Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII. 1948

ОБОБЩЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧАМ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ [1]

А. Н. Герасимов
(Москва)

Явления упругого последействия в свете теории наследственности описываются линейным интегральным уравнением Больцмана [1]

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \int_0^\infty G(\tau)\,\varepsilon(t-\tau)\,d\tau$$

где E — упругая постоянная и $G(\tau)$ — наследственная функция, определяемая из опыта. Экспериментальные исследования показывают, что особого внимания заслуживает частный вид этого уравнения, соответствующий только наследственной части напряжения,

$$\sigma(t) = \int_0^\infty G(\tau)\,\varepsilon(t-\tau)\,d\tau$$

Не меньший интерес представляет также тот случай, когда напряжение $\sigma(t)$ зависит от всех предшествующих, надлежащим образом взвешенных значений скоростей деформации, но не деформаций.

Для таких процессов деформирования зависимость между σ и ε

$$\sigma(t) = \int_0^\infty K(\tau)\,\dot\varepsilon(t-\tau)\,d\tau$$

если ограничиваться только наследственной частью напряжения.

Наследственная функция для некоторых материалов (волокнистой структуры) должна иметь вид

$$K(\tau) = \frac{A}{\tau^\alpha}$$

где постоянная $A > 0$ и α лежит между нулем и единицей. Положив еще

$$A = \frac{\varkappa}{\Gamma(1-\alpha)}$$

где постоянная $\varkappa > 0$ зависит от свойств вещества и Γ есть эйлеров интеграл второго рода, получим

$$\sigma(t) = \varkappa\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{\dot\varepsilon(t-\tau)\,d\tau}{\tau^\alpha} = \varkappa\frac{\partial^\alpha\varepsilon(t)}{\partial t^\alpha} \qquad (0<\alpha<1) \tag{1}$$

так как производная от $\varepsilon(t)$ по t порядка α будет

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty \frac{\dot\varepsilon(t-\tau)\,d\tau}{\tau^\alpha}$$

---

[1] Доложено в Институте механики АН СССР 29 мая 1947 г.

Это линейное соотношение между ε и σ при $\alpha=0$ обращается в закон Гука, при $\alpha=1$ — в закон Ньютона для внутреннего трения. Мы будем исходить из зависимости (1) для любого α между 0 и 1.

Рассмотрим в качестве первого примера задачу о движении жидкости между двумя параллельными плоскостями, из которых одна неподвижна, а другая движется прямолинейно параллельно первой по данному закону. Примем зависимость между σ и ε для жидкости в виде (1), где α имеет определенное значение $(0<\alpha<1)$.

Пусть (фиг. 1) плоскость $x=0$ неподвижна, плоскость $x=l$ движется в самой себе в направлении оси y по закону

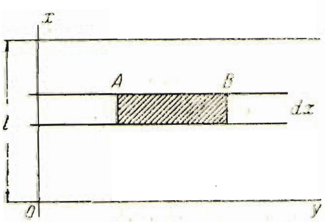
$$y(x,t)\,|_{x=l}=\varphi(t)\qquad (\varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=0)$$

где $\varphi(t)$ — данная функция времени.

Начальные и граничные условия предположим соответственно в виде

$$y(x,t)\,|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0}=0,\qquad y(x,t)\,|_{x=0},\quad y(x,t)\,|_{x=l}=\varphi(t) \tag{2}$$

Рассмотрим элемент объема жидкости AB, ограниченный двумя гранями с площадями, равными единице в плоскостях $x=\mathrm{const}$ и $x+dx=\mathrm{const}$. Уравнение движения получим в виде



Фиг. 1

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{3}$$

где $\rho=\mathrm{const}$ есть плотность жидкости.

Дифференцируя (1) по x и помня, что $\varepsilon=\partial y/\partial x$, после подстановки в (3) получим

$$\varkappa\,\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=\rho\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{4}$$

Будем искать решение $y(x,t)$ уравнения (4) при условиях (2) по способу Хевисайда. Пусть $Y(x,p)$ — изображение для $y(x,t)$.

