(\xi)) \tag{5.2}$$

Допустим теперь, что в поперечном сечении с абсциссой ξ с момента $\tau = \xi$ до момента $\tau = \tau(\xi)$ имело место напряжение $S \geqslant 1$, а с момента $\tau = \tau(\xi)$ образовалось напряжение $S \leqslant 1$.

Деформация E будет

$$E = S(\tau, \xi) + \int_{\xi}^{\tau} f\{S(z, \xi) - 1\} dz \qquad (\xi \leqslant \tau < \tau(\xi))$$

$$E = S(\tau, \xi) + E_r(\xi) \qquad (\tau > \tau(\xi)) \tag{5.3}$$

Остаточная деформация $E_r(\xi)$ равна

$$E_r(\xi) = \int_{\xi}^{\tau(\xi)} f\{S(z, \xi) - 1\} dz = E^-(\xi) - S^-(\xi) \tag{5.4}$$

Индексами $^-$ отмечены напряжение и деформация в момент $\tau = \tau(\xi)$, подсчитанные со стороны $\tau < \tau(\xi)$.

Заметим, что переход от $S < 1$ к $S > 1$ или от $S > 1$ к $S < 1$ в моменты $\tau = \tau(\xi)$ может быть постепенным или внезапным; в первом случае при $\tau = \tau(\xi)$ напряжение $S = 1$, во втором случае при $\tau = \tau(\xi)$ напряжение претерпевает скачок.

Напряжение S и скорость V могут быть найдены путем построения решений уравнений (3.6) в треугольных или прямоугольных областях плоскости $\tau\xi$.

Построение решения дифференциальных уравнений (3.6) в этих областях по данным на их контурах удобно проводить приближенным методом, приведенным в § 3.

Задача 1. Рассмотрим полубесконечный цилиндрический стержень, на конце $\xi = 0$ которого действует напряжение $(P > 1)$

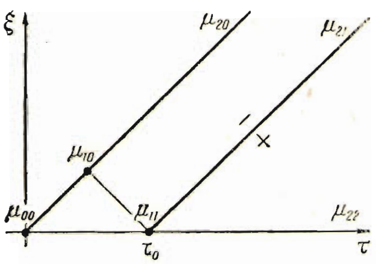
$$S = P \quad (0 \leqslant \tau < \tau_0), \qquad S = 0 \quad (\tau_0 < \tau \leqslant \infty)$$

считая, что, $f(\zeta) = \zeta$.

На конце $\xi = 0$ стержня деформация в силу формул (5.3) имеет вид

$$E = P + (P-1)\tau \quad (0 \leqslant \tau < \tau_0), \qquad E = (P-1)\tau_0 \quad (\tau_0 < \tau \leqslant \infty)$$

На переднем фронте $\xi = \tau$ напряжение, деформация и скорость на основании (4.2) и (4.8) будут



Фиг. 3

$$S = E = -V = 1 + (P-1)\exp\left(-\frac{\xi}{2}\right)$$

На фиг. 3 изображены области движения, построенные в плоскости $\tau\xi$; характеристики $\xi = \tau$ и $\xi = \tau - \tau_0$ являются *линиями разрыва*. В полуполосе $\mu_{20}\mu_{10}\mu_{00}\mu_{11}\mu_{21}$, ограниченной характеристиками $\xi = \tau$, $\xi = \tau - \tau_0$ и осью абсцисс $\xi = 0$, напряжение $S > 1$.

Напряжение S и скорость V находятся путем построения сначала в треугольнике $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{11}$, а затем в полуполосе $\mu_{20}\mu_{10}\mu_{11}\mu_{21}$ решения уравнений (3.8) по следующим данным:

вдоль характеристики $\mu_{00}\mu_{20}$

$$\alpha = \xi, \qquad \beta = 0, \qquad S = -V = 1 + (P-1)\exp\left(-\frac{\xi}{2}\right)$$

вдоль отрезка прямой $\mu_{00}\mu_{11}$

$$2\alpha = 2\beta = \tau, \qquad S = P$$

Деформация E определяется по формуле (5.3) в виде

$$E = S(\tau, \xi) + \int_{\xi}^{\tau} S(z, \xi)\, dz + \xi - \tau$$

В угле $\mu_{21}\mu_{11}\mu_{22}$ между характеристикой $\xi = \tau - \tau_0$ и осью $\xi = 0$ напряжение $S < 1$.

