

УТОЧНЕННЫЙ МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ЭМПИРИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КРИВЫХ

М. Г. Серебренников

(Москва)

Главным недостатком методов гармонического анализа является их недостаточная точность для практических целей.

Основными формулами гармонического анализа являются так называемые формулы Бесселя, на которых базируются все методы группирования (Рунге, С. Томсона, Гровера, Прентисса, Тейлора и др.), все предложенные до настоящего времени так называемые шаблоны (Германа, Лемана, Ципперера, Тересеси, Лопшица и др.), почти все очень многочисленные графические или аналитические методы (Финстервальдера, Слаби, Роте, Мейсснера и др). Однако по исследованию Л. Джолей^[1] группирование, базировавшееся на формулах Бесселя, дало в среднем следующие отклонения от истинных значений гармоник различных порядков:

Порядок гармоник	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Отклонения (в %)	1	3.5	8	15	23	36	54	80	104

До настоящего времени предложены два метода, ставящие себе специальную цель получения по возможности точных результатов, избегая таких чрезмерно обременительных счетных операций, при помощи которых можно было бы получить достаточно точные результаты и обычными способами. Эти методы были предложены А. Н. Крыловым и В. Делленбахом.

А. Н. Крылов^[2] отказывается от применения формул Бесселя и, исходя из точных значений интегралов, определяющих коэффициенты Фурье, сводит определение этих коэффициентов к механическим квадратурам интегралов типа

$$\alpha_k = \int_0^{2\pi} f(x) \sin^k x \cos^{\mu-k} x dx$$

Однако приближенное определение этих интегралов требует в свою очередь затраты большой вычислительной работы^[3].

В. Делленбах дает следующие формулы, уточняющие результаты, получаемые при применении формулы Бесселя, причем данная кривая аппроксимируется ломаной линией, проходящей через вершины эквидистантных ординат:

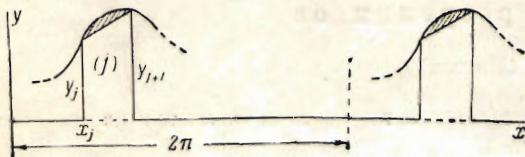
$$A_\mu \leq kA_\mu^* + |\eta|, \quad B_\mu \leq kB_\mu^* + |\eta|, \quad k = \left(\frac{\nu}{\pi\mu} \sin \frac{\pi\mu}{\nu} \right)^2$$

где μ — порядок определяемой гармоники, A_μ^* и B_μ^* — значения косинусного и синусного коэффициентов, получаемые применением формул Бесселя, A_μ и B_μ — точные значения этих же коэффициентов, 2ν — число эквидистантных делений периода кривой, $|\eta|$ — среднее значение абсолютного отклонения кривой от аппроксимирующей ломаной за целый период.

При сравнительно плавной кривой и значительном числе эквидистантных ординат можно принять $A_\mu \approx kA_\mu^*$, $B_\mu \approx kB_\mu^*$. Однако при резко меняющейся кривой значением $|\eta|$ пренебрегать нельзя, вследствие чего применение поправочного коэффициента k становится нецелесообразным.

Ниже приводится предлагаемый автором другой метод уточнения результатов гармонического анализа эмпирических кривых.

1. Пусть дана некоторая эмпирическая периодическая кривая, не имеющая ни разрывов ни переломов, что встречается на практике в большинстве случаев. Взяв в пределах периода кривой, принимаемого равным 2π , 2ν эквидистантных ординат $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2\nu-1}, y_{2\nu} = y_0$ и проведя через вершины этих ординат аппроксимирующую ломаную линию, разложим эту ломаную на составляющие гармоники



Фиг. 1.

и участка оси абсцисс от x_{j+1} до 2π , а затем разложить эту ломаную на гармоники (фиг. 1). Для косинусного и синусного коэффициентов порядка μ получим

$$A_{\mu j} = \frac{1}{\pi\mu} (y_{j+1} \sin \mu x_{j+1} - y_j \sin \mu x_j) + \frac{1}{\pi\mu^2 x} (y_{j+1} - y_j) (\cos \mu x_{j+1} - \cos \mu x_j)$$

$$B_{\mu j} = \frac{1}{\pi\mu} (y_{j+1} \cos \mu x_{j+1} - y_j \cos \mu x_j) + \frac{1}{\pi\mu^2 x} (y_{j+1} - y_j) (\sin \mu x_{j+1} - \sin \mu x_j)$$

где $x = \pi / \nu = x_{j+1} - x_j$.