В области изображений уравнению (4) при условиях (2) будет отвечать уравнение

$$\frac{d^2Y}{dx^2}=c^2p^{2m}Y\qquad \left(c^2=\frac{\rho}{\varkappa},\ 2m=2-\alpha,\ \frac{1}{2}<m<1\right) \tag{5}$$

при условиях

$$Y\,|_{x=0}=0,\qquad Y\,|_{x=l}=\Phi(p)\ \dot{\leftarrow}\ \varphi(t) \tag{6}$$

Решение уравнения (5) при условиях (6) имеет вид

$$Y(x,p)=\Phi(p)\,\frac{\operatorname{sh} cp^m x}{\operatorname{sh} cp^m l} \tag{7}$$

По теореме Бореля получим для оригинала

$$y(x,t)=\frac{d}{dt}\int_0^t K(t-\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta \tag{8}$$

где

$$K(\vartheta)\ \dot{\rightarrow}\ \frac{\operatorname{sh} cp^m x}{\operatorname{sh} cp^m l}\qquad \text{или}\qquad K(\vartheta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{p\vartheta}}{p}\,\frac{\operatorname{sh} cp^m x}{\operatorname{sh} cp^m l}\,dp \tag{9}$$

Здесь L есть, например, прямая, проходящая параллельно мнимой оси p справа от всех особенностей подинтегральной функции. Применяя известное разложение, имеем

$$\frac{\operatorname{sh} cp^m x}{\operatorname{sh} cp^m l} = \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{k\pi}{cl}\right)^{2j} p^{-2jm} \tag{10}$$

Так как при $\tau \geqslant 0$

$$p^{-2jm} \doteq \frac{\tau^{2jm}}{\Gamma(2jm+1)} \qquad (j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

то

$$K(t-\theta) = \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{k\pi}{cl}\right)^{2j} \frac{(t-\theta)^{2jm}}{\Gamma(2jm+1)} \tag{11}$$

Действительная часть функций

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\frac{k\pi}{cl}\right)^{2j} \frac{\tau^{2jm}}{\Gamma(2jm+1)} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots) \tag{12}$$

для $\frac{1}{2} < m < 1$ вообще многозначна; но при $m = \frac{1}{2}$ или $m = 1$ имеет лишь одну действительную ветвь. Рассмотрим частные случаи.

При $m = \frac{1}{2}$, или $\alpha = 1$, т. е. для жидкости, следующей закону Ньютона $\sigma = \varkappa\, d\varepsilon(t)/dt$, из (11) получается

$$K(t-\theta) = \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} \exp - \frac{k^2\pi^2 (t-\theta)}{c^2 l^2}$$

Для распределения смещения имеем

$$y(x,\ t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \left\{ \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} \exp - \frac{k^2\pi^2 (t-\theta)}{c^2 l^2} \right\} \varphi(\theta)\, d\theta$$

или (13)

$$y(x,\ t) = \left\{ \frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x}{l} \right\} \varphi(t) - $$

$$- \frac{2\pi}{c^2 l^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k \sin \frac{k\pi x}{l} \int_0^t \varphi(\theta) \exp \frac{-k^2\pi^2 (t-\theta)}{c^2 l^2}\, d\theta$$

Как известно,

$$\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} = \begin{cases} 0 & (x < l) \\ 1 & (x = l) \end{cases} \tag{14}$$

Поэтому из (13) получаем

$$y(x,\ t) = -\frac{2}{\pi^2 c^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k \sin \frac{k\pi x}{l} \int_0^t \varphi(\theta) \exp - \frac{k^2\pi^2 (t-\theta)}{c^2 l^2}\, d\theta \qquad (0 \leqslant x < l)$$

$$y(x,\ t)|_{x=l} = \varphi(t)$$

В таком виде решение для этого случая дано А. И. Лурье[2].

При $\alpha=0$, или $m=1$, т. е., когда между плоскостями находится упругая среда, деформируемая на сдвиг, имеем

$$K(t-\theta)=\frac{x}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{k\pi(t-\theta)}{cl}$$

Для распределения смещений получаем

$$y(x,t)=\left\{\frac{x}{l}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}\varphi(t)-$$

$$-\frac{2}{cl}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^t\varphi(\theta)\sin\frac{k\pi(t-\theta)}{cl}\,d\theta$$

На основании (14) найдем

$$y(x,t)=-\frac{2}{cl}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sin\frac{k\pi x}{l}\int_0^t\varphi(\theta)\sin\frac{k\pi(t-\theta)}{cl}\,d\theta \qquad (0\leqslant x<l)$$

$$y(l,t)=\varphi(t)$$

Это, как известно, уравнение вынужденных поперечных волн в упругой среде.

