Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ И ПЛАСТИЧНОСТЬ

П. М. Риз

(Москва)

Область применимости линейной теории упругости определяется двумя обстоятельствами: 1) наличием пропорциональности между напряжениями и деформациями; 2) возможностью относить уравнения равновесия к неизмененной форме тела, или, что то же, пренебрегать квадратами производных от перемещений по координатам. Имеется ряд исследований, в которых изучаются случаи нарушения линейности по какой-либо одной из этих причин. Целью настоящей заметки является рассмотрение процессов, в которых следует принимать во внимание оба указанных фактора.

Мы примем квадратичную зависимость между напряжениями и деформациями [1]

$$\sigma_{ij} = \{\lambda J_1 + (B + \tfrac{1}{2}\lambda) J_1^2 - (C + 3\lambda) J_2\} \delta_{ij} + [2\mu - (C + \lambda - 2\mu) J_1] \varepsilon_{ij} + \\ + (A + 5\mu) [\varepsilon_{ij} (\varepsilon_{ii} + \varepsilon_{jj}) + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jk}] \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \tag{2}$$

Здесь x_i — координаты точек тела в деформированном состоянии, λ и μ — константы Ламэ, J_1, J_2 и J_3 — инварианты тензора деформации и $\delta_{ij} = 0$ для $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ для $i = j$. Дополнительные упругие константы A, B и C должны подчиняться следующим условиям [2];

для существования эффекта Пуассона

$$A\nu^2 + B(1 - 2\nu)^2 + C\nu(1 + \nu) = 0 \qquad \left(\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}\right) \tag{3}$$

для существования деформации чистого сдвига

$$A + C = \lambda + 3\mu \tag{4}$$

Для деформаций, предшествующих пластическим, константа A может выбрана из рассмотрения диаграммы напряжений-удлинений при одноосном растяжении. В этом случае

$$\sigma = Ee - A\nu^2 e^2 \tag{5}$$

где e — относительное удлинение и можно подобрать эмпирически константу A. (Диаграмме Прандтля соответствует $A = 0$ до точки перехода к пластическому состоянию.) Для удельной энергии деформации будем иметь [3]

$$\Phi = \left(\frac{1}{2}\lambda + \mu\right) J_1^2 - 2\mu J_2 + l J_1^3 + m J_1 J_2 + n J_3 \tag{6}$$

где

$$l = \frac{3}{2}(\lambda + 2\mu) + \frac{1}{3}(A + B + C), \quad m = -3(\lambda + 3\mu) - (A + C), \quad n = 9\mu + A \tag{7}$$

Примем гипотезу Генки о постоянстве удельной энергии деформации формы для пластических процессов [1]. Это приводит к условию пластичности $\Phi^* = \mathrm{const}$,

---

[1] При учете квадратичных членов условие пластичности Генки уже не совпадает с условием Мизеса.

где Φ^* — удельная энергия изменения формы (ниже указано, как ее выделить). Для определения пластических деформаций применим метод Генки и укажем на две возможности его обобщения на случай больших деформаций.

1) Пластическое тело сжимаемо и модуль объемного сжатия k постоянен. Тогда

$$C = k - 2\mu - A, \qquad B = \frac{k}{3} - \frac{A}{9} \tag{8}$$

и тогда уравнение (3) определяет значение A. Модуль μ в рассматриваемой пластической области принимаем за некоторую искомую функцию координат. Мы легко выделим энергию изменения формы, отбросив члены с множителем k. Получим

$$\Phi^* = \frac{2}{3}\mu J_1^2 - 2\mu J_2 - \frac{5}{3}\mu J_1^3 + 9\mu J_1 J_2 + 4\mu J_3 \tag{9}$$

2) Пластическое тело несжимаемо. В этом случае, кроме условия пластичности $\Phi=\mathrm{const}$ (выделять энергию изменения объема теперь не нужно), имеем

$$\frac{\nu_0}{\nu} = \sqrt{1 - 2J_1 + 4J_2 - 8J_3} = 1 \qquad \text{или} \qquad J_1 - 2J_2 + 4J_3 = 0 \tag{10}$$

при этом дополнительный модуль A также следует рассматривать как искомую функцию от координат, а коэффициенты B и C легко выражаются через A и μ.

Заметим, что при высоких температурах в деформируемом теле следует предпочесть вторую схему.

Уравнения равновесия получаются обычными методами и следует только производные от напряжений брать по координатам деформированного состояния.

Естественным является следующий приближенный прием для определения пластического равновесия с учетом квадратичных членов: пусть величина деформации характеризуется параметром α, положим

$$u_i = \alpha u_i^{(0)} + \alpha^2 u_i^{(1)}, \qquad \mu = \mu^{(0)} + \alpha\mu^{(1)}$$

(последнее только для пластической области, то же относится и к модулю A, причем $A=\alpha A^{(1)}$).

Сохраняя в уравнениях равновесия только квадратичные члены относительно α, а в выражении энергии и в условиях пластичности члены порядка α^3, придем к дополнительной задаче для $u_i^{(1)}$ и $\mu_i^{(1)}$, причем задача эта будет линейной.

Затруднения с выполнением граничных условий, связанные с тем, что деформированная поверхность неизвестна, если на границе тела заданы напряжения, а не перемещения, можно обойти переходом к координатам начального состояния ξ_i с помощью формул дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} - \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}$$

При этом условия на границе деформированного тела легко выражаются через некоторые соответствующие им условия на недеформированной поверхности.

Поступила в редакцию
25 XI 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Зволинский Н. В., Риз П. М. О некоторых задачах нелинейной теории упругости. ПММ. 1939. Т. II. Вып. 4.
2. Риз. П. М. Об упругих константах в нелинейной теории упругости. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 4.
3. Murnaghan. Finite Deformations of an Elastic Solid. 1937. Vol. LIX. No 2.