Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ

П. В. Мелентьев

(Сталинград)

Ниже рассматриваются из уравнений вида

$$F(z) = z^{2n} + A_1 z^{2n-1} + A_2 z^{2n-2} + \ldots + A_{2n-1} z + A_{2n} = 0 \tag{1}$$

лишь те, корни которых комплексны; отыскание вещественных корней и отделение их не представляет особой трудности и может быть проведено построением графика кривой $y = F(x)$ с уточнением по способу Ньютона или ложного положения.

Пусть одна из пар корней будет $z = \alpha \pm \beta_0 i$. Предположим, что значение α_0 нам известно, и найдем β_0; для этого расположим $F(z)$ по степеням $\zeta = z - \alpha_0$. Имеем

$$F(z) = \Phi(\zeta) = \zeta^{2n} + B_1 \zeta^{2n-1} + B_2 \zeta^{2n-2} + \ldots + B_{2n-1}\zeta + B_{2n} \tag{2}$$

где

$$B_{2n} = \Phi(0) = F(\alpha_0) = \alpha_0^{2n} + A_1 \alpha_0^{2n-1} + \ldots + A_{2n-1}\alpha_0 + A_{2n} \tag{3}$$

$$B_{2n-1} = \Phi'(0) = F'(\alpha_0) = 2n\alpha_0^{2n-1} + A_2(2n-1)\alpha_0^{2n-2} + \ldots + A_{2n-1}$$

$$B_{2n-2} = \frac{\Phi''(0)}{2!} = \frac{F''(\alpha_0)}{2!} = \frac{2n(2n-1)}{2!}\alpha^{2n-2} + \ldots + \frac{2}{2!}A_{2n-2}$$

и т. д. Вычисление коэффициентов B удобно производится по схеме Руффини-Хорнера, применяемой при определении вещественных корней уравнений высоких степеней. Схема имеет вид

$$\begin{array}{c|c|c}
+\begin{matrix}A_1\\ \alpha_0\end{matrix} & & \\ \hline
+\begin{matrix}C_{11}\\ \alpha_0\end{matrix} & +\begin{matrix}A_2\\ C_{11}\alpha_0\end{matrix} & \\ \hline
+\begin{matrix}C_{12}\\ \alpha_0\end{matrix} & +\begin{matrix}C_{21}\\ C_{12}\alpha_0\end{matrix} & +\begin{matrix}A_3\\ C_{21}\alpha_0\end{matrix} \\ \hline
C_{13} & +\begin{matrix}C_{22}\\ C_{13}\alpha_0\end{matrix} & +\begin{matrix}C_{31}\\ C_{33}\alpha_0\end{matrix} \\ \hline
 & C_{33} & +\begin{matrix}C_{32}\\ C_{23}\alpha_0\end{matrix} \\ \hline
 & & C_{33}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
+\begin{matrix}A_{2n-1}\\ C_{2n-1,1}\alpha_0\end{matrix} & \\ \hline
+\begin{matrix}C_{2n-1,1}\\ C_{1n-1,2}\alpha_0\end{matrix} & +\begin{matrix}A_{2n}\\ C_{2n-1,1}\alpha_0\end{matrix} \\ \hline
B_{n-1} & B_{2n}
\end{array}$$

. . . .

$$\begin{array}{c|c|c}
 & & +\begin{matrix}C_{3,2n-2}\\ C_{2,2n-2}\alpha_0\end{matrix} \\ \hline
 & +\begin{matrix}C_{2,2n,-2}\\ C_{2,2n-1}\alpha_0\end{matrix} & B_3 \\ \hline
+\begin{matrix}C_{1,2n-1}\\ \alpha_0\end{matrix} & B_2 & \\ \hline
B_1 & &
\end{array}$$

Получение чисел в клетках схемы определяется правилом

$$C_{km} + C_{k-1,\, m+1}\alpha_0 = C_{k,m-1}$$

Согласно (2), пользуясь тем, что $z = x_0 \pm \beta_0$ есть корень уравнения (1), а также тем, что $\zeta = z - \alpha_0$, имеем $\Phi(\beta_0 i) = 0$, т. е.

$$B_{2n} - B_{2n-2}\beta_0^2 + B_{2n-4}\beta_0^4 - \ldots + (-1)^n\beta_0^{2n} +$$
$$+ i\beta_0 [B_{2n-1} - B_{2n-3}\beta_0^2 + B_{2n-5}\beta_0^4 - \ldots + (-1)^{n-1} B_1\beta_0^{2n-2}] = 0 \qquad (5)$$