Таким образом, предельные случаи $\alpha=1$ и $\alpha=0$ не выпадают из найденной выше общей формы решения для любого α между 0 и 1. Поэтому в зависимости (1) можно считать $0\leqslant\alpha\leqslant 1$.

Вернемся опять к общему выражению (11) для $K(\tau)$.

При $\alpha=\frac{1}{2}$ $(m={}^3/_4)$ оказалось бы, что каждому значению $\tau\geqslant 0$ отвечают два действительных значения каждой из функций (12), входящих в выражение (11) для $K(\tau)$. Эти значения будут

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(a_m\tau^{3/4})^{2k}}{\Gamma(3k/2+1)},\quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_m\tau^{3/4})^{2k}}{\Gamma(3k/2+1)}\qquad\left(a_m=\frac{m\pi}{cl},\ m=1,2,\ldots\right) \tag{15}$$

где радикалы понимаются в арифметическом смысле.

Разложения (15) сходятся равномерно для всех τ на любом интервале конечной длины.

Но, в то время как функции, определяемые первым рядом (15), остаются ограниченными для $\tau\geqslant 0$, функции, определенные вторым рядом, неограниченно растут с ростом τ. Сохраняя лишь одно первое выражение и отбрасывая второе, как не обеспечивающее должной сходимости ядра $K(\tau)$ при $\tau\to\infty$, введем обозначение

$$C_n(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}a_n^{2k}\frac{(-1)^k\tau^{3k/2}}{\Gamma(3k/2+1)}\qquad\left(a_n=\frac{m\pi}{cl},\ n=1,2,\ldots\right) \tag{16}$$

Тогда

$$y(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{m\pi x}{l}\int_0^t C_n'(t-\theta)\varphi(\theta)\,d\theta \qquad (0\leqslant x<l) \tag{17}$$

$$y(l,t)=\varphi(t)$$

На фиг. 2 даны примерные графики функций $\cos x$ и $\exp -x$ светлыми линиями и функции $C_n(x)$ при $a_n = 1$.

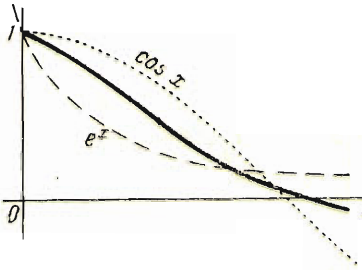
Зная распределение смещений (17) для случая $a = {}^1/_2$, можно найти величину сдвига $\varepsilon = \partial y / \partial x$, а затем, беря от этого выражения производную по t половинного порядка, получить при помощи (1) распределение напряжений. Однако способ Хевисайда позволяет найти напряжение в любом слое, в частности, на границах без знания распределения смещений. Покажем это для случая равномерного движения верхней плоскости $x = l$

$$\varphi(\theta) = v\theta \qquad (v = \text{const} > 0)$$

Из решения (7) в области изображений дифференцированием по x и подстановкой в результате $x = l$ имеем

$$\varepsilon\,|^{x=l} = \frac{\partial y}{\partial x}\bigg|_{x=l} \mathrel{\dot{\to}} \frac{dY}{dx}\bigg|_{x=l} =$$

$$= cp^m \operatorname{ctg} h\, cp^m l \Phi(p)$$



Фиг. 2

Чтобы найти изображение для $(\sigma)_{x=l}$, нужно это выражение умножить на $\varkappa p^a = \varkappa p^{2-2m}$. Имеем

$$\sigma\,|_{x=l} \mathrel{\dot{\to}} \varkappa c p^{5/4} \Phi(p) \operatorname{ctg} hclp^{\frac{3}{4}}$$

Пользуясь известными рядами и имея в виду, что $vt \mathrel{\dot{\to}} v/p$, легко найдем

$$\varkappa c p^{2-m} \frac{v}{p} \operatorname{ctg} hcl p^m = \varkappa cv \left\{ p^{1-m} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{[(2k+2)\,cl]^j p^{1+(j-1)m}}{j!} \right\}$$