Меняя j от 0 до $2\nu - 1$ и складывая результаты, получаем коэффициенты Фурье для всей аппроксимирующей ломаной

$$A_\mu^* = \frac{1}{\pi\mu} \sum_{j=0}^{2\nu-1} (y_{j+1} \sin \mu x_{j+1} - y_j \sin \mu x_j) + \frac{1}{\pi\mu^2 x} \sum_{j=0}^{2\nu-1} (y_{j+1} - y_j) (\cos \mu x_{j+1} - \cos \mu x_j) \quad (1.1)$$

$$B_\mu^* = \frac{1}{\pi\mu} \sum_{j=0}^{2\nu-1} (y_{j+1} \cos \mu x_{j+1} - y_j \cos \mu x_j) + \frac{1}{\pi\mu^2 x} \sum_{j=0}^{2\nu-1} (y_{j+1} - y_j) (\sin \mu x_{j+1} - \sin \mu x_j)$$

Значения A_μ^* и B_μ^* определяют искомые коэффициенты лишь в первом приближении.

Уточнения результатов можно получить, если рассмотреть в отдельности участки данной кривой, рассматриваемые проведенными ординатами. Занумеруем эти участки кривой и соответствующие полосы от 0 до $2\nu - 1$ и рассмотрим участок $j + 1$, находящийся в интервале оси x от $x_{j+1} = (j + 1)a$ до $x_{j+2} = (j + 2)a$, где $a = \pi / \nu$. Отложим на этом участке от оси x по ординатам отрезки η , равные отрезкам, заключенным между кривой этого же участка и соответствующей хордой проведенной аппроксимирующей ломаной линией. В результате получим кривую $\eta = \eta(x)$, которую будем называть «приведенной кривой» участка (фиг. 2).

Очевидно, что, заменяя заданную кривую участка соответствующей хордой, мы пренебрегаем всеми гармониками приведенной кривой участка. Поэтому, если уточнить значения коэффициентов Фурье (1.1), то к этим значениям надо добавить значения коэффициентов, получающихся при разложении совокупности приведенных кривых для всех участков на протяжении целого периода. Приближенные значения этих коэффициентов можно получить следующим образом.

Определим сначала уравнение приведенной кривой $\eta = \eta(x)$, если задано уравнение данной кривой $y = f(x)$. Тогда при обозначениях, приведенных на фиг. 2, будем, очевидно, иметь для j -й полосы

$$\operatorname{tg} \beta_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{x}$$

$$\frac{y - y_j}{x - x_j} = \frac{y_{j+1} - y_j}{x} = \operatorname{tg} \beta_j$$

$$y = y_j + (x - x_j) \operatorname{tg} \beta_j, \quad \eta = Y - y_j$$

Поэтому уравнение приведенной кривой имеет следующий вид:

$$\eta = f(x) - y_j - (x - x_j) \operatorname{tg} \beta_j \quad (1.2)$$

2. Для дальнейшего докажем теорему.

Теорема I. Тангенс угла наклона с осью x касательной к приведенной кривой в какой-либо ее точке равняется разности тангенса угла наклона касательной, проведенной к заданной кривой через соответствующую точку, и тангенса угла наклона хорды рассматриваемого участка кривой.

Действительно, взяв производную от (1.2), получим

$$\frac{d\eta}{dx} = f'(x) - \operatorname{tg} \beta_j$$

или

$$\operatorname{tg} \gamma_j = \operatorname{tg} \varepsilon_j - \operatorname{tg} \beta_j \quad (2.1)$$

где ε_j и γ_j указаны на фиг. 3.

Теорема II. Разрыв первой производной функции, представляющей приведенную кривую, в какой-либо точке ее перелома равняется разности, взятой с обратным знаком, тангенсов углов наклона хорд, находящихся по обеим сторонам от ординаты, проходящей через эту точку.

