Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛУЧАЕ ДРЕНЫ В ВОДОПРОНИЦАЕМОМ СЛОЕ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ[1]

Н. К. Калинин

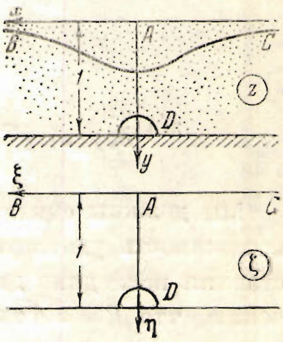
(Москва)

Та же задача, что в работе[1], а именно, задача о понижении со временем уровня грунтовых вод, первоначально горизонтального, с той, однако, разницей, что дрена теперь находится не в бесконечной полуплоскости, но на дне полосы, толщина которой равна единице.

1. Одиночная дрена, лежащая на водоупоре. Будем искать функцию, отображающую конформно область $BACD$ плоскости z (фиг. 1) на полосу $BACD$ плоскости ζ, в виде ряда

$$z = \zeta + z_1(\zeta)\, t + z_2(\zeta)\, t^2 + \ldots \tag{1.1}$$

где $z_1(\zeta)$, $z_2(\zeta), \ldots$ — функции, регулярные в полосе и удовлетворяющие граничным условиям, получаемым из равенства (1.8) работы[1], которое мы здесь перепишем:



Фиг. 1.

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\overline{\partial z}}{\partial \zeta}\right) = -\frac{1}{m}\operatorname{Im}\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right) + \frac{\varkappa}{m}\operatorname{Im}\left(i\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)$$

$$w = -\frac{\varkappa}{\gamma}(p + ip_1) \tag{1.2}$$

Здесь p — давление, p_1 — гармоническая функция, сопряженная с p. Функция w связана с комплексным потенциалом $\omega = \varphi + i\psi$ соотношением $w = \omega + \varkappa i z$.

На свободной поверхности, т. е. при $\zeta = \xi$, должно выполняться, кроме (1.2), еще условие

$$\operatorname{Re}(\partial w / \partial \zeta) = 0 \tag{1.3}$$

Кроме того, при $\eta = 1$, т. е. на непроницаемом основании, должны иметь место условия

$$\operatorname{Im}\frac{\partial z}{\partial \zeta} = 0, \quad \operatorname{Im}\frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{или} \quad \operatorname{Im}\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} - \varkappa i\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) = 0 \tag{1.4}$$

Первое из этих условий равносильно тому, что линии $y = 1$ и $\zeta = 1$ все время соответствуют одна другой. Второе условие, эквивалентное третьему, гласит, что $\eta = 1$ является все время линией тока.

---

[1] Работа печатается посмертно; восстановлена по черновым записям П. Я. Полубариновой-Кочиной.

Возьмем производную $\partial w / \partial \zeta$ в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \varkappa i + \frac{q}{4}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4} - \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta-i)}{4}\right] + i\int_0^\infty B(\alpha)\cos\alpha\zeta\, d\alpha \tag{1.5}$$

Последнее слагаемое, взятое нами в виде интеграла, добавляем для того, чтобы можно было путем соответствующего подбора функции $B(\alpha)$ удовлетворить условию (1.4).

Положим $B = B_1 t + B_2 t^2 + \ldots$ Заметим, что для выполнения (1.4) функция B должна быть вещественной.

Будем искать z также в форме определенного интеграла

$$z = \zeta + \int_0^\infty A(\alpha)\sin\alpha(\zeta - i)\, d\alpha \qquad A = A_1 t + A_2 t^2 + \ldots \tag{1.6}$$

Составим выражения

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta}\right)_{\zeta = t+\xi} = \varkappa i + \frac{q}{4}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\xi+2i)}{4} - \operatorname{cth}\frac{\pi\xi}{4}\right] + $$
$$+ i\int_0^\infty B(\operatorname{ch}\alpha\cos\alpha\xi - i\operatorname{sh}\alpha\sin\alpha\xi)\, d\alpha$$

$$\varkappa i\left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)_{\zeta = t+\xi} = \varkappa i + \varkappa i\int_0^\infty A\alpha\cos\alpha\xi\, d\alpha \tag{1.7}$$

