Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ

Ю. П. Виноградов, П. П. Куфарев

(Томск)

В работе рассматривается следующая задача из теории плоских неустановившихся течений жидкости.

В несжимаемой жидкости, заполняющей некоторую меняющуюся во времени τ однолистную область G_τ, в точке $z=z_0=0$ имеется источник (сток), мощность которого $2\pi q(\tau)$ в общем случае также переменна. Известно, что в течение некоторого промежутка времени потенциал скорости имеет постоянное значение на границе C_τ области G_τ. Требуется определить характер движения и вид области G_τ, если в начальный момент $\tau=0$ область G_0, занимаемая жидкостью, задана.

По существу к этому вопросу сводится в простейшем случае одной скважины задача о фильтрации нефти в постановке Л. С. Лейбензона [1]. Задача изучалась ранее П. Я. Кочиной [2,3] (в более общей постановке) и Л. А. Галиным [4].

В данной работе мы, основываясь на результатах П. Я. Кочиной и Л. А. Галина, сводим задачу к определению решения системы интегродифференциальных уравнений. Исследование этих уравнений позволяет сделать в первом, простейшем, случае некоторые выводы о существовании и характере решения граничной задачи, к которой рассматриваемая задача гидромеханики сведена П. Я. Кочиной, и вместе с тем обосновать два способа решения задачи[1].

§ 1. Основное граничное условие.[2] Будем считать мощность источника $2\pi q(\tau)$ отрицательной (сток). К случаю положительного источника можно перейти, заменяя τ на $-\tau$. Введем вместо τ новый аргумент

$$t=-\int_0^\tau q(\tau)\,d\tau \tag{1.1}$$

Обозначим через $z=f(w,t)$ функцию, отображающую круг $|w|<1$ на область $G(t)\equiv G_{\tau(t)}$, и через $w=g(z,t)$ обратную функцию. Считаем, что $f(0,t)=0$ и $f_w'(0,t)>0$. Комплексный потенциал течения будет

$$W=\varphi+i\psi=q\log w=q\log g(z,t) \tag{1.2}$$

---

[1] Мы выражаем благодарность П. Я. Кочиной, переписка с которой по поводу этой работы была для нас очень ценна.

[2] Вывод граничного условия дан П. Я. Кочиной (в общем случае любого числа источников) и Л. А. Галиным.

и, следовательно, для скорости частицы жидкости в точке z, имеем

$$v=\frac{dz}{d\tau}=\overline{\frac{\partial W}{\partial z}}=\overline{\frac{q}{w}\frac{\partial w}{\partial z}} \tag{1.3}$$

С другой стороны, из (1.1)

$$v=\frac{dz}{d\tau}=\frac{dz}{dt}\frac{dt}{d\tau}=-q\left(\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}\right) \tag{1.4}$$

где под w следует понимать ту точку круга $|w|\leqslant 1$, в которую переходит при отображении $z=f(w, t)$ точка z, характеризующая положение рассматриваемой частицы жидкости. Из (1.3) и (1.4), имея в виду, что произведение $(\partial z/\partial w)(\partial w/\partial z)=1$, находим

$$\overline{w}\,\frac{\partial z}{\partial t}\overline{\frac{\partial z}{\partial w}}+\left|w\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2\frac{d\log w}{dt}=-1 \tag{1.5}$$

В частности, для частиц, находящихся на границе области $G(t)$

$$\frac{1}{w}\frac{\partial z}{\partial t}\overline{\frac{\partial z}{\partial w}}+i\left|w\frac{\partial z}{\partial w}\right|^2\frac{d\arg w}{dt}=-1 \tag{1.6}$$

так как на границе $|w|=1$, $\overline{w}=w^{-1}$ и $d\log|w|/dt=0$.

Отсюда получаем основное граничное условие задачи в виде

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{w}\frac{\partial z}{\partial t}\overline{\frac{\partial z}{\partial w}}\right]=-1 \quad \text{при} \quad w=\omega=e^{i\theta} \tag{1.7}$$

или

$$\frac{1}{\omega}z_t'(\omega, t)\,\overline{z}_w'(\omega^{-1}, t)+\omega\overline{z}_t'(\omega^{-1}, t)\,z_w'(\omega, t)=-2 \tag{1.8}$$

§ 2. Уравнение для производной $\partial w/\partial z=\nu$. Из (1.7) следует, что на круге $|w|=1$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{w}\frac{z_t'}{z_w'}\right]=-\left|\frac{\partial z}{\partial w}\right|^{-2}=-|\nu|^2 \tag{2.1}$$

Отсюда, выражая аналитическую в $|w|<1$ функцию $(1/w)(z_t'/z_w')$ через граничные значения ее вещественной части по формуле Шварца, находим для z уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial t}+wP(w, t)\frac{\partial z}{\partial w}=0 \tag{2.2}$$

Здесь (предполагая, что граничные значения функции $\nu(w, t)$ удовлетворяют условию Гёльдера)

$$P(w, t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\nu(\omega, t)\,\overline{\nu}(\omega^{-1}, t)\frac{\omega+w}{\omega-w}\frac{d\omega}{\omega} \tag{2.3}$$

причем γ — окружность $|\omega|=1$. Из уравнения (2.2) путем дифференцирования по w находим уравнение

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}=\nu\frac{\partial(wP)}{\partial w}-wP\frac{\partial\nu}{\partial w} \tag{2.4}$$

в котором $P(w, t)$ зависит от граничных значений функции $\nu(w, t)$.

Обратно, если $\nu(w, t)$—решение уравнения (2.4), удовлетворяющее начальному условию $\nu(w, 0) = \nu_0(w) \neq 0$ и $\nu_0(0) \neq 0$, то

$$z(w, t) = \int_0^w \frac{dw}{\nu(w, t)} \tag{2.5}$$

является решением граничной задачи (1.8), удовлетворяющим начальному условию

$$z(w, 0) = \int_0^w \frac{dw}{\nu_0(w)} \tag{2.6}$$

§ 3. Расширение области значений аргумента *t*. До сих пор предполагалось, что аргумент t принимает только вещественные значения. Однако, если рассматривать функции $z(w, t)$, голоморфные [1] (относительно w и t) в некотором бицилиндре

$$D(r_0, t_0) \qquad (|w| < r_0,\ |t| < t_0,\ r_0 \geqslant 1,\ t_0 > 0) \tag{3.1}$$

то уравнения (1.8), (2.2), (2.3), (2.4) имеют смысл и для комплексных t. При этом эквивалентность уравнения (2.4) — (2.3) и граничного условия (1.8) при условии Гёльдера сохраняется. Действительно, деля (1.8) на

$$2\pi i\, z_w'(\omega, t)\, \bar{z}_w'(\omega^{-1}, t) \frac{\omega(\omega - w)}{\omega + w} \qquad (|w| < 1)$$

интегрируя по γ, пользуясь формулами

$$\begin{gathered} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{\omega}\frac{z_t'(\omega, t)}{z_w'(\omega, t)}\frac{\omega + w}{\omega - w}\frac{d\omega}{\omega} = \frac{2}{w}\frac{z_t'(w, t)}{z_w'(w, t)} - \lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}\frac{z_t'(\omega, t)}{z_w'(\omega, t)} \\ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \omega\frac{\bar{z}_t'(\omega^{-1}, t)}{\bar{z}_w'(\omega^{-1}, t)}\frac{\omega + w}{\omega - w}\frac{d\omega}{\omega} = \lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}\frac{\bar{z}_t'(\omega, t)}{\bar{z}_w'(\omega, t)} \end{gathered} \tag{3.2}$$

и учитывая еще, что в силу условий $z(0, t) = 0$, $z_w'(0, t) > 0$, при вещественных t

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\omega}\left[\frac{z_t'(\omega, t)}{z_w'(\omega, t)} - \frac{\bar{z}_t'(\omega, t)}{\bar{z}_w'(\omega, t)}\right] = \frac{d\log z_w'(0, t)}{dt} - \frac{d\log \bar{z}_w'(0, t)}{dt} = 0 \tag{3.3}$$

