Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ КОЛЕБАНИЙ ВИНТОВОЙ ПРУЖИНЫ СО СТАЛКИВАНИЕМ ВИТКОВ

П. П. Куфарев

(Томск)

Пусть s — длина дуги упругой линии пружины, λ — длина одного витка, l — длина всей упругой линии, h — шаг ее (при ненапряженном состоянии пружины), S — площадь нормального к упругой линии сечения $Q(s, t)$ пружины, $\zeta(s, t)$ — смещение (параллельно оси пружины) центра инерции $M(s, t)$ сечения $Q(s, t)$ пружины, $q(s, t)$ — рассчитанное на единицу длины упругой линии напряжение сил действующих по боковой поверхности пружины, a — скорость распространения упругих колебаний вдоль пружины, ρ — плотность пружины.

Малые колебания тонкой пружины с малым углом наклона упругой линии ее приближенно характеризуются уравнением [1]

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2} + \frac{q}{\rho S} \tag{1}$$

Предположим, что при колебаниях пружины со сталкиванием витков давление $r(s, t)$ между двумя соприкасающимися элементами ее пропорционально разности

$$e(s, t) = b - h - \zeta(s, t) + \zeta(s - \lambda, t) \tag{2}$$

между расстоянием b центра инерции $M(s, t)$ верхнего элемента от центра инерции $M(s-\lambda, t)$ нижнего элемента в момент начала соприкосновения этих элементов и расстоянием $\zeta(s, t) + h - \zeta(s-\lambda, t)$ от $M(s, t)$ до $M(s-\lambda, t)$ в данный момент соприкосновения

$$r(s, t) = k[e(s, t)]^* \tag{3}$$

где $[x]^* = x$ при $x \geqslant 0$ и $[x]^* = 0$ при $x < 0$.

Тогда из (1), (2), (3) следует, что ζ и e удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial^2\zeta(s, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2\zeta(s, t)}{\partial s^2} + \frac{k}{\rho S}\{[e(s, t)]^* - [e(s+\lambda, t)]^*\} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 e(s, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 e(s, t)}{\partial s^2} + \frac{k}{\rho S}\{[e(s+\lambda, t)]^* - 2[e(s, t)]^* + [e(s-\lambda, t)]^*\} \tag{5}$$

Рассмотрим частный случай, когда выполняется условие (A): в каждый момент времени всякий элемент пружины, находящийся в соприкосновении с элементом соседнего витка, находится в соприкосновении только с одним из таких элементов, т. е. или только с выше лежащим, или только с ниже лежащим.

Пусть G — принадлежащая полосе $H\,(0 \leqslant s \leqslant l,\ t > 0)$ область плоскости st, где $e(s, t) \geqslant 0$, и G' — область, в которую переходит G после переноса ее на $-\lambda$ в направлении оси s.

При условии (A) области G и G' не пересекаются. Из (5) следует, что при условии (A) функции

$$\varkappa(s, t) = \left\{\begin{array}{ll} e(s, t) & \text{в области } G \\ -e(s+\lambda, t) & \text{в области } \overline{G}' \\ 0 & \text{в области } \overline{H} - \overline{G} - \overline{G}' \end{array}\right\}, \qquad u = \zeta + \frac{1}{2}\varkappa \tag{6—7}$$

удовлетворяют всюду в H, за исключением множества точек, где $\varkappa$ (или ее производные) разрывна, уравнениям

$$\frac{\partial^2\varkappa}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\varkappa}{\partial s^2}-\frac{k}{\rho S}\varkappa, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \tag{8}$$

Кроме того, по (2), (6)

$$u(s,t)-u(s-\lambda,t)=b-h \qquad \text{в области } \overline{G} \tag{9}$$

Задача изучения колебаний пружины при тех или иных граничных и начальных условиях сводится, таким образом, к определению соответствующих функций u и $\varkappa$, являющихся решениями уравнений (8) и удовлетворяющих в области G (также подлежащей определению) соотношению (9). В качестве примера приведем решение задачи в случае, когда начальные и граничные условия имеют вид

$$\zeta(s,0)=0, \quad \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)_{t=0}=0, \quad \zeta(0,t)=0, \quad \zeta(l,t)=\psi(t) \tag{10}$$

где $\psi(t)$ — дважды дифференцируемая функция, монотонно убывающая при $0<t<t_0$, монотонно возрастающая при $t_1<t<\infty$, $t_0<t_1<\lambda/a$ удовлетворяет условиям

$$\psi(t)-b+h>0 \qquad \text{при} \quad 0<t<t_0, \quad t>t_1$$
$$\psi(t)-b+h<0 \qquad \text{при} \quad t_0<t<t_1$$
$$\psi(0)=0, \qquad \psi(t_0)=\psi(t_1)=b-h$$

В этом случае

$$\varkappa(l,t)=\chi(t)=[b-h-\psi(t)]^*$$

и область G есть параллелограм:

$$\lambda<s<l, \qquad t_0<t-\frac{l-s}{a}<t_1 \tag{11}$$

При определении $\chi(t)$ и области G используется соотношение (9). В области G

$$\varkappa(s,t)=[\varkappa^*(s,t)]^* \tag{12}$$

где

$$\varkappa^*(s,t)=\chi\left(t-\frac{l-s}{a}\right)-$$
$$-\frac{b(l-s)}{a}\int\limits_{t_0}^{\tau'}\frac{\chi(\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-[(l-s)/a]^2}}J_0'\left(b\sqrt{(t-\tau)^2-\left(\frac{l-s}{a}\right)^2}\right)d\tau \tag{13}$$

где

$$b^2=\frac{2k}{\rho S}, \qquad \tau'=t-\frac{l-s}{a}, \qquad J_0(x)=1+x+\frac{x^2}{(2!)^2}+\frac{x^3}{(3!)^3}+\ldots \tag{14}$$

Зная $\varkappa(s,t)$, можно по (8), (10) определить граничные значения $u(l,t)$, $u(0,t)$ функции $u(s,t)$ и ее значения $u(l-\lambda\pm 0,t)$, $u(\lambda\pm 0,t)$ на линиях

$$s=l-\lambda \qquad (t_0<t<t_1), \qquad s=\lambda \qquad \left(t_0+\frac{l-\lambda}{a}<t<t_1+\frac{l-\lambda}{a}\right)$$

После этого $u(s,t)$ определяется в различных ограниченных характеристиками второго из уравнений (8) и прямыми $s=0$, $s=\lambda$, $s=l-\lambda$, $s=l$ областях при помощи интеграла Даламбера и сложения падающих и отраженных волн.

Интересно отметить, что по (13) и (12) функции $e(s,t)$ и $r(s,t)$ больше нуля лишь в части области G, а не всюду в G.

Поступила в редакцию
13 VI 1946

Томский государственный
университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Гродский Ф. Д. Теория динамического сжатия винтовых пружин. 1934.