Помня, что m — не целое, следовательно, допускающее возможность применения известной операционной формулы для перехода к оригиналу, получим окончательно

$$\sigma\,|_{x=l} = \varkappa cv \left\{ \frac{1}{\Gamma(m)\, t^{1-m}} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{[(2k+2)\,cl]^j}{j!\,\Gamma(-jm+m)\, t^{1+(j-1)m}} \right\} \tag{18}$$

При $t = 0$ напряжение $(\sigma)_{x=l}$ обращается в бесконечность порядка $(1-m)$. Это и естественно, так как в вязкой жидкости нельзя мгновенно сообщить граничной плоскости $x = l$ конечную скорость, применяя усилие конечной величины (Лурье [2]).

В качестве второго примера рассмотрим движение жидкости между коаксиальными цилиндрическими поверхностями, вращающимися по данному закону. Мы опять будем исходить из зависимости (1). Пусть r_1, r_2 — радиусы поверхностей внутреннего и внешнего, а r — промежуточного цилиндров, L — длина цилиндров, ρ — плотность жидкости. Далее, пусть $\varphi(r, t)$ — подлежащее определению угловое смещение жидкого слоя на радиусе r. Для деформации, очевидно, имеем

$$\varepsilon = r\frac{\partial \varphi}{\partial r} \tag{19}$$

Нетрудно убедиться, что результирующий момент сил инерции для слоя между поверхностями r и $r+dr$ есть

$$-\rho 2\pi L dr \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} r^3 \tag{20}$$

Момент сил напряжения при сдвиге в этом слое равен

$$2\pi L dr \frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma) \tag{21}$$

Согласно принципу Даламбера

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma) = \rho r^3 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{22}$$

Умножив выражение (1) для σ на r^2 и продифференцировав по r, а затем учитывая (20), имеем

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma) = \varkappa \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\varepsilon^{(\alpha)}\right] \tag{23}$$

Сравнивая (22) и (23), получим уравнение движения

$$\rho r^3 \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \varkappa \frac{\partial}{\partial r}\left[r^3 \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial^\alpha\varphi}{\partial t^\alpha}\right] \tag{24}$$

Его решение должно удовлетворять начальным условиям, которые предположим в виде

$$\varphi(r, t)\big|_{t=0} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \qquad (r_1 \leqslant r \leqslant r_2) \tag{25}$$

и краевым условиям, выражающим прилипание частиц на стенках:

$$\varphi(r, t)\big|_{r=r_1} = \varphi_1(t), \qquad \varphi(r, t)\big|_{r=r_2} = \varphi_2(t) \tag{26}$$

Здесь φ_1 и φ_2 — данные функции, обращающиеся в нуль вместе с их производными первого порядка при $t=0$.

Применяем опять способ Хевисайда. Пусть $\Phi(r, p) \doteqdot \varphi(r, t)$. Уравнению (24) при условиях (25) и (26) в области изображений соответствует

$$c^2 r^3 p^{2m}\Phi = \frac{\partial}{\partial r}\left[r^3\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] \qquad \left(c^2 = \frac{\rho}{\varkappa},\ m = \frac{2-\alpha}{2},\ \frac{1}{2} < m < 1\right) \tag{27}$$

Уравнение (27) сопровождается условиями

$$\Phi(r_1, p) = \Phi_1(p), \quad \Phi(r_2, p) = \Phi_2(p), \quad \Phi_1(p) \doteqdot \varphi_1(t), \quad \Phi_2(p) \doteqdot \varphi_2(t) \tag{28}$$

Вводя дуговое смещение $F(r, p)$ в области изображений под условием

$$F(r, p) = r\Phi(r, p) \tag{29}$$

вместо (27) и (28) получим

$$\frac{d^2F}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dF}{dr} - \left(c^2p^{2m} + \frac{1}{r^2}\right)F = 0$$

$$\left(F(r_1, p) = r_1\Phi_1(p), \qquad F(r_2, p) = r_2\Phi_2(p)\right) \tag{30}$$

Общий интеграл бесселева уравнения (30) имеет вид

$$F(r, p) = AJ_1(\lambda ir) + BN_1(\lambda ir) \qquad (\lambda = cp^m,\ i^2 = -1) \tag{31}$$