(не только для вещественных, но и комплексных t), получим уравнение (2.2), следовательно, и (2.4). Наоборот, из уравнения (2.2) имеем

$$\begin{gathered} \frac{1}{w}\frac{z_t'(w, t)}{z_w'(w, t)} = -\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\nu(\omega, t)\bar{\nu}(\omega^{-1}, t)}{\omega - w}d\omega + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \nu(\omega, t)\bar{\nu}(\omega^{-1}, t)\, d\omega, \quad |dw| < 1 \\ w\frac{\bar{z}_t'(w^{-1}, t)}{\bar{z}_w'(w^{-1}, t)} = \frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{\nu(\omega, t)\nu(\omega^{-1}, t)}{\omega - w}d\omega - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \nu(\omega, t)\bar{\nu}(\omega^{-1}, t)\, d\omega, \quad |w| > 1 \end{gathered} \tag{3.4}$$

Переходя в этих формулах к пределу $w \to \omega_0$, $|\omega_0| = 1$ по формулам Племеля [2] и складывая предельные значения, получаем граничное условие (1.8). Всюду далее считаем аргумент t комплексным.

---

[1] Можно также рассматривать функции $z(w, t)$, мероморфные в $D(r_0, t_0)$ и голоморфные в $w = 0$, $t = 0$.

[2] См. И. И. Привалов [5], стр. 142 или Н. И. Мусхелишвили [6], стр. 47.

§ 4. Интегродифференциальные уравнения. Как будет далее показано, уравнение (2.4) в некоторых наиболее простых случаях связано системой интегродифференциальных уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial t}=x\int\limits_{C_\zeta}\int\limits_{C_\eta}\frac{(1+xz_1)\,YZ_1}{(1-xz_1)(1-yz_1)}\,d\eta\,d\zeta$$

$$\frac{\partial X}{\partial t}=-2X\int\limits_{C_\zeta}\int\limits_{C_\eta}\left[\frac{1}{1-yz_1}+\frac{2(x+y-xyz_1)}{(x-y)(1-xz_1)(1-yz_1)}\right]YZ_1\,d\eta\,d\zeta \qquad (4.1)$$

где интеграл по η понимается в смысле главного значения и обозначено

$$\begin{array}{lll} x=x(\xi,t), & y=x(\eta,t), & z_1=\overline{x}(\overline{\zeta},t)\\ X=X(\xi,t), & Y=X(\eta,t), & Z_1=\overline{X}(\overline{\zeta},t)\end{array} \qquad (4.2)$$

и C_η — окружность $|\eta|=r$, а C_ζ — окружность $|\zeta|=r$, $r>1$.

Систему функций $x(\xi,t)$, $X(\xi,t)$, удовлетворяющих уравнениям (4.1) в области K_{t_0}, $|\xi|=r$, $|t|<t_0$, $t_0>0$, будем называть правильным решением системы (4.1) в области K_{t_0}, если в этой области:

1) функция $x(\xi,t)$ и ее производные до третьего порядка включительно голоморфны относительно t и равномерно ограничены

$$\left|\frac{\partial^{k+l}x}{\partial\xi^k\partial t^l}\right|\leqslant B<\infty \qquad (k,l=0,\,1,\,2,\,3;\ 0\leqslant k+l\leqslant 3) \qquad (4.3)$$

2) функция $X(\xi,t)$ также голоморфна относительно t и удовлетворяет условию Гёльдера (в дальнейшем обозначаемому буквой H)

$$|X(\xi_1,t)-X(\xi_2,t)|\leqslant H|\xi_1-\xi_2|^\mu \qquad (0<\mu<1) \qquad (4.4)$$

В § 9—12 дано доказательство *теоремы* 1: *пусть* $r>1$ *и* $X_0(\xi)$ — *функция, определенная на* C_ξ *и удовлетворяющая на* C_ξ *условию* H

$$|X_0(\xi_1)-X_0(\xi_2)|\leqslant H_0|\xi_1-\xi_1|^\mu \qquad (0<\mu<1) \qquad (4.5)$$

Тогда при достаточно малом t_0 *система* (4.1) *имеет в* K_{t_0} *единственное правильное решение, удовлетворяющее начальным условиям*

$$x(\xi,0)=\xi, \qquad X(\xi,0)=X_0(\xi)$$

Дальнейшие выводы основываются на этой теореме.

§ 5. Связь между решениями системы (4.1) **и уравнения** (2.4). *Теорема* 2. *Пусть* $x(\xi,t)$, $X(\xi,t)$ — *правильное в* K_{t_1} *решение системы* (4.1), *удовлетворяющее условию* $|x(\xi,t)|>r_1>1$ *в области* K_{t_1}. *Функция*

$$\nu(w,t)=\int\limits_{C_\xi}\frac{X(\xi,t)}{w-x(\xi,t)}\,d\xi \qquad (5.1)$$

голоморфна в бицилиндре $D(r_1,t_1)$ *и является в* $D(r_1,t_1)$ *решением уравнения* (2.4)[1].

---

[1] Легко показать, что если функция $\nu(w,t)$ голоморфна в $D(r_1,t_1)$, $r_1>1$, то функция $P(w,t)$, определяемая согласно (2.3), также голоморфна не только в $D(1,t_1)$, но и в $D(r_1,t_1)$, так что (2.4) имеет смысл в $D(r_1,t_1)$ (см. также (5.3).

Доказательство. Голоморфность $\nu(w, t)$ в $D(r_1, t_1)$ следует из того, что $x(\xi, t)$, $X(\xi, t)$ голоморфны по t при $|\xi| = r$ в $|t| < t_1$ (по определению правильного решения) и из условий теоремы $|x(\xi, t)| > r_1 > 1$.

Подставляя выражение (5.1) в формулу (2.3), находим

$$P(w, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \int\limits_{C_\zeta} \int\limits_{C_\xi} \frac{X(\xi, t)}{\omega - x(\xi, t)} \frac{\overline{X}(\zeta, t)}{\omega^{-1} - \overline{x}(\zeta, t)} \frac{\omega + w}{\omega - w} d\xi\, d\overline{\zeta} \frac{d\omega}{w} =$$

$$= -\int\limits_{C_\zeta} \int\limits_{C_\xi} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\omega + w}{(\omega - x)(\omega^{-1} - z_1)(\omega - w)} \frac{d\omega}{\omega} \right] X Z_1\, d\xi\, d\zeta \qquad (5.2)$$

или, подсчитывая внутренний интеграл (причем следует учесть, что $|x| > r_1 > 1$, $|z_1| > r_1 > 1$), имеем

$$P = -\int\limits_{C_\zeta} \int\limits_{C_\xi} \frac{X Z_1}{1 - x z_1} \frac{w + x}{w - x} d\xi\, d\zeta \qquad (5.3)$$

Отсюда

$$Pw = -\int\limits_{C_\xi} \int\limits_{C_\zeta} \frac{X Z_1}{1 - x z_1} \left(\frac{2x^2}{w - x} + 2x + w \right) d\xi\, d\zeta$$

$$\frac{\partial (Pw)}{\partial w} = \int\limits_{C_\zeta} \int\limits_{C_\xi} \left[\frac{2x^2}{(w - x)^2} - 1 \right] \frac{X Z_1}{1 - x z_1} d\xi\, d\zeta \qquad (5.4)$$

Из (5.1) и (5.4) следует, что

$$\nu \frac{\partial (wP)}{\partial w} - wP \frac{\partial \nu}{\partial w} = J_1 + J_2 \qquad (5.5)$$