Мы должны считать функцию $A(\alpha)$ вещественной, чтобы иметь возможность удовлетворить первому из условий (1.4). Поэтому, подставляя последние два выражения в формулу (1.4), придем к заключению, что $B = \pi A\alpha\operatorname{sech}\alpha$. Подставив это выражение в (1.5), имеем

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \varkappa i + \frac{q}{4}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4} - \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta-i)}{4}\right] + \varkappa i\int_0^\infty \frac{A\alpha}{\operatorname{ch}\alpha}\cos\alpha\zeta\, d\alpha. \tag{1.8}$$

Представим второе слагаемое правой части в виде интеграла Фурье, регулярного в полосе $-1 < \eta < 1$. Положим

$$\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4} - \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta-i)}{4} = \Phi(\zeta) \tag{1.9}$$

Имеем

$$\Phi(\zeta) = \sum_0^\infty \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{\zeta+i+4ni} - \frac{1}{\zeta-i-4ni}\right) - \frac{q}{\pi}\left(\frac{1}{\zeta+3i-4ni} - \frac{1}{\zeta-3i-4ni}\right)$$

Но

$$\frac{1}{\zeta+i+4ni} = -i\int_0^\infty e^{\alpha i(\zeta+i+4ni)}\, d\alpha \qquad \text{при} \quad \eta > -1-4n$$

$$\frac{1}{\zeta-i-4ni} = +i\int_0^\infty e^{-\alpha i(\zeta-i-4ni)}\, d\alpha \qquad \text{при} \quad \eta < 1+4n$$

Поэтому

$$\sum_0^\infty \left(\frac{1}{\zeta + i + 4ni} - \frac{1}{\zeta - i - 4ni} \right) =$$

$$= -2i \int_0^\infty e^{-\alpha} \cos \alpha\zeta \sum_{n=0}^\infty e^{-4\alpha n} \, d\alpha = -2i \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha} \cos \alpha\zeta}{1 - e^{-4\alpha}} \, d\alpha$$

$$\sum_0^\infty \left(\frac{1}{\zeta + 3i + 4ni} - \frac{1}{\zeta - 3i - 4ni} \right) = -2i \int_0^\infty \frac{e^{-3\alpha}}{1 - e^{-4\alpha}} \cos \alpha\zeta \, d\alpha$$

Отсюда найдем

$$\Phi(\zeta) = -\frac{4i}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha\zeta}{\operatorname{ch} \alpha} \, d\alpha = \operatorname{cth} \frac{\pi(\zeta + i)}{4} - \operatorname{cth} \frac{\pi(\zeta - i)}{4} \tag{1.10}$$

Производную $\partial w / \partial \zeta$ согласно (1.8) можно представить в виде

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \varkappa i - \frac{qi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha\zeta}{\operatorname{ch} \alpha} \, d\alpha + i\varkappa \int_0^\infty \frac{\alpha A(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha} \cos \alpha\zeta \, d\alpha \tag{1.11}$$

или, подставив $A = A_1 t + A_2 t^2 + \ldots$,

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \varkappa i - \frac{qi}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha\zeta}{\operatorname{ch} \alpha} \, d\alpha + \varkappa i \sum_{m=1}^\infty t^m \int_0^\infty \frac{\alpha A_m(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha} \cos \alpha\zeta \, d\alpha =$$

$$= \varkappa i + W_0 + W_1 t + W_2 t^2 + \ldots \tag{1.12}$$

Здесь

$$q = q_0 + q_1 t + \ldots$$

$$W_1 = \varkappa i \int_0^\infty \frac{\alpha A(\alpha)}{\operatorname{ch} \alpha} \cos \alpha\zeta \, d\alpha - \frac{q_1 i}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha\zeta}{\operatorname{ch} \alpha} \, d\alpha \tag{1.13}$$

Для нахождения коэффициента $z_1(\zeta)$ ряда (1.1) воспользуемся условием (2.9) работы[1]

$$\operatorname{Im} z_1 = -\frac{1}{m} \operatorname{Im} W_0 \qquad \text{при } \zeta = \xi$$

В нашем случае

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{q_0}{m\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha\xi}{\operatorname{ch} \alpha} \, d\alpha = -\frac{q_0}{4\pi m} \left[\operatorname{cth} \frac{\pi(\xi + i)}{4} - \operatorname{cth} \frac{\pi(\xi - i)}{4} \right] \tag{1.14}$$

