Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

ЗАМЕТКИ

О ПРИТОКЕ ЖИДКОСТИ К СКВАЖИНЕ И НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

М. А. Лукомская

(Минск)

Решается задача о плоском стационарном потоке совершенной и несжимаемой жидкости при следующих граничных условиях.

Имеются две (или более) области D_1 и D_2, заполненные жидкостью. Требуется найти характеристичную функцию потока $w_1(z)=\varphi_1+i\psi_1$ в области D_1 и характеристическую функцию потока $w_2(z)=\varphi_2+i\psi_2$ в области D_2 по заданным особенностям этих функций в области D_1 для функции $w_1(z)$ и в области D_2 для $w_2(z)$. Условия на границе даются равенствами

$$\psi_1=\psi_2, \qquad \frac{\varphi_1}{C_1}=\frac{\varphi_2}{C_2} \qquad (C_1=\text{const}, \quad C_2=\text{const})$$

выражающими закон преломления линий тока просачивающейся через пористый грунт жидкости при переходе ее в среду с другой проницаемостью[1].

Для решения граничные условия заменяем эквивалентными им функциональными уравнениями

$$w_1(z)-\overline{w_1(z^*)}=w_2(z)-\overline{w_2(z^*)}$$
$$\frac{w_1(z)+\overline{w_1(z^*)}}{C_1}=\frac{w_2(z)+\overline{w_2(z^*)}}{C_2} \tag{1}$$

где z^* обозначает точку, симметричную с точкой z относительно граничной кривой, которая предполагается аналитической[2].

Отметим также, что если одна из четырех аналитических функций, удовлетворяющих двум линейным уравнениям

$$f_1(z)+a_2f_2(z)=a_3f_3(z)+a_4f_4(z)$$
$$f_1(z)+a_2'f_2(z)=a_3'f_3(z)+a_4'f_4(z) \tag{2}$$

где $a_i\neq a_i'$, $a_i\neq 0$, $a_i'\neq 0$, имеет в точке a особенность данного вида (например, логарифмическую точку ветвления), то по крайней мере еще две из этих функций также имеют в ней особенность и притом того же вида[3].

Положим, что области D_1 и D_2 получены разделением плоскости z на две части замкнутой аналитической кривой Жордана L. Точка $z=\infty$ принадлежит D_2. Пусть функция $w_1(z)$ имеет в D_1 единственную особую точку, а именно логарифмическую точку ветвления z_0 (условие I). Пусть функция $w_2(z)$ не имеет особых точек в D_2 (условие II).

Тогда в силу (1), (2) и условия I по крайней мере две из функций $\overline{w_1(z^*)}$, $w_2(z)$ и $\overline{w_2(z^*)}$ имеют логарифмические особенности в точке z_0^*. Из условия II заключаем, что особенности имеют $\overline{w_1(z^*)}$ и $\overline{w_2(z^*)}$. Пользуясь этим обстоятельством а также тем, что согласно уравнению (1), если a есть логарифмическая точка ветвления одной из функций $w_k(z)$ и $\overline{w_k(z^*)}$, то a^* есть логарифмическая точка ветвления для другой, заключаем, что $w_2(z)$ имеет логарифмическую особенность в точке z_0.

Таким образом, искомые функции $w_1(z)$ и $w_2(z)$ имеют вид

$$\begin{aligned} w_1(z) &= A\log(z-z_0) + B\log(z-z_0^*) + G_1(z) \\ w_2(z) &= C\log(z-z_0) + G_2(z) \end{aligned} \tag{3}$$

где функции $G_1(z)$ и $G_2(z)$ не имеют особенностей в точках z_0 и z_0^*.

Первое из этих равенств полезно преобразовать таким образом, чтобы оно не содержало точки z_0^*, а только точку z_0. Для этого достаточно заменить в нем член $B\log(z-z_0^*)$ эквивалентным ему (т. е. отличающимся от него на функцию, не имеющую особенностей в точках z_0 и z_0^*) членом $B\overline{\log(z^*-z_0)}$. Эквивалентность эта становится очевидной из сравнения приращения функций $B\log(z-z_0^*)$ и $B\overline{\log(z^*-z_0)}$ при обходе z вокруг z_0.

После этой замены получаем

$$\begin{aligned} w_1(z) &= A\log(z-z_0) + B\overline{\log(z^*-z_0)} + H_1(z) \\ w_2(z) &= C\log(z-z_0) + H_2(z) \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнения (1), убеждаемся, что уравнения эти удовлетворяются при $H_1(z)=0$, $H_2(z)=0$ и при надлежаще выбранных параметрах A, B и C, и, таким образом, получаем следующее решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} w_1(z) &= A\log(z-z_0) + A\lambda\overline{\log(z^*-z_0)} \\ w_2(z) &= A(1-\lambda)\log(z-z_0) \end{aligned} \qquad \left(\lambda = \frac{C_1-C_2}{C_1+C_2}\right) \tag{5}$$

Формулы (5) имеют смысл лишь тогда, когда точка z_0 расположена настолько близко к кривой L, что имеет одну и только одну симметрическую точку z_0^*. Эффективность их зависит от того, как выражается z^* через z.

Рассмотрим случай, когда кривая L есть эллипс с фокусами $F_1=+1$ и $F_2=-1$ и большой полуосью a. Тогда первое из этих условий имеет место для любой внутренней точки эллипса, не лежащей на прямолинейном отрезке F_1F_2. Имеем

$$z^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar\zeta}{R^2} + \frac{R^2}{\bar\zeta}\right) \qquad \left(\begin{matrix} \zeta^2 - 2z\zeta + 1 = 0, & |\zeta| > 1 \\ R^2 - 2aR + 1 = 0, & R > 1 \end{matrix}\right) \tag{6}$$

Таким образом, в этом случае задача о притоке жидкости решена для скважины, расположенной где угодно, кроме отрезка F_1F_2.

Поступила в редакцию
1 XII 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. Изд. Ан СССР. 1942.
2. Ламбин Н. В. Пластинка с отверстиями в плоском магнитном поле. ПММ. 1939. Т. III. Вып. 3.
3. Лукомская М. А. Решение некоторых задач о притоке жидкости к скважинам. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 6.