где

$$J_1 = -\int\limits_{C_\xi} \int\limits_{C_\eta} \int\limits_{C_\zeta} \left[\frac{2x + y}{(w - y)^2} + \frac{2}{w - y} \right] \frac{X Y Z_1}{1 - x z_1} d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= -\int\limits_{C_\xi} \int\limits_{C_\eta} \int\limits_{C_\zeta} \left[\frac{2y + x}{(w - x)^2} + \frac{2}{w - x} \right] \frac{X Y Z_1}{1 - y z_1} d\xi\, d\eta\, d\zeta \qquad (5.6)$$

$$J_2 = \int\limits_{C_\xi} \int\limits_{C_\eta} \int\limits_{C_\zeta} \frac{2x^2 X Y Z_1\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(w - x)^2 (w - y)(1 - x z_1)} - \int\limits_{C_\xi} \int\limits_{C_\eta} \int\limits_{C_\zeta} \frac{2x^2 X Y Z_1\, d\xi\, d\eta\, d\zeta}{(w - y)^2 (w - x)(1 - x z_1)}$$

Заменяя несколько раз в интегралах ξ на η и η на ξ и применяя еще разложение дроби на простейшие, имеем

$$J_2 = \int\limits_{C_\xi} \int\limits_{C_\eta} \int\limits_{C_\zeta} \left(\frac{x^2}{1 - x z_1} - \frac{y^2}{1 - y z_1} \right) \frac{2 X Y Z_1}{(w - x)^2 (w - y)} d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_{C_\xi} \int\limits_{C_\eta} \int\limits_{C_\zeta} \frac{2(x - y)(x + y - x y z_1) X Y Z_1}{(w - x)^2 (w - y)(1 - x z_1)(1 - y z_1)} d\xi\, d\eta\, d\zeta = \qquad (5.7)$$

$$= \int\limits_{C_\xi} \int\limits_{C_\eta} \int\limits_{C_\zeta} \frac{x + y - x y z_1}{(w - x)(w - y)(1 - x z_1)(1 - y z_1)} \left(\frac{x - y}{w - x} + \frac{y - x}{w - y} \right) X Y Z_1\, d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$= \int\limits_{C_\xi} \int\limits_{C_\eta} \int\limits_{C_\zeta} \frac{(x - y)^2 (x + y - x y z_1) X Y Z_1}{(w - x)^2 (w - y)^2 (1 - x z_1)(1 - y z_1)} d\xi\, d\eta\, d\zeta =$$

$$=\int\limits_{C_\xi}\int\limits_{C_\eta}\int\limits_{C_\zeta}\left[\frac{1}{(w-x)^2}+\frac{1}{(w-y)^2}+\frac{2}{(x-y)(w-y)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{(y-x)(w-x)}\right]\frac{x+y-xyz_1}{(1-xz_1)(1-yz_1)}XYZ_1\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=$$

$$=2\int\limits_{C_\xi}\int\limits_{C_\eta}\int\limits_{C_\zeta}\left[\frac{1}{(w-x)^2}+\frac{2}{(y-x)(w-x)}\right]\frac{x+y-xyz_1}{(1-xz_1)(1-yz_1)}XYZ_1\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$$

Складывая последнее выражение с J_1, получим окончательно

$$\nu\frac{\partial(wP)}{\partial w}-wP\frac{\partial\nu}{\partial w}=\int\limits_{C_\xi}\int\limits_{C_\eta}\int\limits_{C_\zeta}\frac{x(1+xz_1)}{(1-xz_1)(1-yz_1)}\frac{1}{(w-x)^2}XYZ_1\,d\xi\,d\eta\,d\zeta-$$

$$-\int\limits_{C_\xi}\int\limits_{C_\eta}\int\limits_{C_\zeta}\left[\frac{2}{1-yz_1}+\frac{4(x+y-xyz_1)}{(x-y)(1-xz_1)(1-yz_1)}\right]\frac{XYZ_1}{w-x}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \tag{5.8}$$

С другой стороны, из (5.1) имеем

$$\frac{\partial\nu}{\partial t}=\int\limits_{C_\xi}\frac{X}{(w-x)^2}\frac{\partial x}{\partial t}\,d\xi+\int\limits_{C_\xi}\frac{1}{w-x}\frac{\partial X}{\partial t}\,d\xi \tag{5.9}$$

В силу (4.1) выражения (5.9) и (5.8) равны; следовательно, функция (5.1) является решением уравнения (2.4), что и требовалось доказать.

Следствие (теорема 2а). Если $x(\xi, t)$, $X(\xi, t)$ — правильное в области K_{t_0} $(t_0>0)$ решение системы (4.1), удовлетворяющее начальным условиям $x(\xi, 0)=\xi$, $X(\xi,0)=X_0(\xi)$ и $r_1<r$, $r_1>1$, то при достаточно малом $t_1\leqslant t_0$ функция (5.1) голоморфна и является решением уравнения (2.4) в бицилиндре $D(r_1, t_1)$.

При достаточно малом t_1 условие $|x(\xi, t)|>r_1>1$ в области K_{t_1} удовлетворяется в силу начального условия $|x(\xi,0)|=r>r_1$ и равномерной непрерывности $x(\xi, t)$.

§ 6. Решение задачи. *Теорема 3. Пусть функция $\nu_0(w)$ голоморфна в круге $|w|\leqslant r$, $r>1$ и пусть $r_1<r$, $r_1\geqslant 1$. Тогда при достаточно малом $t_1>0$ в бицилиндре $D(r_1, t_1)$ существует единственное голоморфное решение $\nu(w, t)$ уравнения (2.4), удовлетворяющее начальному условию $\nu(w,0)=\nu_0(w)$. Если, кроме того, функция $\nu_0(w)$ не принимает в круге $|w|\leqslant r$ значения нуль, то при достаточно малом $t_2\leqslant t_1$ решение $\nu(w, t)$ также не принимает в $D(r_1, t_2)$ значения нуль.*

Доказательство. Так как $\nu_0(w)$ голоморфна в $|w|\leqslant r$, то ее значения на $|w|=r$ удовлетворяют (4.4). Поэтому, по теореме 1, в некоторой области K_{t_0}, $t_0>0$, существует правильное решение $x(\xi, t)$, $X(\xi, t)$ системы (4.1), удовлетворяющее начальным условиям

$$x(\xi, 0)=\xi, \qquad X(\xi, 0)=-\frac{\nu_0(\xi)}{2\pi i} \tag{6.1}$$

По теореме 2а функция

$$\nu(w, t)=\int\limits_{C_\xi}\frac{X(\xi, t)}{w-x(\xi, t)}\,d\xi \tag{6.2}$$

при достаточно малом $t_1 > 0$ является голоморфным в $D(r_1, t_1)$ решением уравнения (2.4). Она удовлетворяет начальному условию, так как

$$\nu(w, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\xi} \frac{\nu_0(\xi)\, d\xi}{\xi - w} = \nu_0(w) \tag{6.3}$$

Наконец, если $\nu(w, 0) = \nu_0(w) \neq 0$, $|\nu(w, 0)| \geqslant m > 0$ при $|w| \leqslant r'$ то, в силу непрерывности $\nu(w, t)$, при достаточно малом $t_2 > 0$ в бицилиндре $D(r_1, t_2)$ имеем $\nu(w, t) \neq 0$.