С другой стороны, из (1.6) имеем

$$z = \zeta + \int_0^\infty A \operatorname{ch} \alpha \sin \alpha\zeta \, d\alpha - i \int_0^\infty A \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha\zeta \, d\alpha \tag{1.15}$$

Приняв во внимание, что $A = A_1 t + A_2 t^2 + \ldots$, найдем

$$\operatorname{Im} z_1 = -\int_0^\infty A_1 \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha\xi \, d\alpha \tag{1.16}$$

Сравнивая это выражение с равенством (1.14), найдем

$$A_1 = -\frac{q_0}{m\pi}\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha} \tag{1.17}$$

Откуда

$$z_1 = \int_0^\infty A_1 \operatorname{ch}\alpha \sin\alpha\zeta d\alpha - i\int_0^\infty A_1 \operatorname{sh}\alpha\cos\alpha\zeta\, d\alpha =$$

$$= -\frac{q_0}{m\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\zeta}{\operatorname{sh}\alpha}d\alpha + \frac{iq_0}{m\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\alpha\zeta}{\operatorname{ch}\alpha}d\alpha =$$

$$= -\frac{q_0}{m\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\zeta}{\operatorname{sh}\alpha}d\alpha - \frac{q_0}{4m}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4} - \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta-i)}{4}\right]$$

Но первый интеграл берется

$$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\zeta}{\operatorname{sh}\alpha}d\alpha = \frac{\pi}{2}\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{2}$$

Подставив это выражение в формулу для z_1 и произведя преобразование, найдем окончательно

$$z_1 = -\frac{q_0}{2m}\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4} = -\frac{q_0}{m\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\alpha\zeta}{\operatorname{sh}\alpha}d\alpha + \frac{iq_0}{m\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\alpha\zeta}{\operatorname{ch}\alpha}d\alpha \tag{1.18}$$

Это выражение для z_1 можно было бы написать сразу, не производя вычислений, просто по виду условия (1.14), подобно тому, как это делается в работе[2]. А именно, принимая в внимание равенство

$$\operatorname{Im} f(\zeta) = -\operatorname{Im}\overline{f(\zeta)}$$

условие (1.16) можно представить в виде

$$\operatorname{Im} z_1 = \frac{-q_0}{4m}\operatorname{Im}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4} + \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4}\right] = \frac{-q_0}{2m}\operatorname{Im}\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4}$$

при $\zeta = \xi$. Но тогда для комплексной величины z_1 будет иметь место равенство (1.18).

Однако вычисление дальнейших коэффициентов по этому способу затруднительно. Поэтому при отыскании z_2 будем действовать опять с помощью интеграла Фурье.

Из уравнения (1.18) определим для вещественных значений ζ производную

$$\frac{\overline{\partial z_1}}{\partial\zeta} = \frac{q_0\pi}{8m}\frac{1}{\operatorname{sh}^2\frac{1}{4}(\zeta-i)\pi} \tag{1.19}$$

Составим функцию

$$\Phi_1(\zeta) = z_1\frac{\overline{\partial z_1}}{\partial\zeta} = -\frac{q_0^2\pi}{16m^2}\frac{\operatorname{cth}\frac{1}{4}\pi(\zeta+i)}{\operatorname{sh}\frac{1}{4}\pi(\zeta-i)}$$

Аналогично тому, как мы это сделали при вычислении функции $\Phi(\zeta)$, можно показать, что имеет место формула

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{1}{4}\pi(\zeta-i)} = \frac{2i}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\alpha\zeta}{\operatorname{sh}\alpha}d\alpha$$

Поэтому для $\zeta=\xi$ получаем, что

$$\operatorname{Im}\left(z_1\frac{\overline{\partial z_1}}{\partial\zeta}\right)=-\frac{q_0^2}{4m^2}\int\limits_0^\infty\frac{\cos\alpha\zeta}{\operatorname{ch}\alpha}\,d\alpha \tag{1.20}$$

С другой стороны, дифференцируя по ζ равенство (1.18), найдем

$$\operatorname{Im}\left(i\,\frac{\partial z_1}{\partial\zeta}\right)=-\frac{q_0}{m\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\alpha\cos\alpha\zeta}{\operatorname{ch}\alpha}\,d\alpha \tag{1.21}$$

