Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

О РАЗЛОЖЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ, ЭЛЕМЕНТАМИ КОТОРОГО СЛУЖАТ ПОЛИНОМЫ

Ш. Е. Микеладзе
(Тбилиси)

В работе рассматривается способ разложения определителей вида

$$F(\lambda)=\begin{vmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda)\ldots f_{1n}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda)\ldots f_{2n}(\lambda) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n1}(\lambda) & f_{n2}(\lambda)\ldots f_{nn}(\lambda) \end{vmatrix} \tag{1}$$

где f_{il}—заданные полиномы от переменной λ. Частные случаи этого определителя, когда элементы на главной диагонали $f_{kk}(\lambda)=a_{kk}-\lambda$ или $f_{kk}(\lambda)=a_{kk}+c_{kk}\lambda-\lambda^2$, а остальные будут $f_{kl}(\lambda)=a_{kl}$ или $f_{kl}(\lambda)=a_{kl}+c_{kl}\lambda$, встречаются при изучении колебаний механической системы с n степенями свободы соответственно без учета и с учетом сил сопротивления (вековое уравнение). Эти определители А. Н. Крылов [1] преобразовал так, что в первом столбце находятся степени неизвестного λ, а все остальные элементы численные и, следовательно, разложение преобразованного определителя по элементам первого столбца становится практически осуществимым.

Наконец, один частный случай определителя (1), а именно случай, когда среди элементов определителя (1) встречаются полиномы первой, второй и третьей степени от λ, рассмотрен нами при изучении вопроса продольного изгиба прямолинейного стержня в пределах упругости [2].

Допустим, что вычислены значения $F(0)$, $F(1)$, ..., $F(k)$, где k есть степень полинома $F(\lambda)$ относительно λ, и составлена таблица разностей $\Delta^m F(0)$ для $m=0,1,\ldots,k$. Эта таблица и формула А. Маркова

$$(-1)^m F^{(m)}(0)=\sum_{\nu=m}^{k}(-1)^\nu\Delta^\nu F(0)\left[D^m\binom{t+\nu-1}{\nu}\right]_{t=0}$$

или

$$F^{(m)}(0)=\sum_{\nu=m}^{k}A_\nu\Delta^\nu F(0)$$

дадут возможность вычислить точные значения производных $F^{(m)}(0)$ $(m=1,2,\ldots,k)$ если, конечно, разности $\Delta^m F(0)$ вычислялись точно. Это следует из того, что остаточный член формулы Маркова обращается в нуль, так как он зависит от $F^{(k+1)}(\xi)$, где k, как было уже отмечено, степень полинома $F(\lambda)$.

Теперь уже легко разложить определитель (1). В самом деле, с помощью формулы Маклорена находим, что

$$F(\lambda)=F(0)+\frac{\lambda}{1!}F'(0)+\frac{\lambda^2}{2!}F''(0)+\ldots+\frac{\lambda^k}{k!}F^{(k)}(0) \tag{2}$$

Нули полинома (2) могут быть вычислены методом Греффе или каким-нибудь другим методом.

Приводим коэффициенты A_ν формулы Маркова, вычисленные для $m=1, 2, \ldots, 20$, что, повидимому, достаточно для задач, которые ставятся практикой. Эти вычисления были проведены под моим руководством Д. А. Кинкладзе в 1942 году:

m = 1. $A_1=1,\quad A_2=-\frac{1}{2},\quad A_3=\frac{1}{3},\quad A_4=-\frac{1}{4},\quad A_5=\frac{1}{5},\quad A_6=-\frac{1}{6};\quad A_7=\frac{1}{7}$

$$A_8=-\frac{1}{8},\quad A_9=\frac{1}{9},\quad A_{10}=-\frac{1}{10},\quad A_{11}=\frac{1}{11},\quad A_{12}=-\frac{1}{12},\quad A_{13}=\frac{1}{13},\quad A_{14}=-\frac{1}{14}$$