Отсюда, вводя обозначение $-\beta_0^2 = u_0$, получим

$$P_n = u_0^n + B_2 u_0^{n-1} + B_4 u^{n-2} + \ldots + B_{2n} = 0$$
$$P_{n-1} = B_1 u_0^{n-1} + B u_0^{0n-2} + \ldots + B_{2n-1} = 0 \qquad (6)$$

Из (6) легко найти искомое значение u_0. Деля P_n на P_{n-1} до получения остатка степени $n-2$, получим

$$P_n = (q_1 u_0 + q_2) P_{n-1} + P_{n-2} \qquad (7)$$

причем очевидно, что и $P_{n-2} = 0$. Далее, деля P_{n-1} на P_{n-2} до получения остатка степени $n-3$ и так далее, мы получим последовательно

$$P_{n-1} = (q_3 u_0 + q_4) P_{n-2} + P_{n-3}, \qquad P_1 = r_1 u_0 + r_2$$
$$P_{n-2} = (q_5 u_0 + q_6) P_{n-3} + P_{n-4}, \qquad P_0 = 0 \qquad (8)$$

где все остатки P_{n-3}, P_{n-4}, ..., и т. д. равны нулю. Отсюда получим

$$u_0 = -\frac{r_2}{r_1}, \qquad \beta_0 = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \qquad (9$$

причем $P_0 = 0$ подтвердит правильность вычислений.

Рассмотрим ход решения уравнения (1) в случае, когда α_0 неизвестно. Беря некоторое, начальное, приближение α (в интервале $(-\sqrt[2n]{A_{2n}}, +\sqrt[2n]{A_{2n}})$ должно быть по крайней мере одно искомое значение α_0) и вычисляя для $\zeta = z + \alpha$ коэффициенты $b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ полинома

$$\Phi(\zeta) = \zeta^{2n} + b_1\zeta^{2n-1} + \ldots + b_{2n-1}\zeta + b_{2n} \qquad (10)$$

получим полиномы

$$P_n = u^n + b_2 u^{n-1} + \ldots, \qquad P_{n-1} = b_1 u^{n-1} + b_3 u^{n-2} + \ldots \qquad (11)$$

а затем понижением степени при помощи деления получим $P_{n-2}, P_{n-3}, \ldots, P_1, P_0$.

Поскольку при $\alpha_0 \neq \alpha$ будет $P_n \neq 0$ и $P_{n-1} \neq 0$, то и в результате имеем $P_0 \neq 0$.

Если для различных значений α получим значения $P_0(\alpha)$ и через точки $(\alpha, P_0(\alpha))$ проведем плавную кривую, то те точки, в которых эта кривая пересечет ось абсцисс, и дадут искомые n значений величины α_0.

Из вышеизложенного видно, что и при комплексных корнях имеется возможность разыскивать корни подбором по одной переменной. Последовательные приближения нужно вести по способу ложного положения, сводящемуся к следующему.

Пусть для приближений порядка s и $s+1$ значения α равны α_s и α_{s+1}; значения P_0 равны $P_{0,s}$ и $P_{0,s+1}$. Для приближения α_{s+2} можно написать соотношение

$$\alpha_{s+3} = \alpha_{s+1} + (\alpha_{s+1} - \alpha_s)\frac{P_{0,s+1}}{P_{0,s} - P_{0,s+1}}, \text{ или } \Delta_{s+2} = \Delta_{s+1}\frac{P_{0,s+1}}{P_{0,s} - P_{0,s+1}} \qquad (12)$$

Здесь в последнем равенстве введено обозначение $\alpha_{t+1} - \alpha_t = \Delta_{t+1}$.

Поскольку при способе ложного положения истинная кривая $P_0(\alpha)$ заменяется (на рассматриваемом участке) прямой, проходящей через точки $(\alpha_s, P_{0,s})$ и $(\alpha_{s+1}, P_{0,s+1})$, то делать дальнейшие приближения, пользуясь этим способом, можно, если мы подошли близко к результату, первоначально же лучше составлять график.

В качестве примера, из которого будут видны детали вычисления, удобно взять уравнение, рассмотренное А. Н. Крыловым [1]:

$$z^4 + 0.6834170\, z^3 + 1.9556169\, z^2 + 0.3765418\, Z + 1.7942053 = 0.$$

Для уравнения 4-й степени, как легко видеть, при $\alpha = -A_1/4$ имеем $P_0 \to \pm\infty$. Это дает одну из точек графика.

$$\begin{array}{rrr|rr} 1 & 1.95 & 1.79 & 0.68 & 0.38 \\ -1 & -0.56 & & 1.47 & 2.04 \\ \hline & 1.39 & & & \\ & -1.39 & -0.77 & & \\ \hline & & 1.02 = P_0 & & \end{array}$$

При $\alpha = 0$ определяем P_0 непосредственно по коэффициентам данного уравнения. Вычисления, приведенные слева, проведены с небольшой степенью точности (P_0 получено после первого же деления).