Остается доказать единственность голоморфного решения. Пусть $\nu^*(w, t)$ — голоморфное в $D(r_1, t_1)$ решение уравнения (2.4), удовлетворяющее начальному условию $\nu(w, 0) = \nu_0(w)$. Такое решение можно разложить в равномерно внутри $D(r_1, t_1)$ сходящийся ряд вида

$$\nu^*(w, t) = \nu_0(w) + t\nu_1(w) + \ldots + t^n \nu_n(w) + \ldots \tag{6.4}$$

где $\nu_n(w)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — функции, голоморфные в $|w| < r_1$. Подставляя ряд (6.4) в уравнение (2.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой части уравнения, находим для определения функции $\nu_n(w)$ рекуррентные формулы

$$n + 1)\nu_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\nu_{n-k} \frac{\partial (wP_k)}{\partial w} - wP_k \frac{\partial \nu_{n-k}}{\partial w} \right) \tag{6.5}$$

где

$$P_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \sum_{m=0}^{k} \nu_m(\omega)\, \nu_{k-m}(\omega^{-1}) \frac{\omega + w}{\omega - w} \frac{d\omega}{\omega} \tag{6.6}$$

Так как по этим формулам функции $\nu_1(w), \nu_2(w), \ldots$ последовательно определяются при заданной функции $\nu_0(w)$ единственным образом, то отсюда следует, что

$$\nu^*(w, t) \equiv \nu(w, t) \tag{6.7}$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Теорема 3а. Пусть $z_0(w)$, $z_0(0) = 0$, $z_0'(0) > 0$ *мероморфна в круге* $|w| \leqslant r$, $r > 1$ *и* $z_0'(w) \neq 0$ *при* $|w| \leqslant r$. *При достаточно малом* $t_1 > 0$ *в бицилиндре* $D(r_1, t_1)$, $1 \leqslant r_1 < r$ *существует единственное мероморфное решение* $z(w, t)$ *уравнения* (2.2), *удовлетворяющее условиям*

$$z(w, 0) = z_0(w), \qquad z_w'(w, t) \neq 0 \qquad \text{в } D(r_1, t_1) \tag{6.8}$$

Если, в частности, $z_0(w)$ *голоморфна в круге* $|w| \leqslant r_0$, $r_1 < r_0 \leqslant r$ и $z_0'(w) \neq 0$, *то* $z(w, t)$ *при достаточно малом* t_1 *голоморфна в* $D(r_1, t_1)$.

§ 7. Однолистность решения. *Лемма. Пусть функция* $\widetilde{P}(w, t)$ *голоморфна и ограничена* в $D(r_0, t_0)$, $t_0 > 0$, $0 < r_0 < r$, *и пусть функция* $z = z_0(w)$, $z_0(0) = 0$, $z_0'(0) > 0$ *голоморфна и однолистна в* $|w| \leqslant r$. *При достаточно малом* $t_0' > 0$ *решение* $z(w, t)$ *уравнения*

$$\frac{\partial z}{\partial t} + w\widetilde{P}, (w, t)\frac{\partial z}{\partial w} = 0 \tag{7.1}$$

удовлетворяющее условию $z(w, 0) = z_0(w)$, *голоморфно в* $D(r_0', t_0')$, $r_0' < r_0$ *и отображает* $|w| \leqslant r_0'$ *на однолистные области* $G_{r_0'}(t)$.

Если, кроме того, $\operatorname{Re}\widetilde{P}(w,t)>0$ *при вещественных* t *в бицилиндре* $D(r_0', t_0')$, *то при* $-t_0'<t_1<t_2<t_0'$ (ср. [7])

$$G_{r_0'}(t_1)\supset G_{r_0'}(t_2) \tag{7.2}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для $z_0(w)=w$, так как общий случай сводится к этому заменой $z=z_0(z^*)$. В случае $z_0(w)\equiv w$ имеем $z(w,t)=\omega(0,w,t)$, где $\omega(\tau,w,t)$ — решение уравнения

$$\frac{d\omega}{d\tau}=\omega\,\widetilde{P}(\omega,\tau) \tag{7.3}$$

удовлетворяющее начальному условию $\omega(t,w,t)=w$.

Так как $\widetilde{P}(w,t)$ ограничена

$$|\widetilde{P}(w,t)|\leqslant M<\infty \qquad \text{при} \quad |w|<r_0,\ |t|<t_0 \tag{7.4}$$

то из (7.3) при

$$|w|<r_0', \qquad |t|<t_0'=\min\left(\frac{1}{2M}\log\frac{r_0}{r_0'},\ t_0\right), \qquad |\tau|<t_0'$$

имеем

$$\left|\frac{d\log|\omega|}{d\tau}\right|\leqslant M, \qquad |\omega(\tau,w,t)|\leqslant|w|\,e^{M(t-\tau)}\leqslant r_0'\,e^{2Mt_0'} \tag{7.5}$$

Значения, принимаемые $\omega(\tau,w,t)$, не выходят из области голоморфности правой части уравнения (7.3). Отсюда по теории дифференциальных уравнений следует, что при $|\tau|<t_0$ функция $\omega(\tau,w,t)$ голоморфна по w и t в $D(r_0', t_0')$. Наконец, если $\omega_1\equiv\omega(\tau,w_1,t)=\omega(t,w_2,t)=w_2$ при $|w_1|<r_0'$, $|w_2|<r_0'$, то по теореме единственности для уравнения (7.3) и $\omega_1\equiv\omega(t,w_1,\tau)=\omega(t,w_2,\tau)\equiv\omega_2$, следовательно, функция $\omega=\omega(\tau,w,t)$ однолистна в $|w|<r_0'$ (при $|\tau|<t_0'$, $|t|<t_0'$).

В частности, при $\tau=0$, получим в силу $z(w,t)=\omega(0,w,t)$, что $z(w,t)$ голоморфна в $D(r_0', t_0')$ и при любом t, $|t|<t_0'$ однолистна в $|w|<r_0'$.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть $\operatorname{Re}\widetilde{P}(w,t)>0$ при $|w|<r_0'$, $-t_0'<t<t_0'$, тогда согласно (7.3) при вещественных τ, t

$$\frac{d\log|\omega(\tau,w,t)|}{d\tau}>0 \tag{7.6}$$

Отсюда $|\omega(\tau,w,t)|>|w|$ при $w\neq 0$, $\tau>t$. Следовательно, функция $\omega=\omega(\tau,w,t)$ отображает круг $|w|<r_0'$ на область $B_\omega(\tau,t)$, содержащую $|w|<r_0'$ (при $\tau>t$). Далее, пусть $t_1<t_2<\tau$. Функция $\omega=\omega(\tau,w,t)$ отображает круг $|w|<r_0'$ на область $B_\omega(\tau,t_1)$. Но

$$\omega=\omega(\tau,w,t_1)=\omega(\tau,w',t_2), \qquad \text{где} \quad w'=\omega(t_2,w,t_1). \tag{7.7}$$

Функция $w'=\omega(t_2,w,t_1)$ отображает круг $|w|<r_0'$ на область $B_{w'}(t_2,t_1)\supset|w'|<r_0'$; функция $\omega=\omega(\tau,w',t_2)$ отображает $|w'|<r_0$ на $B_\omega(\tau,t_2)$ и вместе с тем $B_{w'}(t_2,t_1)$ на $B_\omega(\tau,t_1)$ согласно (7.7). Отсюда следует, что при $\tau>t_2>t_1$

$$B_\omega(\tau,t_2)\subset B_\omega(\tau,t_1) \tag{7.8}$$

Если $-t_0'<t_1<t_2\leqslant 0$, то, полагая теперь $\tau=0$ и учитывая, что $B_\omega(0,t)\equiv G_{r_0'}(t)$, имеем

$$G_{r_0'}(t_2)\subset G_{r_0'}(t_1) \tag{7.9}$$

Аналогично доказывается, что $G_{r_0'}(t_2) \subset G_{r_0'}(t_1)$ при $0 \leqslant t_1 < t_2 < t_0'$, а отсюда уже следует, что $G_{r_0'}(t_2) \subset G_{r_0}(t_1)$ при любых значениях t_1 и t_2 в интервале $(-t_0' < t_1 < t_2 < t_0')$.

Теорема 4. Пусть $z_0(w)$, $z_0(0)=0$, $z_0'(0)>0$ *голоморфна и однолистна в* $|w| \leqslant r$, $r>1$. *Тогда при достаточно малом* $t_0'>0$:

а) решение $z(w,t)$ *уравнения* (2.2), *удовлетворяющее начальному условию* $z(w,0)=z_0(w)$, *при* $|t|<t_0'$ *отображает круг* $|w|<1$ *на однолистную область* $G(t)$;

б) $G(t_2) \subset G(t_1)$ *при вещественных* $t_1, t_2 \, (-t_0' < t_1 < t_2 < t_0')$.