$$A_{15}=\frac{1}{15},\quad A_{16}=-\frac{1}{16},\quad A_{17}=\frac{1}{17},\quad A_{18}=-\frac{1}{18},\quad A_{19}=\frac{1}{19},\quad A_{20}=-\frac{1}{20}$$

m = 2. $A_2=1,\quad A_3=-1,\quad A_4=\frac{11}{12},\quad A_5=-\frac{5}{6},\quad A_6=\frac{137}{180},\quad A_7=-\frac{7}{10},\quad A_8=\frac{363}{560}$

$$A_9=-\frac{761}{1260},\quad A_{10}=\frac{7129}{12600},\quad A_{11}=-\frac{671}{1260},\quad A_{12}=\frac{83711}{166320},\quad A_{13}=-\frac{6617}{13860}$$

$$A_{18}=\frac{1145993}{2522520},\quad A_{15}=-\frac{1171733}{2702700},\quad A_{16}=\frac{1195757}{2882880},\quad A_{17}=-\frac{143327}{360360}$$

$$A_{13}=\frac{42142223}{110270160},\quad A_{19}=-\frac{751279}{2042040},\quad A_{20}=\frac{275295799}{775975200}$$

m = 3. $A_3=1,\quad A_4=-\frac{3}{2},\quad A_5=\frac{7}{4},\quad A_6=-\frac{15}{8},\quad A_7=\frac{29}{15},\quad A_8=-\frac{469}{240}$

$$A_9=\frac{29531}{15120},\quad A_{10}=-\frac{1303}{672},\quad A_{11}=\frac{16103}{8400},\quad A_{12}=-\frac{190553}{100800},\quad A_{13}=\frac{128977}{69300}$$

$$A_{14}=-\frac{9061}{4950},\quad A_{15}=\frac{30946717}{17199000},\quad A_{16}=-\frac{39646461}{22422400},\quad A_{17}=\frac{58433327}{33633600}$$

$$A_{18}=-\frac{344499373}{201801600},\quad A_{19}=\frac{784809203}{467812800},\quad A_{20}=-\frac{169704792667}{102918816000}$$

m = 4. $A_4=1,\quad A_5=-2,\quad A_6=\frac{17}{6},\quad A_7=-\frac{7}{2},\quad A_8=\frac{967}{240},\quad A_9=-\frac{89}{20}$

$$A_{10}=\frac{4523}{945},\quad A_{11}=-\frac{7645}{1512},\quad A_{12}=\frac{341747}{64800},\quad A_{13}=-\frac{412009}{75600},\quad A_{14}=\frac{9301169}{1663200}$$

$$A_{15}=-\frac{406841}{71280},\quad A_{16}=\frac{35118025721}{6054048000},\quad A_{17}=-\frac{4446371981}{756756000},\quad A_{18}=\frac{80847323107}{13621608000}$$

$$A_{19}=-\frac{2263547729}{378378000},\quad A_{20}=\frac{32262100943}{5360355000}$$

m = 5. $A_5=1,\quad A_6=-\frac{5}{2},\quad A_7=\frac{25}{6},\quad A_8=-\frac{35}{6},\quad A_9=\frac{1069}{144},\quad A_{10}=-\frac{285}{32}$

$$A_{11}=\frac{31063}{3024},\quad A_{12}=-\frac{139381}{12096},\quad A_{13}=\frac{1148963}{90720},\quad A_{14}=-\frac{355277}{25920},\quad A_{15}=\frac{21939781}{1496880}$$

$$A_{16}=-\frac{2065639}{133056},\quad A_{17}=\frac{2195261857}{134534400},\quad A_{18}=-\frac{371446039969}{21794572800},\quad A_{19}=\frac{27566944753}{1556755200}$$

$$A_{20}=-\frac{31938836201}{1743565824},$$

m = 6. $A_6=1,\quad A_7=-3.\quad A_8=\frac{23}{4},\quad A_9=-9,\quad A_{10}=\frac{3013}{240},\quad A_{11}=-\frac{781}{48},$

$$A_{12}=\frac{242537}{12096},\quad A_{13}=-\frac{48035}{2016},\quad A_{14}=\frac{1666393}{60480},\quad A_{15}=-\frac{22463}{720},\quad A_{16}=\frac{277382447}{7983360},$$

$$A_{17}=-\frac{38101097}{997920},\quad A_{18}=\frac{1356664151597}{32691859200},\quad A_{19}=-\frac{162356544377}{3632428800},\quad A_{20}=\frac{694142313941}{14529715200}$$