Проведем к приведенной кривой j -го участка две касательные в точках x_j и x_{j+1} и обозначим углы наклона этих касательных через γ_j' и γ_j'' ; углы наклона аналогичных касательных, проведенных к приведенной кривой следующего участка, обозначим через γ_{j+1}' и γ_{j+1}'' и т. д. (фиг. 4). Проведем далее касательную к заданной кривой, проходящую через вершину ординаты y_{j+1} , и обозначим угол наклона этой касательной через ε_{j+1} . Тогда на основании равенства (2.1) имеем

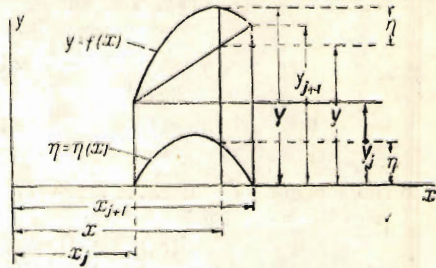
$$\operatorname{tg} \gamma_{j+1}' = \operatorname{tg} \varepsilon_{j+1} - \operatorname{tg} \beta_{j+1}$$

$$\operatorname{tg} \gamma_{j+1}'' = \operatorname{tg} \varepsilon_{j+1} - \operatorname{tg} \beta_j$$

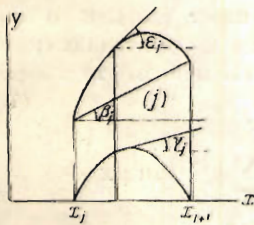
Отсюда получаем

$$\operatorname{tg} \gamma_{j+1}' - \operatorname{tg} \gamma_{j+1}'' = -(\operatorname{tg} \beta_{j+1} - \operatorname{tg} \beta_j) \quad (2.2)$$

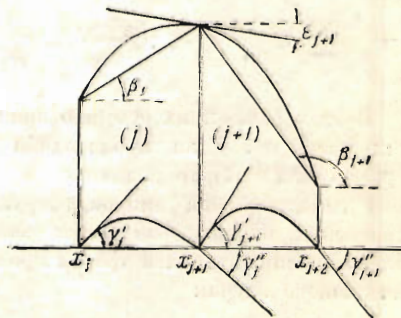
Левая часть последнего равенства равняется разрыву первой производной функции (1.2) в точке x_{j+1} .



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

3. Заменяем приведенную кривую интервала $j+1$ параболой третьего порядка, также проходящей через точки x_{j+1} и x_{j+2} и имеющей в этих точках те же касательные, что и приведенная кривая; эти касательные образуют с положительным направлением оси x углы γ_{j+1}' и γ_{j+1}'' .

Если взять начало абсцисс для аппроксимирующей кривой в точке x_{j+1} , то уравнение этой кривой будет иметь вид

$$y = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 \quad (3.1)$$

Здесь $\xi = x - (j+1)\alpha$. Так как

$$\begin{aligned} y=0, \quad \frac{dy}{d\xi} &= \operatorname{tg} \gamma_{j+1}' & \text{при } \xi=0 \\ y=0, \quad \frac{dy}{d\xi} &= \operatorname{tg} \gamma_{j+1}'' & \text{при } \xi=\alpha \end{aligned}$$

то легко найдем ($j=1, 2, \dots, 2\nu-1$):

$$(c_0)_{j+1} = 0, \quad (c_1)_{j+1} = \operatorname{tg} \gamma_{j+1}' \quad (3.2)$$

$$(c_2)_{j+1} = -\frac{1}{\alpha} (\operatorname{tg} \gamma_{j+1}'' + 2 \operatorname{tg} \gamma_{j+1}'), \quad (c_3)_{j+1} = +\frac{1}{\alpha^2} (\operatorname{tg} \gamma_{j+1}'' + \operatorname{tg} \gamma_{j+1}') \quad (3.3)$$

4. Для того чтобы разложить всю аппроксимирующую кривую на составляющие гармоники, применим метод разложения по разрывам функции и ее производных, предложенный Иглем [5].