Доказательство. По теореме 3а при достаточно малом $t_0>0$ рассматриваемое решение $z(w,t)$ голоморфно в $D(r_0, t_0)$, $r_0=\sqrt{r}>1$ и $z_w'(w,t) \neq 0$ при $(w,t) \subset D(r_0, t_0)$. Следовательно,

$$\nu(w,t) = \frac{1}{z_w'(w,t)} \tag{7.10}$$

и определяемая (2.3) функция $P(w,t)$ также голоморфны в $D(r_0, t_0)$ (см. примечание на стр. 184). При этом $\operatorname{Re} P(w,t) > 0$ в $|w|<1$ при вещественных $t, -t_0 < t < t_0$. Таким образом, функции $P(w,t)$, $z_0(w)$ удовлетворяют условиям леммы, при $r_0=\sqrt{r}$, $r_0'=1$, по которой следует, что $z=z(w,t)$, $z(w,0)=z_0(w)$ как интеграл уравнения (2.2) (ср. с (7.1)) обладает указанными в теореме свойствами.

§ 8. Методы решения задачи. Предыдущие выводы обосновывают для простейших случаев два метода решения задачи.

Первый метод состоит в сведéнии задачи к разысканию решения $x(\xi, t)$, $X(\xi, t)$ системы уравнений (4.1), удовлетворяющего соответствующим начальным условиям. Это решение может быть определено методом последовательных приближений (см. ниже § 9). Второй метод состоит в разыскании решения $z(w,t)$ уравнения (2.2) в виде ряда

$$z(w,t) = z_0(w) + t z_1(w) + \ldots + t^n z_n(w) + \ldots \tag{8.1}$$

Из теоремы 3 и 3а следует, что если функция $\nu_0(w) = [z_0'(w)]^{-1}$ голоморфна в замкнутом круге $|w| \leqslant 1$ (и, следовательно, в несколько большем круге $|w| \leqslant r$, $r>1$) и не принимает в круге $|w| \leqslant 1$ значения нуль, то решение уравнения (2.2), удовлетворяющее начальному условию $z(w,0)=z_0(w)$, при достаточно малом t_0 может быть разложено в замкнутом бицилиндре $D^*(1, t_0)$ в ряд вида (8.1), равномерно сходящийся в $D^*(1,t_0)$, с голоморфными в $|w| \leqslant 1$ коэффициентами $z_n(w)$.

Подставляя ряд (8.1) в граничное условие (1.8), эквивалентное уравнению (2.2), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях уравнения, находим для определения граничных значений функций z_n рекуррентные формулы

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z_1(\omega)}{\omega z_0'(\omega)}\right] = -\frac{1}{|z_0'(\omega)|^2}$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{z_n(\omega)}{\omega z_0'(\omega)}\right] = -\frac{1}{n\,|z_0'(\omega)|^2}\sum_{k=1}^{n-1} k \operatorname{Re}\left[\frac{1}{\omega} z_k(\omega)\, \bar{z}_{n-k}(\omega^{-1})\right] \quad (n=2, 3, \ldots) \tag{8.2}$$

По этим рекуррентным граничным соотношениям, применяя формулу Шварца, последовательно определим в круге $|w|\leqslant 1$ функции $z_n(w)$.

На основании теорем 3 и 3а можно показать, что этот метод применим также и в несколько более общем случае, когда функция $\nu_0(w)=[z_0'(w)]^{-1}$ голоморфна в $|w|\leqslant 1$ и не принимает значения нуль в $|w|<1$ (допускаются нули на $|w|=1$).

Вместо $z(w,t)$ можно этим же методом разыскивать функцию $\nu(w,t)$ (пользуясь формулами (6.4), (6.5) и (6.6)).

В качестве примера[1] укажем для двух случаев полученное этим методом решение $z(w,t)$ в замкнутой форме.

1. *Начальная область — полуплоскость* $\operatorname{Re} z<0$. *Сток в точке* $z_0=-1$. В этом случае

$$z_0(w)=\frac{w-1}{w+1} \tag{8.3}$$

Последовательно определяя из граничных соотношений (8.2) функции $z_n(w)$ и суммируя затем получающийся ряд, находим после вычислений

$$z(w,t)=\frac{w-1}{w+1}+\frac{w(w+3)}{3(v+1)}\left[-1+\sqrt{1-6t}\right] \qquad \left(|w|<1,\, t<\frac{1}{6}\right) \tag{8.4}$$

2. *Начальная область — полоса* $|Re\, z|<h$. *Сток в точке* $z_0=0$. Аналогичным образом получено

$$z(w,t)=\frac{2h}{\pi i}\log\frac{1+iw}{1-iw}+\frac{w}{\pi}\left(-2h+\sqrt{4h^2-2\pi^2 t}\right) \quad \left(|w|<1,\, t<\frac{2h^2}{\pi^2}\right) \tag{8.5}$$

§ 9. О доказательстве теоремы 1. Система (4.1) является частным случаем системы уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \int\limits_{C_\zeta}\int\limits_{C_\eta} f(x,y,z_1,Y,Z_1)\,d\eta\, d\zeta \\ \frac{\partial X}{at} &= X\int\limits_{C_\zeta}\int\limits_{C_\eta}\left[\psi(x,y,z_1,Y,Z_1)+\frac{\varphi(x,y,z_1,Y,Z_1}{y-x}\right]d\eta\, d\zeta \end{aligned} \tag{9.1}$$

где f, φ, ψ — функции, голоморфные в области

$$r_1\leqslant|x|\leqslant r_2,\ r_1\leqslant|y|\leqslant r_2,\ r_1\leqslant|z_1|\leqslant r_2,\ r_1<r<r_2,\ |Y|\leqslant R,\ |Z_1|\leqslant R$$

Для упрощения вычислений докажем теорему существования и единственности для более простой системы

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_\eta} f(x,y,Y)\,d\eta,\ \frac{\partial X}{\partial t}=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_\eta}\psi(x,y,Y)\,d\eta+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_\eta}\frac{\varphi(x,y,Y)}{y-x}\,d\eta \tag{9.2}$$

где f, φ, ψ — функции, голоморфные в области

$$r_1\leqslant|x|\leqslant r_2, \qquad r_1\leqslant|y|\leqslant r_2, \qquad r_1<r<r_2, \qquad |Y|\leqslant R \tag{9.3}$$

Доказательство теоремы существования и единственности для системы (9.1) вполне аналогично, так как второе интегрирование (по ζ) и умножение на X во втором уравнении не нарушает сходимости процесса последовательных приближений, применяемого ниже. Предварительно докажем две основных леммы A и B.

§ 10. Лемма А. Пусть функции $x(\xi, t)$, $x^*(\xi, t)$, $X(\xi, t)$, $X^*(\xi, t)$, определенные в области K_{t_0} $(\xi \subset C_\xi,\ |t| < t_0 > 0)$, удовлетворяют в этой области следующим условиям.

1. Функции $x(\xi, t)$, $x^*(\xi, t)$ и их производные до третьего порядка включительно голоморфны по t и удовлетворяют неравенствам вида

$$r_1 \leqslant |x(\xi, t)| \leqslant r_2, \qquad r_1 < r < r_2 \tag{10.1}$$

$$A|\xi_1 - \xi_2| \leqslant |x(\xi_1, t) - x(\xi_2, t)| \leqslant B|\xi_1 - \xi_2|, \qquad 0 < A < 1 < B \tag{10.2}$$

$$\left|\frac{\partial^{k+l} x}{\partial \xi^k \partial t^l}\right| \leqslant B \qquad (k, l = 0, 1, 2, 3; 1 \leqslant k + l \leqslant 3) \tag{10.3}$$

2. Функции $X(\xi, t)$, $X^*(\xi, t)$ голоморфны относительно t и удовлетворяют неравенствам вида

$$|X(\xi, t)| \leqslant R \tag{10.4}$$

$$|X(\xi_1, t) - X(\xi_2, t)| \leqslant H(\xi_1 - \xi_3|^\mu \qquad (0 < \mu < 1) \tag{10.5}$$

$$\left|\frac{\partial^{k+l} x}{\partial \xi^k \partial t^l} - \frac{\partial^{k+l} x^*}{\partial \xi^k \partial t^l}\right| \leqslant \Omega(t) \qquad (k, l = 0, 1, 2, 3; 0 \leqslant k + l \leqslant 3) \tag{10.6}$$

$$|X - X^*| \leqslant \Omega(t) \tag{10.7}$$

$$|X(\xi_1, t) - X(\xi_2, t) - X^*(\xi_1, t) + X^*(\xi_2, t)| \leqslant \Omega(t)|\xi_1 - \xi_2|^\mu \tag{10.8}$$

где $\Omega(t)$ — некоторая неотрицательная интегрируемая функция от $|t|$.