Напряжение S и скорость V выражаются формулами (3.7), причем произвольные функции $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\beta)$ находятся по данным:

вдоль характеристики $\mu_{11}\mu_{21}$

$$2\alpha = 2\xi + \tau_0, \qquad 2\beta = \tau_0 \tag{*}$$

$$2(S^+ - S_0^+) = (S^- - S_0^-) + (V^- - V_0^-), \qquad V^+ = V^- - (S^+ - S^-)$$

вдоль прямой $\mu_{11}\mu_{22}$

$$2\alpha = 2\beta = \tau, \qquad S = 0$$

Равенства (*) следуют из формул (4.14) и (4.19).

Деформация E находится по формулам (5.3) в виде

$$E = S(\tau, \xi) + E_r(\xi)$$

Остаточная деформация равна

$$E_r(\xi) = E^-(\xi) - S^-(\xi), \quad \text{причем} \quad E_r(0) = (P-1)\tau_0$$

Ниже приведены результаты вычислений к рассмотренной задаче при $P = 2$, $\tau_0 = 1$, выполненные численным методом § 3: даны значения напряжения, деформации и скорости на фронтах и на концах стержня, а также значения остаточной деформации:

Фронт $\xi = \tau$

ξ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
S	2.00	1.95	1.90	1.86	1.82	1.78	1.74	1.70	1.67	1.64	1.61

Фронт $\xi = \tau - \tau_0$

S^-	2.00	1.96	1.92	1.89	1.85	1.82	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67
S^+	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.05	0.06	0.07	0.07	0.08
$-V^-$	2.44	2.38	2.32	2.27	2.22	2.17	2.12	2.07	2.03	1.99	1.95
$-V^+$	0.44	0.43	0.42	0.41	0.40	0.40	0.39	0.38	0.37	0.37	0.36
E^-	3.00	2.92	2.83	2.76	2.68	2.61	2.55	2.48	2.42	2.36	2.30
E^+	1.00	0.97	0.93	0.90	0.87	0.84	0.81	0.79	0.76	0.74	0.71

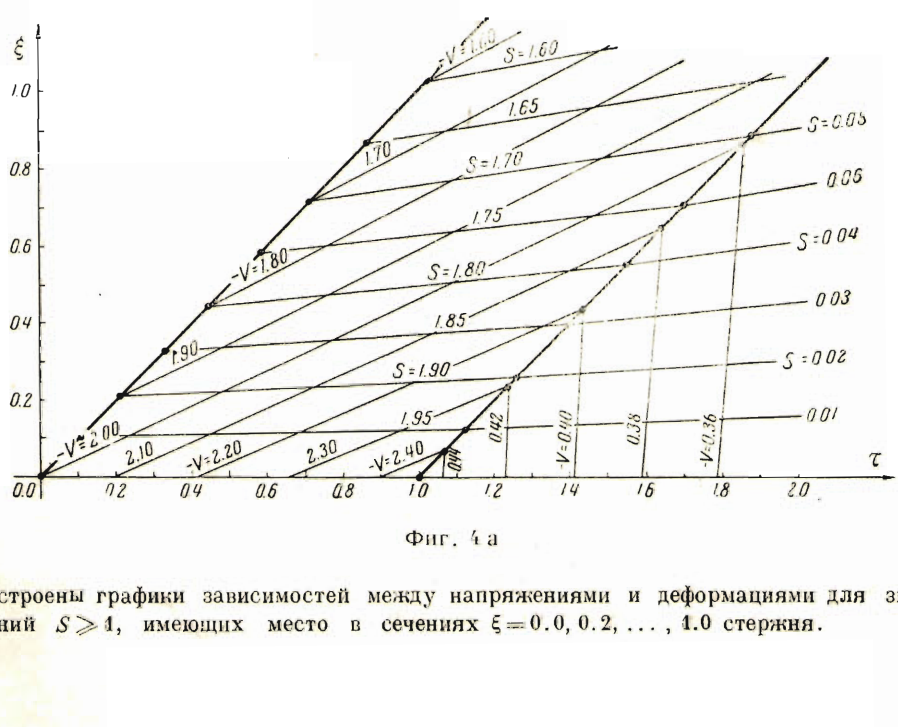
Конец стержня $\xi = 0$

τ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$-V$	2.00	2.10	2.19	2.28	2.36	2.44 0.44	0.42	0.40	0.38	0.37	0.35

Остаточная деформация

ξ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
E_r	1.00	0.96	0.91	0.87	0.83	0.80	0.76	0.73	0.69	0.66	0.63