Постоянные A и B надо выбрать так, чтобы было

$$J_1(\lambda ir_1)A + N_1(\lambda ir_1)B = r_1\Phi_1(p), \qquad J_1(\lambda ir_2)A + N_1(\lambda ir_2)B = r_2\Phi_2(p) \tag{32}$$

Из (32) можно будет определить A и B в функциях от p, если только p не является корнем уравнения

$$\Delta = J_1(\lambda ir_1)N_1(\lambda ir_2) - J_1(\lambda ir_2)N_1(\lambda ir_1) = 0 \tag{33}$$

Тогда получим

$$\Phi(r, p) = \frac{1}{\Delta}\{[r_1\Phi_1(p)J(\lambda ir)N(\lambda ir_2) - r_2\Phi_2(p)J(\lambda ir)N(\lambda ir_1)] + \\ + [r_2\Phi_2(p)J(\lambda ir_1)N(\lambda ir) - r_1\Phi_1(p)J(\lambda ir_2)N(\lambda ir)]\} \tag{34}$$

Здесь и в дальнейшем индекс порядка функций Бесселя опущен. Пользуясь затем теоремой Бореля, получим

$$\varphi(r, t) = \frac{r_1}{r}\frac{d}{dt}\int_0^t \varphi_1(\vartheta)K_1(t-\vartheta, r)\,d\vartheta + \frac{r_2}{r}\frac{d}{dt}\int_0^t \varphi_2(\vartheta)K_2(t-\vartheta, r)\,d\vartheta \tag{35}$$

где $K_1(\theta)$ и $K_2(\theta)$ суть оригиналы, соответствующие функциям

$$\varkappa_1(p, r) = \frac{J(\lambda ir)N(\lambda ir_2) - J(\lambda ir_2)N(\lambda ir)}{\Delta}$$

$$\varkappa_2(p, r) = \frac{J(\lambda ir_1)N(\lambda ir) - J(\lambda ir)N(\lambda ir_1)}{\Delta} \tag{36}$$

т. е.

$$K_1(\theta, r) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{p\theta}}{p}\varkappa_1(p, r)\,dp, \qquad K_2(\theta, r) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{p\theta}}{p}\varkappa_2(p, r)\,dp$$

при условии, что кривая L в плоскости p, вообще произвольная, лежит правее всех особенностей подинтегральных выражений, в частности, правее всех нулей левой части (33), так что условия возможности решения (32) относительно A и B соблюдаются.

Ограничимся частным случаем, когда $r_2 - r_1 = \delta_0$ мало по сравнению с r_1 (подшипник скольжения). Введем обозначения

$$r_1\Phi_1(p) = F_1, \qquad r_2\Phi_2(p) = F_2, \qquad r\Phi(r, p) = F, \qquad J(\lambda ir_1) = J$$

$$N(\lambda ir_1) = N, \qquad \lambda ir_1 = x, \qquad \lambda i(r_2 - r_1) = \delta, \qquad \lambda i(r - r_1) = \xi$$

Тогда

$$\lambda ir_2 = x + \delta, \qquad J(\lambda ir_2) = J + J'\delta, \qquad J(\lambda ir) = J + J'\xi$$

$$\lambda ir = x + \xi, \qquad N(\lambda ir_2) = N + N'\delta, \qquad N(\lambda ir) = N + N'\xi$$

После вычислений имеем

$$\Phi(r, p) = \frac{r_1}{r}\frac{r_2 - r}{\delta_0}\Phi_1(p) + \frac{r_2}{r}\frac{r - r_1}{\delta_0}\Phi_2(p) \tag{37}$$

Применения теоремы Бореля не требуется, и сразу находим

$$\varphi(r, t) = \frac{r_1}{r}\frac{r_2 - r}{\delta_0}\varphi_1(t) + \frac{r_2}{r}\frac{r - r_1}{\delta_0}\varphi_2(t) \tag{38}$$

Отсюда для деформации ε получаем следующее выражение:

$$\varepsilon = r\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{r_1 r_2}{\delta_0 r}\psi(t) \qquad (\psi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)) \tag{39}$$