Пусть далее $X_0(\xi)$ — функция, удовлетворяющая на C_ξ условиям

$$|X_0(\xi_1) - X_0(\xi_2)| \leqslant H_0|\xi_1 - \xi_2|^\mu, \quad H_0 < H; \qquad |X_0(\xi)| \leqslant R_0, \quad R_0 < R \tag{10.9}$$

Наконец, пусть функции $f(x, y, Y)$, $\varphi(x, y, Y)$, $\psi(x, y, Y)$ голоморфны в области $r_1 \leqslant |x| \leqslant r_2$, $r_1 \leqslant |y| \leqslant r_2$, $|Y| \leqslant R$ и M — наибольший из максимумов функций f, φ, ψ и их первых, вторых и третьих производных в этой области. Введем в рассмотрение функции от $|t|$.

$$\begin{gathered}
\tilde{x}(\xi, t) = \xi + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} f(x, y, Y)\, d\eta \\
\tilde{x}^*(\xi, t) = \xi + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} f(x^*, y^*, Y^*)\, d\eta \\
\tilde{X}(\xi, t) = X_0(\xi) + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} \psi(x, y, Y)\, dt + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} \frac{\varphi(x, y, Y)}{y - x}\, d\eta \\
\tilde{X}^*(\xi, t) = X_0(\xi) + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} \psi(x^*, y^*, Y^*) + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} \frac{\varphi(x^*, y^*, Y^*)}{y^* - x^*}\, d\eta
\end{gathered} \tag{10.10}$$

Как мы докажем, эти функции при достаточно малом $t_0 = \delta$ удовлетворяют тем же условиям (10.1)—(10.8) с той лишь разницей, что функция $\Omega(t)$ заменяется на

$$\tilde{\Omega} = D\int_0^{|t|} \Omega(t)\, d|t| \tag{10.11}$$

где D — постоянная, зависит только от $A, B, r, r_1, r_2, R, R_0, H, H_0, M, \mu$. В дальнейшем через $D(D_1, D_2, D', D'', \ldots)$ обозначаются постоянные, зависящие только от указанных величин или от некоторых из них.

Доказательство свойств (10.1) — (10.8) для функций $\tilde{x}, \tilde{x}^*$ выполняется тривиально, и так же очевидно доказательство соответствующих свойств для первых двух слагаемых в выражениях $\tilde{X}$, $\tilde{X}^*$. Поэтому все сводится к доказательству леммы, формулируемой ниже.

§ 11. Лемма В. При указанных в лемме А условиях

1) функции

$$u(\xi, t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_\eta} \frac{\varphi(x, y, Y)}{y - x} \, d\eta, \quad u^*(\xi, t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_\eta} \frac{\psi(x^*, y^*, Y^*)}{y^* - x^*} \, d\eta \tag{11.1}$$

голоморфны по t в области K_{t_0} и удовлетворяют неравенствам вида

$$|u(\xi, t)| \leqslant D_1, \qquad |u(\xi_1, t) - u(\xi_2, t)| < D_2 |\xi_1 - \xi_2|^\mu \tag{11.2}$$

2) Функция

$$g(\xi, t) = u - u^* = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_\eta} \frac{\varphi(x, y, Y)}{y - x} \, d\eta - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_\eta} \frac{\varphi(x^*, y^*, Y^*)}{y^* - x^*} \, d\eta \tag{11.3}$$

удовлетворяет неравенствам

$$|g(\xi, t)| \leqslant D_3 \Omega(t), \qquad |g(\xi_1, t) - g(\xi_2, t)| \leqslant D_4 \Omega(t) |\xi_1 - \xi_2|^\mu \tag{11.4}$$

Так как доказательство этой основной леммы несколько громоздко, то мы расчленим его на ряд отдельных лемм.

Сначала условимся в обозначениях. Если функция $f(\xi, t)$, определенная в K_{t_0}, удовлетворяет в K_{t_0} неравенству

$$|f(\xi_1, t) - f(\xi_2, t)| \leqslant a(t) |\xi_1 - \xi_2|^\mu \qquad (0 < \mu \leqslant 1) \tag{11.5}$$

то мы будем говорить, что $f(\xi, t)$ удовлетворяет в области[1] K_{t_0} по ξ условию $H(\mu; a(t))$. Аналогично, если функция $\psi(\xi, \eta, t)$, определенная при $\xi \subset C_\xi$, $\eta \subset G_\eta$, $|t_1| < t_0$, удовлетворяет в этой области неравенству

$$|\psi(\xi_1, \eta_1, t) - \psi(\xi_2, \eta_2, t)| \leqslant a(t) (|\xi_1 - \xi_2|^\mu + |\eta_1 - \eta_2|^\nu) \tag{11.6}$$

то будем говорить, что ψ удовлетворяет по ξ, η условию $H(\mu, v, a(t))$. Эти обозначения будем применять и в случае, когда $a(t)$ — постоянная. Заметим, что каждая лемма, доказываемая ниже для $x(\xi, t)$ и $X(\xi, t)$, справедлива и для $x^*(\xi, t)$ и $X^*(\xi, t)$. Если доказательство какой-либо леммы очевидно, то мы будем только указывать условия, которые используются при доказательстве леммы.

Лемма 1. Если $\psi(\xi, \eta, t)$ удовлетворяет по ξ, η при $\xi \subset C_\xi$, $\eta \subset C_\eta$, $|t| < t_0$ условию $H(1, \mu; \lambda(t))$, то при $\xi \subset C_\xi$, $|t| < t_0$ интеграл

$$J(\xi, t) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_\eta} \frac{\psi(\xi, \eta, t)}{\eta - \xi} \, d\eta \tag{11.7}$$

[1] Указание области, где функция удовлетворяет условию H, будет опускаться, так как во всех леммах такой областью является вся область определения функции.

существует в смысле главного значения и удовлетворяет по ξ условию[1] $H(\mu; D_0\lambda(t))$. Если, кроме того, $|\psi(\xi,\eta,t)| \leqslant D_0'\lambda(t)$, то $J(\xi,t) \leqslant D_0''\lambda(t)$.

Лемма 2. Если функция $\psi(\xi,\eta,t)$ удовлетворяет по ξ, η условию $H(1,\mu;\lambda(t))$ и $|\psi(\xi,\eta,t)| \leqslant \varepsilon\lambda(t)$, $(\varepsilon < \pi r)$, то $|J(\xi,t)| \leqslant D_5 \varepsilon^\mu \lambda(t)$.

Лемма доказывается путем разбиения интеграла $J(\xi,t)-\psi(\xi,\xi,t)$ на два интеграла—по дуге с центром в точке $\eta=\xi$ длины 2ε и по остальной части C_η—и оценки каждого из этих интегралов.