Если данная функция в каких-либо точках x_1, x_2, \dots имеет разрывы со скачками $\delta_1, \delta_2, \dots$, а ее первая производная имеет в этих или в других точках скачки $\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \dots$, ее вторая производная — скачки $\delta_1^{(2)}, \delta_2^{(2)}, \dots$ и т. д., то коэффициенты Фурье μ -го порядка определяются равенствами

$$\begin{aligned} \pi A_\mu &= -\frac{1}{\mu} \sum_i \delta_i \sin \mu x_i - \frac{1}{\mu^2} \sum_i \delta_i^{(1)} \cos \mu x_i + \frac{1}{\mu^3} \sum_i \delta_i^{(2)} \sin \mu x_i + \\ &+ \frac{1}{\mu^4} \sum_i \delta_i^{(3)} \cos \mu x_i - \dots \pm \frac{1}{\mu^{k+1}} \sum_i \delta_i^{(k)} \frac{\sin \mu x_i}{\cos \mu x_i} \pm \frac{1}{\mu^{k+1}} \int f^{(k+1)}(x) \frac{\sin \mu x}{\cos \mu x} dx \\ \pi B_\mu &= +\frac{1}{\mu} \sum_i \delta_i \cos \mu x_i - \frac{1}{\mu^2} \sum_i \delta_i^{(1)} \sin \mu x_i - \frac{1}{\mu^3} \sum_i \delta_i^{(2)} \cos \mu x_i + \\ &+ \frac{1}{\mu^4} \sum_i \delta_i^{(3)} \sin \mu x_i + \dots \pm \frac{1}{\mu^{k+1}} \sum_i \delta_i^{(k)} \frac{\cos \mu x_i}{\sin \mu x_i} \mp \frac{1}{\mu^{k+1}} \int f^{(k+1)}(x) \frac{\cos \mu x}{\sin \mu x} dx \end{aligned}$$

В этих равенствах суммирование производится по всем точкам соответствующих разрывов. Если производная порядка k кусочно-постоянна, то интегралы в равенствах (4.1) пропадают.

Рассматриваемая аппроксимирующая кривая, состоящая из последовательных кубических парабол, не имеет разрывов, так что $\delta_i=0$. Разрывы будут иметь только первая, вторая и третья производные, так что из равенств (4.1) будем иметь для данного случая

$$\begin{aligned} \pi a_\mu &= -\frac{1}{\mu^2} \sum_i \delta_i^{(1)} \cos \mu x_i + \frac{1}{\mu^3} \sum_i \delta_i^{(2)} \sin \mu x_i + \frac{1}{\mu^4} \sum_i \delta_i^{(3)} \cos \mu x_i \\ \pi b_\mu &= -\frac{1}{\mu^2} \sum_i \delta_i^{(1)} \sin \mu x_i - \frac{1}{\mu^3} \sum_i \delta_i^{(2)} \cos \mu x_i + \frac{1}{\mu^4} \sum_i \delta_i^{(3)} \sin \mu x_i \end{aligned} \quad (4.2)$$

Определим эти разрывы в точке x_{j+1} . Скачок первой производной в точке x_{j+1} определяется непосредственно равенством (2.2), так что

$$\delta_{j+1}^{(1)} = \operatorname{tg} \gamma_{j+1}' - \operatorname{tg} \gamma_{j+1}'' = \operatorname{tg} \beta_j - \operatorname{tg} \beta_{j+1} \quad (4.3)$$

Для определения скачка второй производной в точке x_{j+1} имеем

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = 2c_2 + 6c_3 \xi, \quad \left(\frac{d^2 y}{d\xi^2}\right)''_j = 2(c_2)_j + 6(c_3)_j \alpha, \quad \left(\frac{d^2 y}{d\xi^2}\right)'_{j+1} = 2(c_2)_{j+1}$$