$m=7$. $A_7=1,\quad A_8=-\frac{7}{2},\quad A_9=\frac{91}{12},\quad A_{10}=-\frac{105}{8},\quad A_{11}=\frac{4781}{240},\quad A_{12}=-\frac{13321}{480}$

$A_{13}=\frac{314617}{8640},\quad A_{14}=-\frac{790153}{17280},\quad A_{15}=\frac{899683}{16200},\quad A_{16}=-\frac{2271089}{34560},\quad A_{17}=\frac{86853967}{1140480}$

$$A_{18}=-\frac{13195009}{152064},\quad A_{19}=\frac{227663026369}{2335132800},\quad A_{20}=-\frac{2022480780283}{18681062400}$$

$m=8$. $A_8=1,\quad A_9=-4,\quad A_{10}=\frac{29}{3},\quad A_{11}=-\frac{55}{3},\quad A_{12}=\frac{10831}{360},\quad A_{13}=-\frac{897}{20}$

$A_{14}=\frac{944311}{15120},\quad A_{15}=-\frac{35717}{432},\quad A_{16}=\frac{54576553}{518400},\quad A_{17}=-\frac{8424673}{64800},\quad A_{18}=\frac{334947281}{2138400}$

$$A_{19}=-\frac{9764119}{52800},\quad A_{20}=\frac{5013017410969}{23351328000}$$

$m=9$. $A_9=1,\quad A_{10}=-\frac{9}{2},\quad A_{11}=12,\quad A_{12}=-\frac{99}{4},\quad A_{13}=\frac{1747}{40},\quad A_{14}=-\frac{5551}{80}$

$A_{15}=\frac{515261}{5040},\quad A_{16}=-\frac{23915}{168},\quad A_{17}=\frac{76492463}{403200},\quad A_{18}=-\frac{21878439}{89600},\quad A_{19}=\frac{4065163957}{13305600}$

$$A_{20}=-\frac{3975325483}{10644480}$$

$m=10$. $A_{10}=1,\quad A_{11}=-5,\quad A_{12}=\frac{175}{12},\quad A_{13}=-\frac{65}{2},\quad A_{14}=\frac{491}{8},\quad A_{15}=-\frac{2485}{24}$

$A_{16}=\frac{324509}{2016},\quad A_{17}=-\frac{59279}{252},\quad A_{18}=\frac{79243781}{241920},\quad A_{19}=-\frac{11795941}{26880},\quad A_{20}=\frac{6063698587}{10644480}$

$m=11$. $A_{11}=1,\quad A_{12}=-\frac{11}{2},\quad A_{13}=\frac{209}{12},\quad A_{14}=-\frac{1001}{24},\quad A_{15}=\frac{30217}{360},\quad A_{16}=-\frac{1199}{8}$

$$A_{17}=\frac{494351}{2016},\quad A_{18}=-\frac{1513391}{4032},\quad A_{19}=\frac{18843187}{34560},\quad A_{20}=-\frac{367394203}{483840}$$

$m=12$. $A_{12}=1,\quad A_{13}=-6,\quad A_{14}=\frac{41}{2},\quad A_{15}=-\frac{105}{2},\quad A_{16}=\frac{26921}{240},\quad A_{17}=-\frac{6341}{30}$

$$A_{18}=\frac{5490071}{15120},\quad A_{19}=-\frac{976163}{1680},\quad A_{20}=\frac{354467473}{403200}$$

