Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

О НАГРЕВАНИИ НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

М. Е. Швец

(Ленинград)

В работе [1] рассматривается задача о нагревании от теплового источника двух бесконечно длинных, тонких стержней или двух полупространств, соприкасающихся между собой и составляющих продолжение один другого. Здесь рассматривается задача нагревания неоднородного стержня.

Поместим начало координат в точке соприкосновения стержней 0 и обозначим через λ_1 и λ_2 коэффициенты теплопроводности стержней, через ρ_1, ρ_2 — соответствующие плотности, через c_1, c_2 — удельные теплоемкости и через T_1 и T_2 — температуры стержней. Далее, пусть $k_1 = \lambda_1 / \rho_1 c_1$ и $k_2 = \lambda_2 / \rho_2 c_2$ — переменные коэффициенты температуропроводности, изменяющиеся по закону $k_\nu = b_\nu z^{n_\nu}$ ($\nu = 1, 2; 0 \leqslant n_\nu < 1$).

Будем считать, что в начале координат 0 находится тепловой источник $S(t)$. Задача сводится к нахождению решений уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial T_\nu}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial z} k_\nu \frac{\partial T_\nu}{\partial z} \qquad (\nu = 1, 2) \tag{1}$$

удовлетворяющих следующим граничным и начальным условиям:

а) в точке соприкосновения

$$T_1(t, 0) = T_2(t, 0), \qquad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial z} = S(t) \tag{2}$$

б) в начальный момент времени

$$T_1(z, 0) = \varphi_1(z), \qquad T_2(z, 0) = \varphi_2(z) \tag{3}$$

Решение уравнений (1) удобно искать в виде суммы двух функций

$$T_\nu = T_\nu^{(1)} + T_\nu^{(2)} \tag{4}$$

каждая из которых удовлетворяет соответствующему уравнению (1) и следующим граничным и начальным условиям

$$T_\nu^{(1)}(z, 0) = \varphi_\nu(z,), \qquad \lim_{z \to 0} \lambda_\nu \frac{\partial T_\nu^{(1)}(z, t)}{\partial z} = 0$$

$$T_\nu^{(2)}(z, 0) = 0, \qquad \lim_{z \to 0} \lambda_\nu \frac{\partial T_\nu^{(2)}(z, t)}{\partial z} = Q_\nu$$

Будем пока предполагать Q_ν известными, тогда согласно (1) функция $T_\nu^{(2)}$ определяется формулой

$$T_\nu^{(2)}(z, t) = A_\nu \int_0^t \frac{Q_\nu(\alpha)}{(t-\alpha)^{p_\nu}} \exp \frac{-p_\nu^2 z^{1/p_\nu}}{b_\nu (t-\alpha)} d\alpha$$

Здесь

$$A = \frac{p_\nu^{2p_\nu - 1}}{b_\nu \rho_\nu c_\nu} \frac{1}{\Gamma(p_\nu + 1)}, \qquad p_\nu = \frac{1}{2 - n_\nu}$$

где Γ есть символ гамма-функции.

Решение, зависящее от начального распределения температуры, определяется формулой

$$T_\nu^{(1)} = \frac{1}{2b_\nu t} x_\nu^{q_\nu} \int_0^\infty \tau^{1-q_\nu} \varphi_\nu(\tau) \exp \frac{-(\tau^2 + x_\nu^2)}{4b_\nu t} I_{-q_\nu}\left(\frac{\tau x_\nu}{2b_\nu t}\right) d\tau$$

Здесь

$$q_\nu = \frac{1-n_\nu}{2-n_\nu}, \qquad x_\nu = \frac{2}{2-n_\nu} z^{\frac{1}{2}(2-n_\nu)}, \qquad I_{-q\nu} = -i^q J$$

причем J означает функцию Бесселя. Согласно (4) имеем

$$T_\nu(0, t) = T_\nu^{(1)}(0, t) + T_\nu^{(2)}(0, t) = A_\nu \int_0^t \frac{Q_\nu(\alpha)\, d\alpha}{(t-\alpha)^{p_\nu}} + T_\nu^{(1)}(0, t)$$

Граничные условия (2) дают соответственно (5)

$$A_1 \int_0^t \frac{Q_1(\alpha)\, d\alpha}{(t-\alpha)^{p_1}} + T_1^{(1)}(0, t) = A_2 \int_0^t \frac{Q_2(\alpha)\, d\alpha}{(t-\alpha)^{p_2}} + T_2^{(1)}(0, t), \qquad Q_1 - Q_2 = S(t)$$

Выразим поток тепла Q_1 через Q_2, для чего умножим первое уравнение (5) на $(t-\alpha)^{-p_1} A_1 d\alpha$, предварительно заменив в нем букву t на α, и проинтегрируем от 0 до t

$$A_1 \int_0^t \frac{Q_1(\alpha)\, d\alpha}{(t-\alpha)^{p_1}} - A_1 \int_0^t \frac{Q_2(\alpha)\, d\alpha}{(t-\alpha)^{p_1}} = A_1 \int_0^t \frac{S(\alpha)\, d\alpha}{(t-\alpha)^{p_1}} \tag{6}$$

Вычитая выражение (6) из первого уравнения (5), находим (7)

$$\int_0^t Q_2(\alpha) \left[\frac{A_1}{(t-\alpha)^{p_1}} + \frac{A_2}{(t-\alpha)^{p_2}}\right] d\alpha = T_1^{(1)}(0, t) - T_2(0, t) - A_1 \int_0^t \frac{S(\alpha)\, d\alpha}{(t-\alpha)^{p_1}} = F(t)$$

Аналогичное интегральное уравнение можно получить и для Q_1. Если $p_1 = p_2 = p$ (в частности, $p = 1/2$ соответствует постоянным коэффициентам температуропроводности), то для определения Q_2 получим интегральное уравнение Абеля

$$(A_2 + A_1) \int_0^t \frac{Q_2\, d\alpha}{(t-\alpha)^p} = F(t)$$

Решение этого уравнения дается формулой

$$Q_2 = \frac{\sin p\pi}{(A_1 + A_2)\pi} \int_0^t \frac{F'(\alpha)\, d\alpha}{(t-\alpha)^{1-p}}$$

Если $p_2 \neq p_1$, то решение уравнения (7) можно получить по методу Уиттекера [2]. Решение, полученное в работе [3], является частным случаем ($n_1 = n_2 = 0$, $S = 0$) рассмотренной здесь задачи. Случай, когда стержни излучают во внешнее пространство по закону Ньютона, легко приводится к рассмотренному.

Поступила в редакцию
23 II 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Швец М. Е. ДАН СССР. 1943. Т. XL. № 4.
2. Wittaker. Proc. Roy. Soc. 1918. № 94.
3. Дацев Асен. ДАН СССР. 1947. Т. LV. № 2.