На фиг. 4 а изображены области движения в плоскости $\tau\xi$ и нанесены линии равных напряжений $S = \text{const}$ и линии равных скоростей $V = \text{const}$; на фиг. 4 б



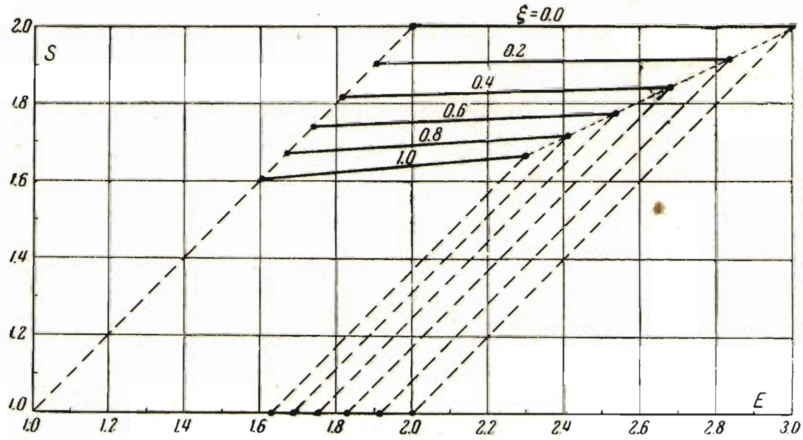
Фиг. 4 а

построены графики зависимостей между напряжениями и деформациями для значений $S \geqslant 1$, имеющих место в сечениях $\xi = 0.0, 0.2, \ldots, 1.0$ стержня.

Задача 2. Рассмотрим полубесконечный конический стержень, на конце $\xi=0$ которого действует напряжение $(P>1)$

$$S=P\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\quad(0\leqslant\tau\leqslant\tau_0),\qquad S=0\quad(\tau_0<\tau\leqslant\infty)$$

считая, что $f(\zeta)=\zeta$.



Фиг. 4 б

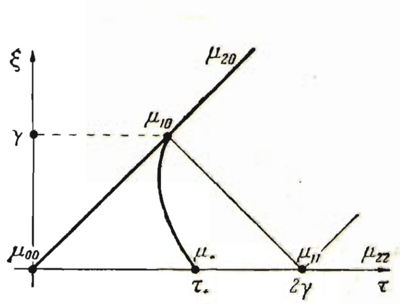
На конце $\xi=0$ стержня деформация вследствие формул (5.3) имеет вид

$$E=P\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)-\tau+P\tau\left(1-\frac{\tau}{2\tau_0}\right)\qquad(0\leqslant\tau\leqslant\tau_*)$$

$$E=P\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)+P\frac{\tau_*^2}{2\tau_0}\quad(\tau_*\leqslant\tau\leqslant\tau_0)\qquad E=P\frac{\tau_*^2}{2\tau_0}\quad(\tau_0\leqslant\tau\leqslant\infty)$$

где

$$\tau_*=\tau_0(P-1)/P$$



Фиг. 5

На переднем фронте $\xi=\tau$ напряжение, деформация и скорость в силу формул (4.2) и (4.11)—(4.12) будут

$$S=E=-V=1+\frac{2}{\xi+\delta}\left(\exp\frac{\gamma-\xi}{2}-1\right)$$
$$(0\leqslant\xi\leqslant\gamma)$$

$$S=E=-V=\frac{\gamma+\delta}{\xi+\delta}$$
$$(\xi\geqslant\gamma)$$

где

$$\gamma=2\ln\{1+(P-1)\delta/2\}.$$

На фиг. 5 изображены области движения, построенные в плоскости $\tau\xi$; характеристика $\xi=\tau$ является *линией разрыва*. Точки μ_{10} и μ_* имеют координатами $\tau=\xi=\gamma$ и $\tau=\tau_*$, $\xi=0$.

В угле $\mu_{10}\mu_{00}\mu_{11}$ между характеристикой $\xi=\tau$ и осью $\xi=0$ в некоторой окрестности вершины напряжение $S>1$.