Имея точки $(-0.17, +\infty)$ и $(0, 1.02)$, мы видим, что корень должен лежать около $+0.2$. Берем $\alpha = +0.2$ и по схеме (4) проводим вычисления со всей возможной точностью; целесообразность последнего будет ясна в дальнейшем.

$$[\alpha = 0,2]$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{array}{r} +\,0.6834170 \\ 2 \\ \hline 0.8834170 \\ +\,2 \\ \hline 1.0834170 \\ +\,2 \\ \hline 1.2834170 \\ +\,2 \\ \hline 1.4834170 \\ = B_1 \end{array} &
\begin{array}{r} +\,1.9556169 \\ 1766834 \\ \hline 2.1323003 \\ +\,2166834 \\ \hline 2.3489837 \\ +\,2566834 \\ \hline 2.6056671 \\ = B_2 \end{array} &
\begin{array}{r} +\,0.3765418 \\ 4264601 \\ \hline 0.8030019 \\ +\,4697967 \\ \hline 1.2727986 \\ = B_3 \end{array} &
\begin{array}{r} +\,1.7942053 \\ 1606004 \\ \hline 1.9548057 \\ = B_4 \end{array}
\end{array}$$

Эти вычисления приведены слева. Определение P_0 путем деления можно производить с точностью счетной линейки. Имеем

$$\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2.606 & 1.955 & 1.483 & 1.273 \\ -1 & -0,857 & & 0.674 & 1.177 \\ \hline & 1.749 & & & \\ & -1.749 & -1.496 & & \\ \hline & & 0.459 = P_0 & & \end{array}$$

Поскольку P_0 хотя и меньше, но еще не слишком близко к нулю, даем приращение $\Delta\alpha$ порядка 0.1. Теперь понятно, почему в предыдущей операции вычисление коэффициентов B проводилось со всей возможной точностью. Вместо того чтобы в предстоящем цикле вычислений получать коэффициенты B по основному уравнению, для $\alpha = 0.3$ можно вычислять, перестраивая полином предыдущего цикла для приращения $\Delta\alpha = 0.1$, что, конечно, много проще. В дальнейшем, когда приращения $\Delta\alpha$ значительно уменьшается, перестройка схемы не представит большого труда.

$$\begin{bmatrix} \Delta\alpha = 0.1 \\ \alpha = 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{array}{r} +\,1.4834170 \\ 1 \\ \hline 1.5834170 \\ +\,1 \\ \hline 1.6834170 \\ +\,1 \\ \hline 1.7834170 \\ +\,1 \\ \hline 1.8834170 \end{array} &
\begin{array}{r} +\,2.6056671 \\ 1583417 \\ \hline 2.7640088 \\ +\,1683417 \\ \hline 2.9323505 \\ +\,1783417 \\ \hline 3.1106922 \end{array} &
\begin{array}{r} +\,1.2727986 \\ 2764009 \\ \hline 1.5491995 \\ +\,2932350 \\ \hline 1.8424345 \end{array} &
\begin{array}{r} +\,1.9548057 \\ 1549200 \\ \hline 2.1097257 \end{array}
\end{array}$$

После приведенных слева вычислений по схеме (4) деление для определения P_0 пока произведено, как и выше, с точностью счетной линейки:

$$\begin{array}{rrr|rr} 1 & 3.111 & 2.110 & 1.883 & 1.842 \\ -1 & -0.978 & & 0.532 & 1.133 \\ \hline & 2.133 & & & \\ & -2.133 & -2.084 & & \\ \hline & & 0.026 = P_0 & & \end{array}$$

Поскольку мы уже близки к результату, дальнейшие приближения проведены по способу ложного положения. По формуле (12) имеем

$$\Delta\alpha = 0.1 \times \frac{0.026}{0.433} \approx 0.005$$

Для найденного значения $\Delta\alpha$ проведены по схеме (4) вычисления, приведенные слева.