Наконец, дифференцируя (1.6) и выделяя мнимую часть коэффициента при t^2, найдем

$$\operatorname{Im}z_2=-\int\limits_0^\infty A_2\operatorname{sh}\alpha\cos\alpha\zeta\,d\alpha \tag{1.22}$$

Условие для функции z_2, которому она должна удовлетворять при $\zeta=\xi$, дано в работе [1] в виде формулы (2.11)

$$\operatorname{Im}(z_2)+\operatorname{Im}\left(z_1\frac{\overline{\partial z_1}}{\partial\zeta}\right)=-\frac{1}{m}\operatorname{Im}(W_1)+\frac{\varkappa}{m}\operatorname{Im}\left(i\,\frac{\partial z_1}{\partial\zeta}\right) \tag{1.23}$$

Подставив сюда (1.20) — (1.22), а также выражение W_1 из (1.13), найдем для A_2 уравнение

$$-2A_2\operatorname{sh}\alpha-\frac{q_0^2}{4m^2}\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}=-\frac{\varkappa}{m}\frac{\alpha A_1}{\operatorname{ch}\alpha}-\frac{q_1}{\pi m}\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}-\frac{q_0}{m\pi}\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}A_2\operatorname{sh}\alpha&=-\frac{\pi q_0^2+4mq_1}{8\pi m^2}\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}+\frac{\varkappa q_0}{2m^2\pi}\frac{\alpha}{\operatorname{ch}^2\alpha\operatorname{sh}\alpha}\\ A_2\operatorname{ch}\alpha&=-\frac{\pi q_0^2+4mq_1}{8\pi m^2}\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}+\frac{\varkappa q_0}{2m^2\pi}\frac{\alpha}{\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}^2\alpha}\end{aligned} \tag{1.24}$$

Последнее выражение подставим в формулу для z_2, имеющую вид

$$z_2=\int\limits_0^\infty A_2\operatorname{ch}\alpha\sin\alpha\zeta\,d\alpha-i\int\limits_0^\infty A_2\operatorname{sh}\alpha\cos\alpha\zeta\,d\alpha \tag{1.25}$$

Здесь нам понадобится знание некоторых интегралов. Один из них получим, дифференцируя равенство (1.10) по ζ:

$$\int\limits_0^\infty\frac{\alpha\sin\alpha\zeta}{\operatorname{ch}\alpha}\,d\alpha=\frac{\pi^2 i}{16}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}^2{}^1\!/_4\,\pi(\zeta+i)}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2{}^1\!/_4\,\pi(\zeta-i)}\right] \tag{1.26}$$

Другой интеграл имеет вид

$$\int\limits_0^\infty\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}\operatorname{th}^2\alpha\cos\alpha\zeta\,d\alpha=-\frac{\partial}{\partial\zeta}\int\limits_0^\infty\sin\alpha\zeta\,d\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}=\frac{\partial}{\partial\zeta}\int\limits_0^\infty\zeta\frac{\cos\alpha\zeta}{\operatorname{ch}\alpha}\,d\alpha= \tag{1.27}$$

$$=-\frac{\pi}{4i}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4}-\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta-i)}{4}\right]-\frac{\pi^2 i}{16}\zeta\left[\frac{1}{\operatorname{sh}^2{}^1\!/_4\,\pi(\zeta+i)}-\frac{1}{\operatorname{sh}^2{}^1\!/_4\,\pi-i(\zeta)}\right]$$

Подставив в (1.25) выражение (1.24) и использовав равенства (1.26) и (1.27), найдем

$$z_2 = -\frac{\pi q_0^2 + mq_1}{16m^2} \operatorname{cth} \frac{\pi(\zeta+i)}{4} + \frac{\varkappa q_0}{4m^2}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4} - \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta-i)}{4}\right] -$$

$$-\frac{\varkappa q_0 \pi}{16m^2}(\zeta - i)\left[\frac{1}{\operatorname{sh}^2 {}^1/_4\pi(\zeta+i)} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 {}^1/_4\pi(\zeta-i)}\right] \tag{1.28}$$

Нетрудно убедиться, что в точке $\zeta = i$ функция остается регулярной.