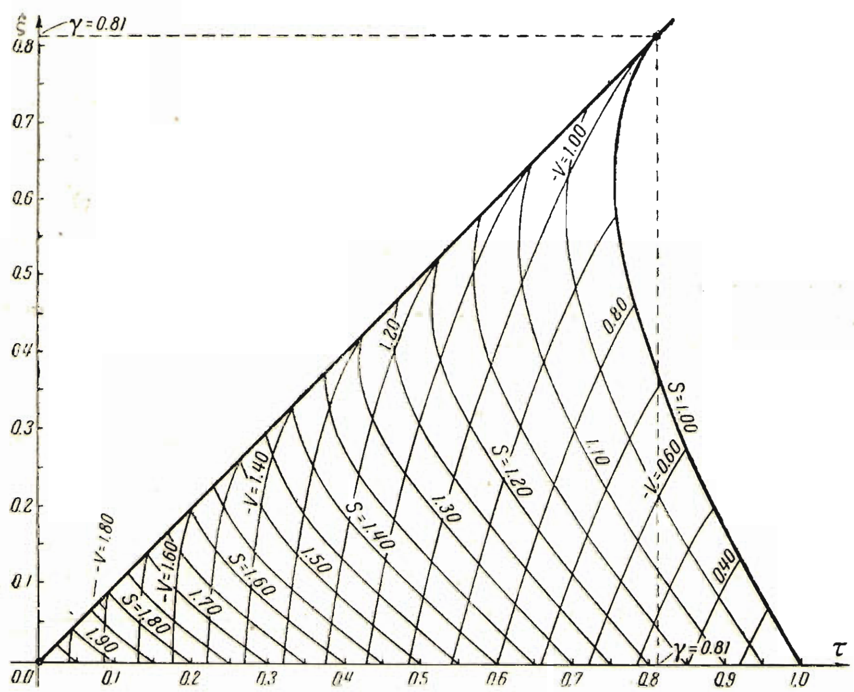
Напряжение S и скорость V находятся путем построения в треугольнике $\mu_{10}\mu_{00}\mu_{11}$ решения уравнений (3.10) по следующим данным:

вдоль отрезка характеристики $\mu_{00}\mu_{10}$,

$$\alpha = \xi, \quad \beta = 0, \quad S = -V = 1 + \frac{2}{\xi + \delta}\left(\exp\frac{\gamma - \xi}{2} - 1\right) \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \gamma)$$

вдоль отрезка прямой $\mu_{00}\mu_{11}$

$$2\alpha = 2\beta = \tau, \qquad S = P\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \qquad (0 \leqslant \tau \leqslant \tau_*)$$



Фиг. 6а

Деформация E определяется по формуле (5.3) в виде

$$E = S(\tau, \xi) + \int_{\xi}^{\tau} S(z, \xi)\, dz + \xi - \tau$$

Построенное таким образом решение имеет механический смысл, лишь пока $S \geqslant 1$.

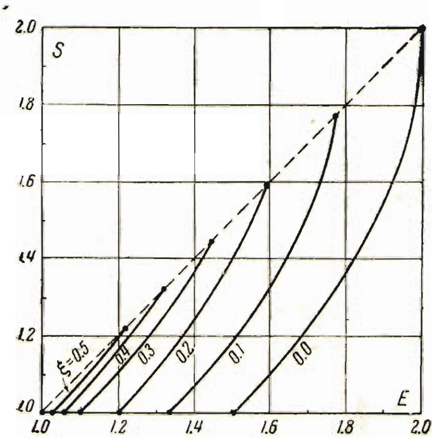
Линию, вдоль которой $S = 1$, обозначим через $\xi = \xi(\tau)$ или $\tau = \tau(\xi)$; эта линия проходит через точки μ_{10} и μ_*.

В области, расположенной между характеристикой $\xi = \tau$, осью $\xi = 0$ и линией $\xi = \xi(\tau)$, для $\tau > \tau(\xi)$ напряжение $S < 1$.

Напряжение S и скорость V выражаются формулами (3.9), причем произвольные функции $\psi_1(\alpha)$ и $\psi_2(\beta)$ находятся по данным:

вдоль характеристики $\mu_{10}\mu_{20}$

$$\alpha = \xi, \qquad \beta = 0, \qquad S = -V = \frac{\gamma + \delta}{\xi + \delta} \qquad (\xi > \gamma)$$



Фиг. 6 б

вдоль прямой $\mu_* \mu_{22}$

$$2\alpha = 2\beta = \tau$$

$$S = P\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \qquad (\tau_* \leqslant \tau \leqslant \tau_0)$$

$$S = 0 \qquad (\tau_0 \leqslant \tau \leqslant \infty)$$

Деформация E определяется по формуле (5.3) в виде

$$E = S(\tau, \xi) + E_r(\xi)$$

Остаточная деформация равна

$$E_r(\xi) = E^-(\xi) - 1 \qquad (0 \leqslant \xi \leqslant \gamma)$$

$$E_r(\xi) = 0 \qquad (\xi \geqslant \gamma)$$

причем $E_r(0) = P\tau_*^2 / (2\tau_0)$

Ниже приведены результаты вычислений в рассмотренной задаче при $\delta = 1$, $P = 2$, $\tau_0 = 2$, произведенных численным методом § 3; даны значения напряжения, деформации на фронте, на конце стержня и на границе зон $\xi = \xi(\tau)$, а также значения остаточной деформации.