Следовательно, для искомого скачка, учитывая равенства (3.2) и (2.1), имеем

$$\begin{aligned} \delta_{j+1}^{(2)} &= \left(\frac{d^2 y}{d\xi^2}\right)'_{j+1} - \left(\frac{d^2 y}{d\xi^2}\right)''_j = 2(c_2)_{j+1} - 2(c_2)_j - 6(c_3)_j \alpha = \\ &= -\frac{2}{\alpha} (\operatorname{tg} \gamma_{j+1}'' + 2\operatorname{tg} \gamma_{j+1}') + \frac{2}{\alpha} (\operatorname{tg} \gamma_j'' + 2\operatorname{tg} \gamma_j') - \frac{6}{\alpha} (\operatorname{tg} \gamma_j'' + \operatorname{tg} \gamma_j') = \\ &= -\frac{1}{\alpha} [2(\operatorname{tg} \varepsilon_j + 4\operatorname{tg} \varepsilon_{j+1} + \operatorname{tg} \varepsilon_{j+2}) - 6(\operatorname{tg} \beta_j + \operatorname{tg} \beta_{j+1})] \end{aligned} \quad (4.4)$$

$(j=0, 1, 2, \dots, 2\nu-1)$

Для определения скачка третьей производной в точке x_{j+1} , учитывая равенства (3.2), имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^3 y}{d\xi^3}\right)''_j &= 6(c_3)_j, \\ \left(\frac{d^3 y}{d\xi^3}\right)'_{j+1} &= 6(c_3)_{j+1} \\ \delta_{j+1}^{(3)} &= \left(\frac{d^3 y}{d\xi^3}\right)'_{j+1} - \left(\frac{d^3 y}{d\xi^3}\right)''_j = 6[(c_3)_{j+1} - (c_3)_j] = \\ &= \frac{6}{\alpha^2} (\operatorname{tg} \gamma_{j+1}'' + \operatorname{tg} \gamma_{j+1}' - \operatorname{tg} \gamma_j'' - \operatorname{tg} \gamma_j') = \\ &= \frac{6}{\alpha^2} [2\operatorname{tg} \beta_j - \operatorname{tg} \beta_{j+1} - (\operatorname{tg} \varepsilon_j - \operatorname{tg} \varepsilon_{j+1})] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$(j=0, 1, 2, \dots, 2\nu-1)$

Подставляя значения (4.3), (4.4) и (4.5) в равенства (4.2), найдем

$$\begin{aligned} a_\mu &= -\frac{1}{\pi \mu^2} \sum_{j=0}^{2\nu-1} (\operatorname{tg} \beta_j - \operatorname{tg} \beta_{j+1}) \cos \mu x_j - \frac{\nu}{\mu^3 \pi^2} \sum_{j=0}^{2\nu-1} [2(\operatorname{tg} \varepsilon_j + 4\operatorname{tg} \varepsilon_{j+1} + \operatorname{tg} \varepsilon_{j+2}) - \\ &- 6(\operatorname{tg} \beta_j + \operatorname{tg} \beta_{j+1})] \sin \mu x_j + \frac{6\nu^2}{\mu^4 \pi^3} \sum_{j=0}^{2\nu-1} [2(\operatorname{tg} \beta_j - \operatorname{tg} \beta_{j+1}) - (\operatorname{tg} \varepsilon_j - \operatorname{tg} \varepsilon_{j+1})] \cos \mu x_j \\ & \quad (4.6) \\ b_\mu &= -\frac{1}{\pi \mu^2} \sum_{j=0}^{2\nu-1} (\operatorname{tg} \beta_j - \operatorname{tg} \beta_{j+1}) \sin \mu x_j + \frac{\nu}{\mu^3 \pi^2} \sum_{j=0}^{2\nu-1} [2(\operatorname{tg} \varepsilon_j + 4\operatorname{tg} \varepsilon_{j+1} + \operatorname{tg} \varepsilon_{j+2}) - \\ &- 6(\operatorname{tg} \beta_j + \operatorname{tg} \beta_{j+1})] \cos \mu x_j + \frac{6\nu^2}{\mu^4 \pi^3} \sum_{j=0}^{2\nu-1} [2(\operatorname{tg} \beta_j - \operatorname{tg} \beta_{j+1}) - (\operatorname{tg} \varepsilon_j - \operatorname{tg} \varepsilon_{j+1})] \sin \mu x_j \end{aligned}$$

Уточненные значения коэффициентов Фурье будут $A_\mu^* + a_\mu$ и $B_\mu^* + b_\mu$.