Перейдем к определению постоянных q_0 и q_1. Интегрируя равенство (1.6), найдем

$$w = -\frac{\varkappa}{\mu} p_* + \varkappa i\zeta + \frac{p}{2\pi}\log\frac{\operatorname{sh}{}^1/_4\pi(\zeta+i)}{\operatorname{sh}{}^1/_4\pi(\zeta-i)} + i\int_0^\infty \frac{B\sin\alpha\zeta}{\alpha}\,d\alpha$$

Здесь p_* — давление на контуре области, т. е. на свободной поверхности; для давления p^* на поверхности трубы в точке $z = i + \delta$, где δ — радиус трубы, получим

$$-\frac{\varkappa}{\mu}p^* = -\frac{\varkappa}{\mu}p_* - \varkappa + \frac{q}{2\pi}\log\frac{4}{\pi\delta}$$

Разлагая q и $(dz/d\zeta)_i$ в ряды по степеням t, найдем

$$q\log\left(\frac{\partial z}{\partial\zeta}\right)_i = q_0\left(\frac{\partial z_1}{\partial\zeta}\right)_i t + \left[q_0\left(\frac{\partial z_2}{\partial\zeta}\right)_i - \frac{1}{2}q_0\left(\frac{\partial z_1}{\partial\zeta}\right)_i^2 + q_1\left(\frac{\partial z_1}{\partial\zeta}\right)_i\right]t^2 + \ldots$$

Приравнивая между собой свободные от t члены и коэффициенты при t, найдем

$$-\frac{\varkappa}{\mu}p^* = -\frac{\varkappa}{\mu}p_* - \varkappa + \frac{q_0}{2\pi}\log\frac{4}{\pi\delta}, \qquad 0 = q_1\log\frac{4}{\pi\delta} - \frac{q_0^2\pi}{8m} - 2\pi\int_0^\infty B_1\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

Пользуясь равенством

$$\int_0^\infty B_1\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\alpha}\,d\alpha = -\frac{\varkappa q_0}{m\pi}\int_0^\infty\frac{d\alpha}{\operatorname{ch}^2\alpha} = -\frac{\varkappa q_0}{m\pi}$$

из последних соотношений найдем

$$q_0 = \frac{2\pi\varkappa(1+\Delta p/\gamma)}{\log(4/\pi\delta)} \qquad (\Delta p = p_* - p^*), \qquad q_1 = \frac{q_0(\pi q_0 - 8\varkappa)}{8m\log(4/\pi\delta)} \tag{1.29}$$

Выпишем теперь выражение для ординаты y точки A в зависимости от времени. Принимая во внимание, что по формулам (1.19) и (1.28) при $\zeta = 0$

$$y_1 = \frac{q_0}{2m}, \qquad y_2 = \frac{\pi q_0^2 + 4mq_1 - 4\varkappa q_0}{16m^2}$$

получим

$$y = \frac{q_0}{2m}t + \frac{\pi q_0^2 + 4mq_1 - 4\varkappa q_0}{16m^2}t^2 + \ldots \tag{1.30}$$

2. Одиночная дрена над водоупором. Строим функцию

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \varkappa i + \frac{q}{2H}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ih)}{4H} - \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta-ih)}{4H}\right] +$$

$$+\frac{q}{8H}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ic)}{4H} - \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta-ic)}{4H}\right] + i\int_0^\infty B\cos\alpha\zeta\, d\alpha \tag{2.1}$$

причем $c = 2H - h$ (фиг. 2).

Функцию z ищем в виде интеграла

$$z = \zeta + \int_0^\infty A\sin\alpha(\zeta - iH)\, d\alpha \tag{2,2}$$

Условие, что при $\zeta = iH + \xi$

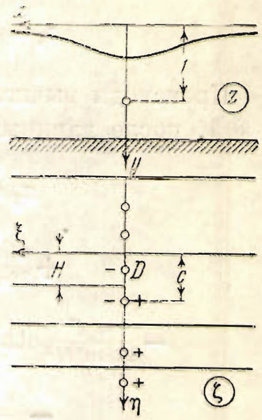
$$\operatorname{Im}\left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} - \varkappa i\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) = 0$$

дает

$$B = \frac{\varkappa\alpha}{\operatorname{ch}\alpha H}A, \qquad A = A_1 t + A_2 t^2 + \ldots \tag{2.3}$$

так что

$$z_n = \int_0^\infty A_n \sin\alpha(\zeta - iH)\, d\alpha \tag{2.4}$$



Фиг. 2.