$$\begin{bmatrix} \Delta\alpha = 0.005 \\ \alpha = 0.305 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{array}{r} +\,1.8834170 \\ 5 \\ \hline 1.8884170 \\ +\,5 \\ \hline 1.8934170 \\ +\,5 \\ \hline 1.8984170 \\ +\,5 \\ \hline 1.9034170 \end{array} &
\begin{array}{r} +\,3.1106922 \\ 94421 \\ \hline 3.1201343 \\ +\,94671 \\ \hline 3.1296014 \\ +\,94921 \\ \hline 3.1390935 \end{array} &
\begin{array}{r} +\,1.8424345 \\ 156007 \\ \hline 1.8580352 \\ +\,156480 \\ \hline 1.8736832 \end{array} &
\begin{array}{r} +\,2.1097257 \\ 92902 \\ \hline 2.1190159 \end{array}
\end{array}$$

Определение P_0 с помощью деления произведено на арифмометре с несколько повышенной точностью. Результаты вычислений приведены слева.

$$\begin{array}{rrr|rr} 1 & 3.13909 & 2.11902 & 1.90342 & 1.87369 \\ -1 & -0.98438 & & 0.525370 & 1.13202 \\ \hline & 2.15471 & & & \\ & -2.15471 & -2.12105 & & \\ \hline & & -0.00203 = P_0 & & \end{array}$$

Пользуясь результатами последнего деления вычисляем по формуле (12).

$$\Delta\alpha = 0.005 \times \frac{-0.00203}{0.028} \approx$$
$$\approx -0.0004$$

1.9034170			
− 4	3.1390935		
1.9030170	− 7612	1.8736832	
− 4	3.1383323	− 12553	2.1190159
1.9026170	− 7610	1.8724279	− 7490
− 4	3.1375713	− 12550	2.1182669
1.9022170	− 7609	1.8711729	
− 4	3.1368104		
1.9018170			

$$\left[\begin{array}{r} \Delta\alpha = -0.0004 \\ \alpha = +0.3046 \end{array}\right]$$

Для этого значения $\Delta\alpha$ вычисления коэффициентов по схеме (4) приведены справа. Исходя из этих значений коэффициентов B и снова увеличивая точность деления приведенного справа, находим P_0. Затем снова согласно (12)

1	3.1368104	2.1182669	1.9018170	1.8711729
−1	0.9838869		0.5258129	1.1320350
	2.1529235			
	−2.1529335	−2.1182332		
		0.0000337 = P_0		

$$\Delta\alpha = -0.0004 \times \frac{0.0000337}{0.00203} \approx$$
$$\approx 0.0000066$$

Последнюю схему составляем с логарифмической линейкой, вполне гарантирующей достаточную точность прибавляемых величин; при этом нет нужды вычисления, приведенные слева, доводить до конца, так как для определения β_0 нам нужны лишь B_1 и B_3. Получаем

$[\Delta\alpha = 0.0000066]$

1.9018170		
+ 66	3.1368104	
1.9018236	+ 125	1.8711729
+ 66	3.1368229	+ 207
1.9018302	+ 125	1.8711936
+ 66	3.1368354	+ 207
1.9018368	+ 125	1.8712143
+ 66	3.1368479	
1.9018434		

$$\beta = \sqrt{\frac{1.8712143}{1.9018434}} = 0.9919148.$$

Таким образом, два корня рассмотренного численного уравнения будут

$$z_{1,2} = 0.3046066 \pm 0.9919148\, i$$

Эти значения до последней единицы совпадают с полученными А. Н. Крыловым. Проверка вычислений достигается составлением с помощью арифмометра схемы Руффини-Хорнера для окончательного значения α, минуя промежуточные этапы.

Рассмотренный прием нахождения корней непосредственно не применим, когда уравнения (6) имеют более одного общего корня, т. е, когда уравнение (1) имеет две или более пары сопряженных корней с одинаковой вещественной частью; при k общих корней уравнений (6) остаток P_{k-1} уже равен нулю и дальнейшее деление невозможно. В этих случаях надлежит поступать следующим образом.

1. Если возможно наличие двух или более пар корней с равными и вещественными и мнимыми частями, то проверкой на общий делитель у полиномов $F(z)$ и $F'(z)$ отделяют кратные корни уравнения $F(z)=0$.

2. Если корни уравнения $F(z)=0$ для двух или более пар корней имеют одинаковые вещественные части, но разные мнимые, то это затруднение обходят с помощью перехода от корней z к корням z^2 по принципу Греффе. У новых корней вещественные части будут различными.

3. Случай корней с равными мнимыми и различными вещественными частями не представляет затруднений.

Для быстрого получения точных результатов, когда уже имеются приближенные значения корней, можно пользоваться приемом, изложенным в работе[2].

Поступила в редакцию
24 III 1947

Сталинградский машиностроительный институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях.
2. Мелентьев П. В. Несколько новых методов и приемов приближенных вычислений. ОНТИ НКТП. 1937. Стр. 30—39.