Как видно из формул (4.6), уточнения a_μ и b_μ , вводимые рассматриваемым методом, зависят исключительно от углов наклона прямолинейных отрезков аппроксимирующей ломаной линии и касательных, проведенных к анализируемой кривой через вершины эквидистантных ординат.

5. Этот уточняющий метод может быть применен и для случая, когда заданы или взяты неэквидистантные ординаты. Методы, базирующиеся на формулах Бесселя, тогда не применимы. В этом случае, введя опять аппроксимирующую ломаную линию, проходящую через вершины взятых ординат, можно применить метод анализа Кригар-Менцеля [6], сводящийся к применению формул

$$A_{\mu}^* = \frac{1}{\mu^2\pi} [(tg \beta_{p-1} - tg \beta_0) \cos \mu x_0 + (tg \beta_0 - tg \beta_1) \cos \mu x_1 + \dots + (tg \beta_{p-2} - tg \beta_{p-1}) \cos \mu x_{p-1}] \quad (5.1)$$

$$B_{\mu}^* = \frac{1}{\mu^2\pi} [(tg \beta_{p-1} - tg \beta_0) \sin \mu x_0 + (tg \beta_0 - tg \beta_1) \sin \mu x_1 + \dots + (tg \beta_{p-2} - tg \beta_{p-1}) \sin \mu x_{p-1}]$$

где p — общее число полос, содержащихся в периоде кривой, β_j — угол наклона хорды j -й полосы, содержащейся в интервале от x_j до x_{j+1} .

Уточняющие вычисления те же, что и выше. Формула (3.2) остается той же, а формулы (3.3) принимают тогда значения

$$(C_2)_{j+1} = -\frac{1}{x_{j+1}} (tg \gamma''_{j+1} + 2tg \gamma'_{j+1}),$$

$$(C_3)_{j+1} = +\frac{1}{x_{j+1}^2} (tg \gamma''_{j+1} + tg \gamma'_{j+1}) \quad (5.2)$$

Разрывы первой, второй и третьей производных дополнительной аппроксимирующей кривой, состоящей из чередующихся кубических парабол, в этом случае будут ($j = 0, 1, 2, \dots, p-1$)

$$\delta_{j+1}^{(1)} = tg \beta_j - tg \beta_{j+1}$$

$$\delta_{j+1}^{(2)} = -\frac{1}{x_j} [2(tg \varepsilon_j + 4tg \varepsilon_{j+1} + tg \varepsilon_{j+2}) - 6(tg \beta_j + tg \beta_{j+1})]$$

$$\delta_{j+1}^{(3)} = 6[(C_3)_{j+1} - (C_3)_j] = 6 \left[\frac{1}{x_{j+1}^2} (tg \gamma''_{j+1} + tg \gamma'_{j+1}) - \frac{1}{x_j^2} (tg \gamma''_j + tg \gamma'_j) \right] =$$

$$= 6 \left\{ \frac{1}{x_{j+1}^2} [(tg \varepsilon_{j+1} + tg \varepsilon_{j+2}) - 2tg \beta_{j+1}] - \frac{1}{x_j^2} [(tg \varepsilon_j + tg \varepsilon_{j+1}) - 2tg \beta_j] \right\}$$

Подставив эти значения в равенства (4.2), мы получим значения a_{μ} и b_{μ} , которые должны быть добавлены попрежнему к значениям A_{μ}^* , B_{μ}^* , определяемые равенствами (5.1), чтобы получить уточненные результаты.

Поступила в редакцию
3 VI 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Jolley L. Alternating Current Rectification and Allied Problems. London. 1928.
2. Крылов А. Н. О вычислении коэффициентов в рядах Фурье. Сбор. трудов. Изд. АН СССР, 1937. Т. V. Стр. 454—458.
3. Христенко В. Гармонический анализ экспериментальных аналитических функций Томск. 1937.
4. Dällenbach W. Verschärftes rechnerisches Verfahren der harmonischen Analyse. Archiv für Elektrotechnik. 1921. Bd. X. S. 277—282.
5. Eagle A. A Practical Treatise on Fourier's Theorem and Practical Harmonic Analysis. London. 1925.
6. Krigar-Menzel O. Annalen der Physik und der Chemie (Wiedemannsche Annalen). 1893. Bd. XLIX. S. 545.