Наконец, пользуясь (1), получим выражение для напряжения

$$\sigma = \frac{\varkappa r_1 r_2}{\delta_0 r}\frac{\partial^\alpha\psi}{\partial t^\alpha} \tag{40}$$

В частности, напряжения на поверхностях будут

$$\sigma\,\big|_{r=r_1} = \frac{\varkappa r_2}{\delta_0}\frac{\partial^\alpha\psi}{\partial t^\alpha}, \qquad \sigma\,\big|_{r=r_2} = \frac{\varkappa r_1}{\delta_0}\frac{\partial^\alpha\psi}{\partial t^\alpha} \tag{41}$$

Из (41) между прочим видно, что второе меньше первого в r_2/r_1 раз; основание этого обстоятельства чисто геометрическое: закон действия и противодействия требует равенства обеих сил, из которых одна распределена по меньшей, другая по большей площади; тогда концентрация силы, т. е. напряжение, должна быть больше на той поверхности, которая меньше. При $\alpha = 1$ имеем вместо (41) закон Кулона: напряжение оказывается пропорциональным относительной скорости.

В более общем случае допустим, что относительное угловое смещение $\psi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ представляется рядом синусов

$$\psi(t) = \sum_k a_k \sin\omega_k t \qquad (a_k = \mathrm{const}) \tag{42}$$

Тогда из (41) найдем

$$\sigma\big|_{r=r_1} = \frac{\varkappa r_2}{\delta_0}\sum_k a_k\omega_k^\alpha \sin\left(\omega_k t + \alpha\frac{\pi}{2}\right) \tag{43}$$

Выражение (43) дает ход изменения во времени для напряжений на внутренней поверхности при любом α в интервале $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ в зависимости (1). Следует, однако, иметь в виду, что движение смазки в подшипнике должно быть ламинарным и, следовательно, относительная угловая скорость $d\psi(t)/dt$ должна быть достаточно малой.

Известные случаи линейных зависимостей с постоянными коэффициентами между напряжением σ и деформацией ε могут быть представлены в единой форме при помощи интегралов Стильтьеса по непрерывно (или скачкообразно) меняющемуся порядку производных по времени.

В самом деле, каждому деформируемому телу по отношению к данной деформации поставим в соответствие две функции $e(\alpha)$ и $s(\alpha)$ действительного переменного α, определенные для всех действительных значений α. Предполагается, что обе они имеют ограниченное изменение на любом конечном интервале значений α. Будем называть $e(\alpha)$ инерцией данного тела относительно напряжения σ и $s(\alpha)$ инерцией по отношению к деформации. Тогда всякий линейный закон, связывающий σ с ε посредством интегральной, или дифференциальной, или дискретной зависимости с не меняющимися во времени коэффициентами, является лишь частным случаем общей зависимости

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^\alpha\sigma}{\partial t^\alpha}\,de(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^\alpha\varepsilon}{\partial t^\alpha}\,ds(\alpha) \tag{44}$$

Здесь предполагается, что оба интеграла Стильтьеса существуют; там, где $e(\alpha)$ или $s(\alpha)$ не определены, их нужно считать равными нулю. В случае абсолютно упругого тела (закон Гука) в (1) надо положить

$$de(0) = 1, \qquad ds(0) = E \qquad (de(\alpha) = 0, \ ds(\alpha) = 0, \ \alpha \neq 0)$$

В случае, когда тело, не будучи вполне упруго, релаксирует со скоростью q и последействует со скоростью n, т. е. когда оно ведет себя по закону (А. Ю. Ишлинский [3])

$$\sigma + \frac{1}{q}\dot{\sigma} = E\left(\varepsilon + \frac{1}{n}\dot{\varepsilon}\right) \qquad (q, n - \mathrm{const} > 0, \ q > n) \tag{45}$$

то чтобы получить (45), в уравнении (1) достаточно положить

$$de(0) = 1, \qquad de(1) = \frac{1}{q}, \qquad ds(0) = E, \qquad ds(1) = \frac{E}{n}.$$

$$(de(\alpha) = 0, \ ds(\alpha) = 0, \ \alpha \neq 0, \ \alpha \neq 1)$$

Ясно, что и вторичные релаксационно-последейственные процессы деформирования, описываемые соотношением

$$\sigma + \frac{1}{q}\dot{\sigma} + \lambda\ddot{\sigma} = E\left(\varepsilon + \frac{1}{n}\dot{\varepsilon} + \mu\ddot{\varepsilon}\right) \tag{46}$$

