Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

О ПРИМЕНЕНИИ ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТОК ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

П. П. Юшков

(Ленинград)

1. Пусть в системе координат xy имеется некоторая область D, ограниченная замкнутым контуром L. Требуется найти интеграл дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{1.1}$$

удовлетворяющий граничному условию первого рода (т. е. на контуре L значения функции $u = f(t, s)$ известны) и начальному условию $u(x, y, 0) = \varphi(x, y)$.

В дальнейшем предполагается существование непрерывных производных всех входящих в наши рассуждения функций до того порядка, какой будет требоваться.

Нанесем на области D сетку прямоугольного или какого-либо другого типа и отметим контур L', наилучшим образом приближающийся к истинному конту у L.

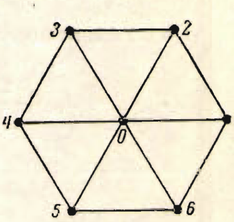
В интересной работе[1] Ш. Е. Микеладзе изучает применение квадратной сетки для численного интегрирования уравнения (1.1). Он выводит простую формулу (78) для значений функции $u(x, y, t)$ с погрешностью не ниже второго порядка малости относительно h, где h означает длину стороны квадрата сетки (стр. 85—90). Другая формула (стр. 91—93) дает погрешность не ниже h^4.

2. В случае применения треугольных сеток[1] для численного интегрирования (1.1) можно получить также формулы весьма простого вида.

Если через x и y обозначить координаты точки (фиг. 1), помеченной цифрой 0, то координаты точек, помеченных цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, будут соответственно

$$(x+h,\ y),\ \left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{h\sqrt{3}}{2}\right),\quad \left(x-\frac{h}{2},\ y+\frac{h\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(x-h,\ y),\quad \left(x-\frac{h}{2},\ y-\frac{h\sqrt{3}}{2}\right),\quad \left(x+\frac{h}{2},\ y-\frac{h\sqrt{3}}{2}\right)$$



Фиг. 1.

где h означает длину стороны правильного треугольника.

Обозначим через u_{ni} точное, а через U_{ni} приближенное значения интеграла уравнения (1.1) в узле, отмеченном цифрой n в момент $t = il$ (где l — шаг по оси t), и докажем теорему.

Теорема. Погрешность при применением формулы

$$U_{0i+1} = \left(1 - \frac{4a^2 l}{h^2}\right) U_{0i} + \frac{2a^2 l}{3h^2} (U_{1i} + U_{2i} + U_{3i} + U_{4i} + U_{5i} + U_{6i}) \tag{2.1}$$

при любых l и h, удовлетворяющих условию $l \leqslant h^2 / 4a^2$, будет не ниже второго порядка малости относительно h, а в единственном случае при $l = h^2 / 8a^2$, погрешность будет не ниже h^4. В этом случае формула (2.1) будет

$$U_{0i+1} = \frac{1}{2} U_{0i} + \frac{1}{12} (U_{1i} + U_{2i} + U_{3i} + U_{4i} + U_{5i} + U_{6i}) \tag{2.2}$$

Одновременно доказывается сходимость процесса.

---

[1] Сетки треугольного типа впервые начал изучать С. А, Гершгорин[2] при численном интегрировании уравнений Лапласа и Пуассона.

Доказательство проведем, следуя Ш. Е. Микеладзе[1]. Применяя формулу Тэйлора, получим шесть разложений

$$u_{ki}=u_{0i}\pm h\,\frac{\partial u_{0i}}{\partial x}+\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 u_{0i}}{\partial x^2}\pm\frac{h^3}{6}\frac{\partial^3 u_{0i}}{\partial x^3}+\frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 u_{0i}}{\partial x^4}\pm\ldots \qquad (k=1 \text{ и } 4)$$

$$u_{ki}=u_{0i}+h\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{0i}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_{0i}+$$
$$+\frac{h^3}{6}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3u_{0i}+\ldots \qquad (k=2 \text{ и } 6)$$

$$u_{ki}=u_{0i}+h\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)u_{0i}+\frac{h^2}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u_{0i}+$$
$$+\frac{h^3}{6}\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\partial}{\partial y}\right)^3u_{0i}+\ldots \qquad (k=3 \text{ и } 5)$$

Складывая все эти равенства, после преобразований получим зависимость

$$\sum_{n=1}^{6}u_{ni}=6u_{0i}+\frac{3h^2}{2}\triangle u_{0i}+\frac{9}{4}\frac{h^4}{4!}\triangle\triangle u_{0i}+O(h^6) \qquad (2.3)$$

в которой введены обозначения

$$\triangle u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \triangle\triangle u=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

Кроме того, очевидно, что

$$u_{0i+1}=u_{0i}+l\frac{\partial u_{0i}}{\partial t}+\frac{l^2}{2}\frac{\partial^2 u_{0i}}{\partial t^2}+\frac{l^3}{6}\frac{\partial^3 u_{0i}}{\partial t^3}+\ldots \qquad (2.4)$$