Фронт $\xi = \tau$

ξ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.81
S	2.00	1.78	1.60	1.45	1.33	1.22	1.14	1.07	1.01	1.00

Конец стержня $\xi = 0$

τ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$-V$	2.00	1.76	1.55	1.35	1.15	0.97	0.80	0.64	0.48	0.33	0.18

Граница зон $\xi = \xi(\tau)$

ξ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.81
$-V$	0.18	0.34	0.48	0.62	0.74	0.83	0.91	0.96	1.00	1.00
E	1.50	1.32	1.20	1.12	1.08	1.04	1.02	1.01	1.00	1.00

Остаточная деформация

ξ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.81
E_r	0.50	0.32	0.20	0.12	0.08	0.04	0.02	0.01	0.00	0.00

На фиг. 6 а изображены области движения в плоскости $\tau\xi$ и нанесены линии равных напряжений $S = \text{const}$ и линии равных скоростей $V = \text{const}$; на фиг. 6 б построены графики зависимостей между напряжениями и деформациями для значений $S > 1$, имеющих место в сечениях $\xi = 0.0,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5$ стержня.

Задача 3. Рассмотрим цилиндрический стержень длины l, на конце $\xi = 0$ которого действует напряжение $S = P$, причем $1 < 2P < 2$, а другой конец $\xi = \lambda$ закреплен, считая, что $f(\zeta) = \zeta$.

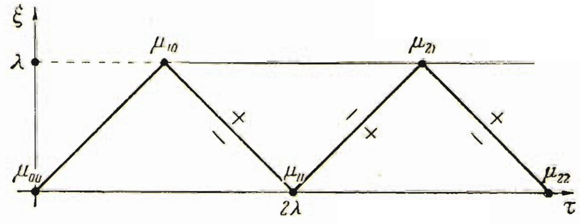
На конце $\xi = 0$ стержня деформации в силу формул (5.3) будет

$$E = P$$

После прохождения переднего фронта $\xi = \tau$ прямой волны и до подхода переднего фронта $\xi = 2\lambda - \tau$ отраженной волны в стержне возникнет напряжение $S < 1$.

Напряжение, деформация и скорость постоянны

$$S = E = -V = P$$



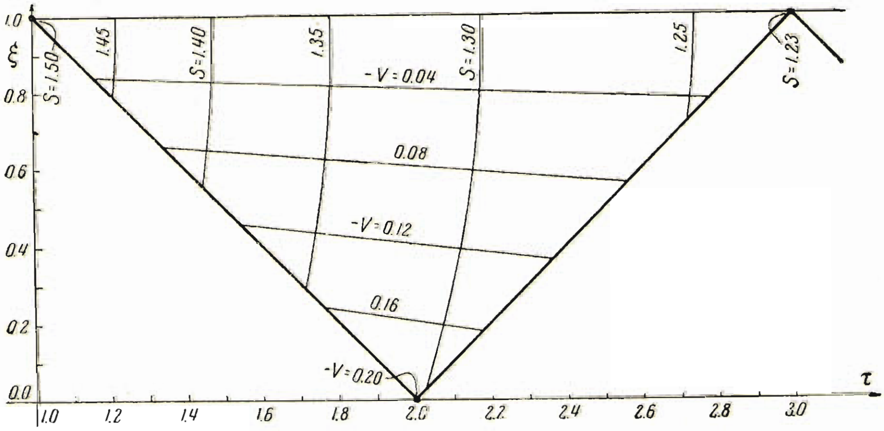
Фиг. 7

На переднем фронте $\xi = 2\lambda - \tau$ отраженной волны напряжение, деформация и скорость на основании (4.22) и (4.28) при $\theta = \infty$ будут

$$S = E = V + 2P = 1 + (2P - 1) \exp \frac{\xi - \lambda}{2}$$

На фиг. 7 представлены области движения, построенные в плоскости $\tau\xi$; характеристики $\xi = \tau$, $\xi = \tau - 2\lambda$, ... и $\xi = 2\lambda - \tau$, ... являются *линиями разрыва*.