В условии (1.2) при $\zeta = \xi$ последний член имеет вид

$$\operatorname{Im}\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \varkappa + \frac{q}{2H}\operatorname{Im}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ih)}{4H} + \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ic)}{4H}\right] + \operatorname{Im}\left(i\int_0^\infty B\cos\alpha\zeta\, d\alpha\right) \tag{2.5}$$

Положим

$$h = h_1 t + h_2 t^2 + \ldots,$$

$$c = 2H - 1 - h_1 t - h_2 t^2 - \ldots - c_0 - h_1 t - h_2 t^2 + \ldots$$

тогда

$$\operatorname{cth}\frac{\pi}{4H}[\zeta + i + it(h_1 + h_2 t + \ldots)] = \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4H} - \frac{i\pi h_1 t}{4H}\operatorname{cosech}^2\frac{\pi}{4H}(\zeta+i) + \ldots$$

$$\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ic)}{4H} = \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ic_0)}{4H} + \frac{i\pi h_1 t}{4H}\operatorname{cosech}^2\frac{\pi(\zeta+ic_0)}{4H} + \ldots$$

Далее, принимая во внимание ряд для q, получим

$$q\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ih)}{4H} + \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ic)}{4H}\right] = q_0\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4H} + \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ic_0)}{4H}\right. +$$

$$+ t\left\{q_1\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4H} + \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ic_0)}{4H}\right] -\right.$$

$$-\frac{i\pi h_1 q_0}{4H}\left[\operatorname{cosech}^2\frac{\pi(\zeta+i)}{4H} - \operatorname{cosech}^2\frac{\pi(\zeta+ic_0)}{4H}\right] + \ldots$$

Для определения z_1 имеем условие

$$\operatorname{Im} z_1 = -\frac{q_0}{4H} \operatorname{Im}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4H} + \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ic_0)}{4H}\right] \tag{2.6}$$

Это условие выполняется не только при $\zeta=\xi$, но и при $\zeta=iH+\xi$, т. е. на границах полосы $-H\leqslant\eta\leqslant+H$.

Так как входящие в (2.6) функции регулярны в указанной полосе, то находим

$$z_1 = -\frac{q_0}{4mH}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4H} + \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ic_0)}{4H}\right] \tag{2.7}$$

Производя вычисления, аналогичные тем, которые мы производили в § 1, после длинных преобразований придем к формуле

$$\begin{aligned} z_2 = M &\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+i)}{4H} + \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta+ic_0)}{4H}\right] + \\ &+\frac{\pi i h_1 q_0}{32mH^2}\left[\operatorname{cosech}^2\frac{\pi(\zeta+i)}{4H} - \operatorname{cosech}^2\frac{\pi(\zeta+ic_0)}{4H}\right] - \\ &-\frac{\pi i q_0^2}{128m^2H^3}\operatorname{cth}\frac{\pi}{2H}\left[\operatorname{cosech}^2\frac{\pi(\zeta+i)}{4H} + \operatorname{cosech}^2\frac{\pi(\zeta+ic_0)}{4H}\right] - \\ &-\frac{\varkappa q_0}{16m^2H^2}\left[\operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta-1)}{4H} + \operatorname{cth}\frac{\pi(\zeta-ic_0)}{4H}\right] - \\ &-\frac{\varkappa q_0\pi}{64m^2H^3}\left\{(\zeta-ic_0)\left[\operatorname{cosech}^2\frac{\pi(\zeta+i)}{4H} - \operatorname{cosech}^2\frac{\pi(\zeta-ic_0)}{4H}\right] - \right. \\ &\left. -(\zeta-i)\left[\operatorname{cosech}^2\frac{\pi(\zeta-i)}{4H} - \operatorname{cosech}^2\frac{\pi(\zeta+ic_0)}{4H}\right]\right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь q_0 и q_1 имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{2\pi\varkappa(1+\Delta p/\gamma)}{\log(4/\pi\delta)+\log\sin(\pi c_0/4H)}, \\ q_1 &= \frac{q_0^2\pi - 16\varkappa q_0}{16m\,[\log(4/\pi\delta)+\log\sin(\pi c_0/4H)]} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Калинин Н. К. и Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившемся движении грунтовых вод со свободной поверхностью. ПММ. 1947. Т. XI.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившемся движении в теории фильтрации. ПММ. 1945. Т. IX. Стр. 79—90.