Лемма 3. Если функция

$$\delta(\xi,\eta,t,h) = \psi(\xi,\eta,t+h) - \psi(\xi,\eta,t) - h\psi_t'(\xi,\eta,t) \tag{11.8}$$

при достаточно малом h удовлетворяет по ξ,η условию $H(1,\mu; D_6|h|)$ и $|\delta| \leqslant |h|\varepsilon(h)$, а $\lim \varepsilon(h)=0$ при $h \to 0$, то $J(\xi,t)$, определенная согласно (11.7), будет голоморфна относительно t при $\xi \subset C_\xi$, $|t| < t_0$.

Для доказательства применяем к δ/h лемму 2. Имеем

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C_\eta} \frac{\delta\, d\eta}{\eta-\xi} = 0 \qquad \text{при } \lambda(t) = D_6$$

Лемма 4. Если

$$|\Phi(\xi,\eta,t)| \leqslant N_1, \qquad |\Psi(\xi,\eta,t)| \leqslant N_2 \tag{11.9}$$

и функции Φ, Ψ удовлетворяют соответственно условиям $H(1,\mu; a(t))$, $H(1,\mu; b(t))$, то произведение $\Phi\Psi$ удовлетворяет $H(1,\mu; N_1 b(t) + N_2 a(t))$ [2].

Лемма 5. Интегрируя неравенства (10.6) и (10.3) по кратчайшей из дуг окружности $|\xi|=r$, соединяющей ξ_1 и ξ_2, находим

$$\left| \left[\frac{\partial^{k+l} x(\xi,t)}{\partial\xi^k\,\partial t^l}\right]_{\xi=\xi_1} - \left[\frac{\partial^{k+l} x(\xi,t)}{\partial\xi^k\,\partial t^l}\right]_{\xi=\xi_2} - \left[\frac{\partial^{k+l} x^*(\xi,t)}{\partial\xi^k\,\partial t^l}\right]_{\xi=\xi_1} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial^{k+l} x^*(\xi,t)}{\partial\xi^k\,\partial t^l}\right]_{\xi=\xi_2} \right| \leqslant \frac{\pi}{2}\,\Omega(t)\,|\xi_1-\xi_2| \tag{11.10}$$

$$\left| \left[\frac{\partial^{k+l} x(\xi,t)}{\partial\xi^k\,\partial t^l}\right]_{\xi=\xi_1} - \left[\frac{\partial^{k+l} x(\xi,t)}{\partial\xi^k\,\partial t^l}\right]_{\xi=\xi_2} \right| \leqslant \frac{\pi}{2} B\,|\xi_1-\xi_2| \quad \begin{pmatrix} k,\ l = 0,1,2 \\ 0 \leqslant k+l \leqslant 2 \end{pmatrix} \tag{11.11}$$

Лемма 6. Функции

$$v(\xi,\eta,t) = \frac{x(\eta,t)-x(\xi,t)}{\eta-\xi}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} \tag{11.12}$$

удовлетворяют[3] условию $H(1,1;\tfrac{1}{2}\pi B)$ и $A \leqslant |v(\xi,\eta,t)| \leqslant B$, $|\partial v/\partial t| \leqslant B$.

Лемма 7. Функция

$$w(\xi,\eta,t) = \frac{1}{v} = \frac{\eta-\xi}{x(\eta,t)-x(\xi,t)} \tag{11.13}$$

удовлетворяет условию $H(1,1;\pi B/2A^2)$ и $|w| \leqslant 1/A$.

Лемма[4] *8.* Функция

$$P(\xi,\eta,t) = \frac{\eta-\xi}{y-x} - \frac{\eta-\xi}{y^*-x^*} \tag{11.14}$$

удовлетворяет условию $H(1,1;D_7\Omega(t))$ и $|P| \leqslant \pi\Omega(t)/2A^2$.

---

[1] Доказательство см. в [6], стр. 50—55, § 19, 20.

[2] См. [6], стр. 18.

[3] Доказательство аналогично приведенному в [6], стр. 24, § 8.

[4] Следует из (11.10) при $k+l=0$ и условия (10.2).

Доказательство. Имеем после элементарных преобразований

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}=(y^*-x^*)^{-2}\int_{\xi}^{\eta}(z''-z^{*''})(\eta-\zeta)\,d\zeta+ \tag{11.15}$$

$$+(y-x)^{-2}(y^*-x^*)^{-2}(y-x-y^*+x^*)(y-x+y^*-x^*)\int_{\xi}^{\eta}z''(\eta-\zeta)\,d\zeta$$

где $z=x(\zeta,\,t)$ и штрихами обозначено дифференцирование по первому аргументу. Оценивая каждое слагаемое на основании соответствующих неравенств (10.6), (10.3), (10.2), (11.10), находим

$$\left|\frac{\partial P}{\partial \xi}\right|\leqslant D_7'\Omega(t)=\pi^2\frac{B^2}{A^2}\Omega(t) \tag{11.16}$$

Такую же оценку имеем для $|\partial P/\partial\eta|$; отсюда следует, что P удовлетворяет по ξ, η условию $H(1,\,1;\,D_7\Omega(t))$.

Лемма 9. Функция

$$\delta_1(\xi,\eta,t)=\frac{\eta-\xi}{y_1-x_1}-\frac{\eta-\xi}{y-x}-h\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\eta-\xi}{y-x}\right) \tag{11.17}$$

где $x_1=x(\xi,\,t+h)$, $y_1=x(\eta,\,t+h)$, удовлетворяет при достаточно малом h условию $H(1,\,1;\,D_8|h|)$ и $|\delta_1|\leqslant D_9|h|^2$.

Доказательство. Можно представить δ_1 в виде

$$\delta_1=\frac{\eta-\xi}{(y_1-x_1)\,(y-x)}\int_t^{t+h}\left[\frac{\partial^2x\,(\eta,\,\tau)}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2x\,(\xi,\,\tau)}{\partial\tau^2}\right](t+h-\tau)\,d\tau+$$

$$+h\frac{\eta-\xi}{(y_1-x_1)\,(y-x)^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial t}\right)\int_t^{t+h}\left[\frac{\partial x\,(\eta,\,\tau)}{\partial\tau}-\frac{\partial x\,(\xi,\,\tau)}{\partial\tau}\right]d\tau$$

Производя оценки при помощи неравенств (11.11) и (10.2), получим

$$|\delta_1|\leqslant\frac{\pi^2B^2}{A^3}|h|^2 \tag{11.18}$$

Далее, легко видеть, что функции x, $x^*=x_1$ удовлетворяют условиям (10.1), (10.2), (10.3) и тем из условий (10.6), которые используются при доказательстве леммы 8, при $\Omega(t)=B|h|$. Поэтому (по леммам 8, 6, 7, 4) при $\Omega(t)=B|h|$ функции

$$\delta_1^{(1)}=\frac{\eta-\xi}{y_1-x_1}-\frac{\eta-\xi}{y-x},\qquad \delta_1^{(2)}=-h\frac{\partial}{\partial t}\frac{\eta-\xi}{y-x}=\frac{1}{\eta-\xi}\left(\frac{\eta-\xi}{y-x}\right)^2\left(\frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial x}{\partial t}\right)$$

удовлетворяют условиям $H(1,\,1;\,D_7B|h|)$ и $H(1,\,1;\,(\pi B/2A^2+\pi B^2/A^3)|h|)$ соответственно; следовательно, и δ удовлетворяет условию $H(1,\,1;\,D_8|h|)$.

Лемма 10. Функция $\varphi(x,\,y,\,Y)$ и $\partial\varphi/\partial t$ и $\partial^2\varphi/\partial t^2$, где $x=x(\xi,\,t)$, $y=x(\eta,\,t)$, $Y=X(\eta,\,t)$, удовлетворяют по ξ, η условию $H(1,\,\mu;\,D_{10})$.

Лемма 11. Функция

$$\Phi(\xi,\eta,t)=\varphi(x,\,y,\,Y)-\varphi(x^*,\,y^*,\,Y^*) \tag{11.19}$$

удовлетворяет по ξ, η условию $|\Phi(\xi,\eta,t)|\leqslant 3M\Omega(t)\frac{1}{2}\pi$ и $H(1,\,\mu;\,D_{11}\Omega(t))$.