В треугольнике $\mu_{10}\mu_{11}\mu_{21}$, ограниченном характеристиками $\xi = 2\lambda - \tau$, $\xi = \tau - 2\lambda$ и прямой $\xi = \lambda$, напряжение $S > 1$.



Фиг. 8 а

Напряжение S и скорость V находятся путем построения в треугольнике $\mu_{10}\mu_{11}\mu_{21}$ решения уравнений (3.8) по следующим данным: *вдоль отрезка характеристики* $\mu_{10}\mu_{11}$

$$\alpha = \lambda, \quad \beta = \lambda - \xi, \quad S = V + 2P = 1 + (2P - 1) \exp \frac{\xi - \lambda}{2}$$

вдоль отрезка прямой $\mu_{10}\mu_{21}$

$$2\alpha = \tau + \lambda, \qquad 2\beta = \tau - \lambda, \qquad V = 0$$

Деформация E определяется по формуле (5.3) в виде

$$E = S(\tau, \xi) + \int_{2\lambda-\xi}^{\tau} S(z, \xi)\, dz - (\tau + \xi) + 2\lambda$$

Ниже приведены результаты вичислений к рассмотренной задаче при $\lambda = 1$, $P = 0.75$, выполненные численным методом § 3; даны значения напряжения, деформация и скорости на фронтах, а также на закрепленном конце стержня.

Фронт $\xi = 2\lambda - \tau$

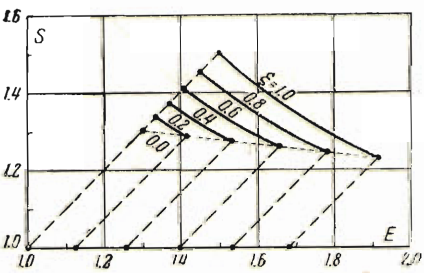
ξ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
S	1.30	1.32	1.34	1.35	1.37	1.39	1.41	1.43	1.45	1.48	1.50
$-V$	0.20	0.18	0.16	0.15	0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.02	0.00

Фронт $\xi = \tau - 2\lambda$

S^-	1.30	1.29	1.29	1.28	1.27	1.26	1.26	1.25	1.24	1.24	1.23
S^+	0.75	0.76	0.76	0.77	0.78	0.78	0.79	0.80	0.80	0.81	0.81
$-V^-$	0.20	0.18	0.15	0.13	0.11	0.09	0.07	0.05	0.03	0.02	0.00
$+V^+$	0.36	0.36	0.37	0.38	0.38	0.39	0.40	0.40	0.41	0.41	0.42
E^-	1.30	1.36	1.41	1.47	1.53	1.59	1.65	1.71	1.77	1.84	1.92
E^+	0.75	0.82	0.89	0.96	1.04	1.11	1.18	1.26	1.34	1.42	1.50

Закрепленный конец стержня $\xi = \lambda$

τ	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
S	1.50	1.45	1.41	1.38	1.35	1.32	1.30	1.28	1.26	1.25	1.23
E	1.50	1.55	1.60	1.64	1.68	1.72	1.76	1.80	1.84	1.87	1.91



Фиг. 8 б

На фиг. 8 а изображены области движения в плоскости $\tau\xi$ и нанесены линии равных напряжений $S = \text{const}$ и линии равных скоростей $V = \text{const}$; на фиг. 8 б построены графики зависимостей между напряжениями и деформациями для значений $S \geqslant 1$, имеющих место в сечениях $\xi = 0.0,\ 0.2,\ \ldots,\ 1.0$ стержня.

Аналогично могут быть рассмотрены задачи об определении напряжений, деформаций и скоростей при других условиях на конце стержня. Особенности этих задач проявляются лишь на данных вдоль оси $\xi = 0$.

Поступила в редакцию
12 I 1948

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Hohenemser K. und Prager W. Über die Ansätze der Mechanik isotroper Kontinua. ZAMM. Bd. 12. H. 4. 1932.
2. Ишлинский А. Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 1.
3. Рахматулин Х. А. О распространении волны разгрузки. ПММ. 1945. Т. IX Вып. 1.
4. Taylor G. The Testing of Materials at High Rates of Loading. Journal of the Institute of Civil Engineers. 1946.