$m=13$. $A_{13}=1,\quad A_{14}=-\frac{13}{2},\quad A_{15}=\frac{143}{6},\quad A_{16}=-65,\quad A_{17}=\frac{35269}{240},\quad A_{18}=-\frac{46631}{160},$

$$A_{19}=\frac{3965533}{7560},\quad A_{20}=-\frac{10596053}{12096}$$

$m=14$. $A_{14}=1,\quad A_{15}=-7,\quad A_{16}=\frac{329}{12},\quad A_{17}=-\frac{238}{3},\quad A_{18}=\frac{136241}{720},\quad A_{19}=-\frac{31521}{80},$

$$A_{20}=\frac{6406481}{8640}$$

$m=15$. $A_{15}=1,\quad A_{16}=-\frac{15}{2},\quad A_{17}=\frac{125}{4},\quad A_{18}=-\frac{765}{8},\quad A_{19}=\frac{11519}{48},\quad A_{20}=-\frac{50255}{96}$

$m=16$. $A_{16}=1,\quad A_{17}=-8,\quad A_{18}=\frac{106}{3},\quad A_{19}=-114,\quad A_{20}=\frac{18017}{60}$

$m=17$. $A_{17}=1,\quad A_{18}=-\frac{17}{2},\quad A_{19}=\frac{119}{3},\quad A_{20}=-\frac{1615}{12}$

$m=18$. $A_{18}=1,\quad A_{19}=-9,\quad A_{20}=\frac{177}{4}$ **$m=19$.** $A_{19}=1,\quad A_{20}=-\frac{19}{2};$

В качестве примера рассмотрим определитель

$$F(\lambda)=\begin{vmatrix} -5.509882-\lambda & 1.870086 & 0.422908 & 0.008814 \\ 0.287865 & -11.811654-\lambda & 5.711900 & 0.058717 \\ 0.049099 & 4.308033 & -12.970687-\lambda & 0.229326 \\ 0.006235 & 0.269851 & 1.397369 & -17.596207-\lambda \end{vmatrix}$$

который приведен А. Н. Крыловым (см. [1] стр. 523).

Приводим значения $F(0), \ldots, F(4)$ и таблицу соответствующих разностей:

λ	$F(\lambda)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
0	12296.55				
		6195.62			
1	18492.17		1895.89		
		8091.51		323.33	
2	26583.68		2219.22		24
		10310.73		347.33	
3	36894.41		2566.55		
		12877.28			
4	49771.69				

Согласно формуле Маркова

$$F'(0)=\Delta F(0)-\frac{1}{2}\Delta^2F(0)+\frac{1}{3}\Delta^3F(0)-\frac{1}{4}\Delta^4F(0)=5349.45$$

$$F''(0)=\Delta^2F(0)-\Delta^3F(0)+\frac{11}{12}\Delta^4F(0)=1594.56$$

$$F'''(0)=\Delta^3F(0)-\frac{3}{2}\Delta^4F(0)=287.33, \qquad F^{(4)}(0)=\Delta^4F(0)=24.$$

Используя полученные значения производных и формулу (2), разложение рассмотренного определителя получим в виде

$$\lambda^4+47.8883\,\lambda^3+797.280\,\lambda^2+5349.45\,\lambda+12296.55$$

Можно убедиться, что для изложенного приема случай кратных корней у функции $F(\lambda)$ не представляется исключительным.

Так, для определителя, приведенного также в работе[1] А. Н. Крылова:

$$F(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

имеем

λ	$F(\lambda)$	Δ	Δ^2	Δ^3
0	4			
		−4		
1	0		6	
		2		−6
2	2		0	
		2		
3	4			

Вычисления дают $F'(0)=-9$, $F''(0)=12$, $F'''(0)=-6$ и, следовательно, искомое разложение имеет вид $4-9\lambda+6\lambda^2-\lambda^3=(1-\lambda)^2(4-\lambda)$.

Поступила в редакцию
25 II 1947

Тбилисский государственный
университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем. Известия Академии Наук СССР. 1931. № 4.

2. Микеладзе Ш. Е. К вопросу продольного изгиба прямолинейных стержней в пределах упругости. Тр. Тбилисского математ. инст. 1943. Т. XII.