также укладываются в рамки зависимости (1), если положить $de(\alpha) = ds(\alpha) = 0$ для всех α, кроме 0, 1 и 2, а для этих последних считать

$$de(0) = 1, \qquad ds(1) = \frac{1}{q}, \qquad de(2) = \lambda$$

$$ds(0) = E, \qquad ds(1) = \frac{E}{n}, \qquad ds(2) = E\mu$$

В заключение этой статьи мы даем решение уже рассмотренной в первом примере задачи о жидкости между параллельными плоскостями, когда жидкость деформируется на чистый сдвиг движением одной плоскости относительно другой. Зависимость между σ и ε предположим в виде (44) при некоторых определенных функциях инерции $e(\alpha)$ и $s(\alpha)$, заданных на некотором (ограниченном или неограниченном) множестве. После того, что было сказано выше по поводу определения этих функций, не нарушая общности рассуждений, можно продолжить область определения $e(\alpha)$ и $s(\alpha)$ на всю действительную ось α.

Пусть плоскость $x=0$ (фиг. 1) неподвижна, плоскость $x=l$ движется в самой себе в направлении оси y по заданному закону; пусть ρ есть постоянная плотность жидкости.

Краевые условия задачи будут те же, что и раньше:

$$y(x, t)|_{x=0} = 0, \qquad y(x, t)|_{x=l} = \varphi(t) \tag{47}$$

Начальные условия таковы:

$$\left.\frac{\partial^\omega y}{\partial t^\omega}\right|_{t=0} = 0 \qquad (\omega \in M) \tag{48}$$

где M — конечное или бесконечное, дискретное или континуальное, ограниченное или нет множество значений α, определяемое свойствами $e(\alpha)$ и $s(\alpha)$, т. е. свойствами жидкости.

Функция $\varphi(t)$ должна быть задана в согласии с (48).

Как и в первом примере, уравнение движения

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{49}$$

мы комбинируем с тем, которое получается из (44) дифференцированием по x. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right) de(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right) ds(\alpha) \tag{50}$$

Принимая во внимание, что $\partial\varepsilon/\partial x = \partial^2 y/\partial x^2$, получим из (49) уравнение движения в виде

$$\rho\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{2+\alpha} y}{\partial x^{2+\alpha}} ds(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) ds(\alpha) \tag{51}$$

Если $Y(x, p) \risingdotseq y(x, t)$, то в области изображений уравнению (51) соответствует

$$\frac{d^2Y}{dx^2}\int_{-\infty}^{+\infty} p^\alpha ds(\alpha) = Y\rho p^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p^\alpha de(\alpha) \tag{52}$$

При этом функция $Y(x, p)$ должна удовлетворять условиям

$$Y(x, p)|_{x=0} = 0, \quad Y(x, p)|_{x=l} = \Phi(p) \qquad \left(\Phi(p) \risingdotseq \varphi(t)\right) \tag{53}$$

Решение уравнения (52) при условиях (53) будет

$$Y(x, p) = \Phi(p)\frac{\operatorname{sh} Apx}{\operatorname{sh} Apl}$$

$$\left(A = \sqrt{\frac{J_e}{J_s}}, \quad J_e = \int_{-\infty}^{+\infty} p^\alpha de(\alpha), \quad J_s = \int_{-\infty}^{+\infty} p^\alpha ds(\alpha)\right) \tag{54}$$

Определив теперь $K(\theta)$ как такую функцию, изображением которой является множитель при $\Phi(p)$ в (54), и пользуясь теоремой Бореля, найдем окончательно

$$y(x, t) = \frac{d}{dt}\int_0^t K(t-\theta)\varphi(\theta)\, d\theta$$

и задача будет решена.

Поступила в редакцию
5 VI 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Boltzmann L. Wissenschaftl. Abhandlung. 1874. Bd. 1.
2. Лурье А. И. Операционное исчисление в приложении к задаче механики. ОНТИ. 1932. Стр. 192.
3. Ишлинский А. Ю. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 1. Стр. 80.