Из формул (2.3) и (2.4) находим

$$\triangle u_{0i}=\frac{2}{3h^2}\left(\sum_{n=1}^{6}u_{ni}-6u_{0i}\right)+\varepsilon_{0i}^{(2)}, \qquad \frac{\partial u_{0i}}{\partial t}=\frac{u_{0i+1}-u_{0i}}{l}+\varepsilon_{0i}^{(1)} \qquad (2.5)$$

где

$$\varepsilon_{0i}^{(2)}=-\frac{h^2}{16}\triangle\triangle u_{0i}+O(h^4), \qquad \varepsilon_{0i}^{(1)}=-\frac{l}{2}\frac{\partial^2 u_{0i}}{\partial t^2}+O(l^2) \qquad (2.6)$$

Подставляя значения (2.5) в уравнение (1.1), получим

$$u_{0i+1}=u_{0i}+\frac{2a^2l}{3h^2}\left(\sum_{n=1}^{6}u_{ni}-6u_{0i}\right)+lR_{0i} \qquad (R_{0i}=a^2\varepsilon_{0i}^{(2)}-\varepsilon_{0i}^{(1)}) \qquad (2.7)$$

Отсюда, принимая во внимание (2.6), имеем

$$R_{0i}=-\frac{a^2h^2}{16}\triangle\triangle u_{0i}+\frac{l}{2}\frac{\partial^2 u_{0i}}{\partial t^2}+O(h^4)$$

Но из уравнения (1.1) следует, что $\partial^2 u/\partial t^2=a^4\triangle\triangle u$, поэтому

$$R_{0i}=\frac{a^2}{2}\left(-\frac{h^2}{8}+la^2\right)\triangle\triangle u_{0i}+O(h^4) \qquad (2.8)$$

Так как порядок l будет такой же, как и h^2, то R_{0i} будет не ниже второго порядка малости относительно h, а поэтому можно положить $|R_{0i}|<A\omega$, где ω будет второго порядка малости относительно h и $A>0$ не зависит от h.

Если в формуле (2.7) пренебречь величиной lR_{0i}, то получится формула

$$U_{0i+1}=\left(1-\frac{4a^2l}{h^2}\right)U_{0i}+\frac{2a^2l}{3h^2}\sum_{n=1}^{6}U_{ni} \qquad (2.9)$$

в которой U_{ni} означает приближенное значение u в узле сетки, отмеченной цифрой n в момент времени $t=il$.

Оценим величину разности $\xi_{0i}=u_{0i}-U_{0i}$. Вычитая (2.9) из (2.7), получим

$$\xi_{0i+1}=\left(1-\frac{4a^2l}{h^2}\right)\xi_{0i}+\frac{2a^2l}{3h^2}\sum_{n=1}^{6}\xi_{ni}+lR_{0i} \tag{2.10}$$

Обозначим через δ_i число, не меньшее наибольшего значения абсолютной величины ξ во всех узлах слоя $t=il$. Тогда, получим

$$|\xi_{0i+1}|<\delta_i+Al\omega \tag{2.11}$$

Поэтому

$$|\xi_{01}|<\delta_0+Al\omega=\delta_1,$$
$$|\xi_{02}|<\delta_1+Al\omega=\delta_0+2Al\omega=\delta_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|\xi_{0i}|<\delta_0+iAl\omega=\delta_0+AT\omega$$

где T — конечное число.

Если контур L' совпадает с контуром L, то, имея вычисленными значения функции $\varphi(x, y)$ в узлах сетки с достаточной точностью, можно предположить, что δ_0 достаточно мало. Полагая, что δ_0 не ниже второго порядка малости относительно h, будем иметь, что $|\xi_{0i}|<Bh^2$, где $B>0$ и не зависит от h.

Таким образом, доказано, что при сделанных предположениях формула (2.1) доставляет погрешность порядка не ниже h^2. Одновременно доказана сходимость процесса, так как при $h\to 0$ имеем $\xi_{0i}\to 0$.

Из формулы (2.1) получается важный частный случай. При условии $l=h^2/8a^3$ первое слагаемое равенства (2.8) обратится в нуль и R_{0i} будет уже четвертого порядка малости относительно h. Предполагая при этом, что δ_0 будет не ниже четвертого порядка малости, получим, что при условии $l=h^3/8a^2$ формула (2.1) принимает вид (2.2) и дает погрешность не ниже четвертого порядка малости.

Замечание. Для случая, когда контур L' не совпадает с L, нужно повторить дословно те рассуждения, которые приведены в книге Ш. Е. Микеладзе [1] (стр. 88) для квадратных сеток. В 1941 г. Ш. Е. Микеладзе [3] дал разностные способы, позволяющие находить значения функции в точках контура L' по сравнительно простым формулам и с большою степенью точности.

3. Применим формулу (2.2) к решению следующей задачи.

Задача. Шестигранная железная призма, сторона основания которой равна 4.4 см, погружается в ледяную ванну. Начальная температура всех точек призмы равна 100°. Высоту призмы считаем достаточно большой. Определить тепловое состояние поперечного сечения призмы в последующие моменты времени.

Решение. Если окружающей средою является тающий лед, то коэффициент теплоотдачи $\alpha=\infty$ и, следовательно, мы должны решать задачу при краевых условиях первого рода (т. е. на поверхности призмы поддерживается температура, равная нулю). Для железа коэффициент температуропроводности $a^2=0.11$ см²/сек, и, следовательно, задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=0.11\,\Delta u$$

при указанных начальных и граничных условиях.

Возьмем $h=1.1$ см; по формуле $l=h^2/8a^2$ будет $l=1.375$ сек. Для вычислений удобно пользоваться вспомогательными формулами, вытекающими из формулы (2.2).

$$a_1=\frac{a}{2}+\frac{2b+c}{12},\quad b_1=\frac{b}{2}+\frac{a+b+c+d}{12},\quad c_1=\frac{c}{2}+\frac{a+2b+2d+e}{12}$$

$$d_1=\frac{d}{2}+\frac{b+c+e}{6},\quad e_1=\frac{e}{2}+\frac{c+2d+2e+f}{12},\quad f_1=\frac{f+e}{2}$$

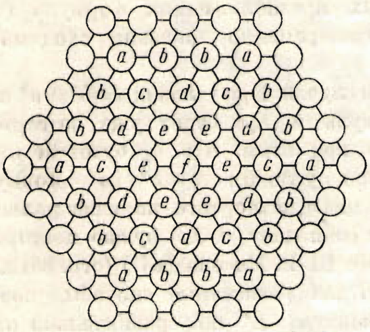
в которых через a, b, c, d, e, f обозначена температура точек сечения (фиг. 2) в момент времени $t=il$, а через a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 — температура тех же точек сечения в момент времени $t=il+l$. Приведем результаты вычислений:

	a	b	c	d	e	f
$t=1.375$	75	83.33	100	100	100	100
2.75	59.72	71.53	95.14	97.22	100	100
4.125	47.71	62.74	89.01	93.06	99.13	100
5.5	42.73	55.91	82.88	88.34	97.35	99.57
6.875	37.59	50.45	77.16	83.53	94.83	98.46
8.25	33.64	45.96	71.95	78.84	91.78	94.64

Эти вычисления можно продолжить как угодно далеко. При этом заметим, что вообще при применении метода сеток к решению задач нестационарного теплового состояния для получения малой погрешности нужно брать шаг l по оси t достаточно малым. Так например, в задачах, приведенных у Ш. Е. Микеладзе [1] (на стр. 90 и 92), l равнялось соответственно 0.03 и 0.08, а в задаче, решенной Д. Ю. Пановым [4], $l=0.01$.

В приведенном здесь примере для сокращения объема вычислений h, а следовательно, и l взяты большими; в связи с этим можно ожидать, что абсолютная погрешность вычисленных значений не будет малой.

Вычислим абсолютную погрешность в узле сетки, отмеченной буквою c, в момент $t=5.5$. По принципу Рунге (см. Д. Ю. Панов [5] стр. 24.)



Фиг. 2.

$$u \approx U_h + \frac{U_h - U_{2h}}{2^\lambda - 1} \tag{3.1}$$

Здесь U_h и U_{2h} — приближенные значения величины u, вычисленные соответственно при шагах h и $2h$, а λ — порядок погрешности, доставляемой приближенной формулой.

В нашем случае при удвоенном шаге $h_1=2h=2.2$ согласно $l=h^2/8a^2$ будем иметь $l_1=5.5$ и по формуле (2.2) получим $U_{2h}=75$.

Следовательно. при $\lambda=4$ из (3.1) получим

$$82.88+\frac{82.88-75}{2^4-1}=83.40$$

т. е. абсолютная погрешность выражается примерно половиной градуса.

Поступила в редакцию
28 II 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Микеладзе Ш. Е. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными. Изд. АН СССР. 1936.
2. Гершгорин С. А. О приближенном интегрировании уравнений Лапласа и Пуассона. Изв. Ленинград. политехнич. ин-та. 1927. Т. XXX.
3. Микеладзе Ш. Е. О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типа. Изв. АН СССР. 1941. Стр. 57—74.
4. Панов Д. Ю. О приближенном численном решении уравнения $\triangle u = a^2\, \partial u / \partial t$. Математический сборник. 1933. Т. XXXX.
5. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Изд. АН СССР. 1938.