Доказательство. Первое условие легко получить из неравенства $|\Phi|\leqslant M(\frac{1}{2}\pi|x-x^*|+\frac{1}{2}\pi|y-y^*|+|Y-Y^*|)$ и неравенств (10.7) и (10.6) при $k+l=0$. Для доказательства второго условия имеем

$$\Delta\Phi = \Phi(\xi_1, \eta_1, t) - \Phi(\xi_2, \eta_2, t) = \varphi(x_1, y_1, Y_1) - \varphi(x_1^*, y_1^*, Y_1^*) -$$
$$- \varphi(x_2, y_2, Y_2) + \varphi(x_2^*, y_2^*, Y_2^*) \quad (11.20)$$

где $x_1 = x(\xi_1, t)$, $x_2 = x(\xi_2, t)$, $y_1 = x(\eta_1, t)$ и т. д., или

$$\Delta\Phi = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 \quad (11.21)$$

где

$$S_1 = \int_{Y_1^*}^{Y_1} [\varphi_Y'(x_1, y_1, Y) - \varphi_Y'(x_1, y_1, Y_1)]\, dY -$$
$$- \int_{Y_2^*}^{Y_2} [\varphi_Y'(x_1, y_1, Y) - \varphi_Y'(x_1, y_1, Y_1)]\, dY$$

$$S_2 = \int_{y_1^*}^{y_1} [\varphi_y'(x_1, y, Y_1^*) - \varphi_y'(x_1, y, Y_2^*)] dy +$$
$$+ \int_{y_2}^{y_1} [\varphi_y'(x_1, y, Y_2) - \varphi_y'(x_1, y, Y_2^*)]\, dy$$

$$S_3 = \int_{y_1^*}^{y_1} [\varphi_y(x_1, y, Y_2^*) - \varphi_y'(x_1, y_1, Y_2^*)]\, dy -$$
$$- \int_{y_2^*}^{y_2} [\varphi_y'(x_1, y, Y_2^*) - \varphi_y'(x_1, y_1, Y_2^*)]\, dy \quad (11.22)$$

$$S_4 = \int_{x_1^*}^{x_1} [\varphi_x'(x, y_1^*, Y_1^*) - \varphi_2'(x, y_2^*, Y_2^*)]\, dx +$$
$$+ \int_{x_2}^{x_1} [\varphi_x'(x, y_2, Y_2) - \varphi_x'(x, y_2^*, Y_2^*)]\, dx$$

$$S_5 = \int_{x_2}^{x_1} [\varphi_x'(x, y_2^*, Y_2^*) - \varphi_x'(x_2^*, y_2^*, Y_2^*)]\, dx -$$
$$- \int_{x_2^*}^{x_1^*} [\varphi_x'(x, y_2^*, Y_2^*) - \varphi_2'(x_2^*, y_2^*, Y_2^*)]\, dx$$

$$S_6 = \varphi_Y'(x_1, y_1, Y_1)(Y_1 - Y_1^* - Y_2 + Y_2^*) +$$
$$+ \varphi_y'(x_1, y_1, Y_2^*)(y_1 - y_1^* - y_2 + y_2^*) + \varphi_x'(x_2^*, y_2^*, Y_2^*)(x_1 - x_1^* - x_2 + x_2^*)$$

Оценивая S_1, имеем

$$|S_1| \leqslant \max|\varphi_{YY}''| \left\{ \int_{Y_1^*}^{Y_1} |Y - Y_1|\, |dY| + \int_{Y_2^*}^{Y_2} |Y - Y_1|\, |dY| \right\} \quad (11.23)$$

или, так как при интегрированиях от Y_1^* до Y_1 и от Y_2^* до Y_2 имеем соответственно $|Y - Y_1| \leqslant |Y_1^* - Y_1|$ и $|Y - Y_1| \leqslant |Y_2 - Y_1| + |Y_2^* - Y_2|$ то, пользуясь еще неравенствами (10.7) и (10.5), получаем

$$|S_1| \leqslant M\{|Y_1^* - Y_1|^2 + |Y_2^* - Y_2|^2 + |Y_2 - Y_1|\,|Y_2^* - Y_2|\} \leqslant$$
$$\leqslant M\{2[\Omega(t)]^2 + H|\eta_1 - \eta_2|^\mu \Omega(t)\} \quad (11.24)$$

С другой стороны, переставляя пределы в интегралах, находим также

$$|S_1| = \left| \int_{Y_2}^{Y_1} [\varphi_Y'(x_1, y_1, Y) - \varphi_Y'(x_1, y_1, Y_1)]\, dY - \right. \quad (11.25)$$
$$\left. - \int_{Y_2^*}^{Y_1^*} [\varphi_Y'(x_1, y_1, Y) - \varphi_Y'(x_1, y_1, Y_1)]\, dY \right| \leqslant M\{|Y_2 - Y_1|^2| + Y_2^* - Y_1^*|^2 +$$
$$+ |Y_1^* - Y_1|\,|Y_2^* - Y_2|\} \leqslant \{2[H|\eta_1 - \eta_2|^\mu]^2 + H|\eta_1\eta - {}_2|^\mu \Omega(t)\}\, M$$

Из (11.24) и (11.25) следует, что

$$|S_1| \leqslant 3MH\Omega(t)|\eta_1-\eta_2|^{\mu} \tag{11.26}$$

Аналогичные оценки получим для S_3 и S_5. Имеем

$$|S_3| \leqslant \frac{3\pi}{2} MB\Omega(t)|\eta_1-\eta_2|, \qquad |S_5| \leqslant \frac{3\pi}{2} MB\Omega(t)|\xi_1-\xi_2| \tag{11.27}$$

где множитель $\frac{1}{2}\pi$ вводится потому, что при интегрировании от x_1 до x_2 (или от y_1 до y_2) по кратчайшему пути, соединяющему x_1 и x_2 внутри кольца $r_1 \leqslant |x| \leqslant r_2$:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} |dx| \leqslant \frac{\pi}{2}|x_1-x_2|$$

Еще проще оцениваются S_2 и S_4. Имеем

$$|S_2| \leqslant \frac{\pi}{2} M\{|y_1-y_1^*||Y_1^*-Y_2^*|+|y_2-y_1||Y_2-Y_2^*| \tag{11.28}$$

или в силу (10.2), (10.5), (10.7) и (10.6) при $k+l=0$ получим (для S_4 аналогично)

$$|S_2| \leqslant D'\Omega(t)|\eta_1-\eta_2|^{\mu}, \qquad |S_4| \leqslant D''\Omega(t)(|\xi_1-\xi_2|+|\eta_1-\eta_2|^{\mu}) \tag{11.29}$$

Наконец, пользуясь (10.8), (10.6) при $k+l=0$, находим

$$|S_6| \leqslant D'''\Omega(t)(|\xi_1-\xi_2|+|\eta_1=\eta_2|^{\mu}) \tag{11.30}$$

Из этих оценок следует, что $\Phi(\xi, \eta, t)$ удовлетворяет по ξ, η условию $H(1, \mu, D_{11}\Omega(t))$, что и требовалось доказать.

Лемма 12. Функция

$$\Psi(\xi, \eta, t) = \varphi(x, y, Y)\frac{\eta-\xi}{y-x} \tag{11.31}$$

удовлетворяет по ξ, η условию $H(1, \mu; D_{12})$ и $|\Psi| \leqslant M/A$. Это следует из лемм 7, 10, 4.

Лемма 13. Функция

$$\chi(\xi, \eta, t) = \varphi(x, y, Y)\frac{\eta-\xi}{y-x} - \varphi(x^*, y^*, Y^*)\frac{\eta-\xi}{y^*-x^*} \tag{11.32}$$

удовлетворяет по ξ, η условию $H(1, \mu; D_{13}\Omega(t)$ и $|\chi| \leqslant D_{14}\Omega(t)$. Это следует из лемм 7, 8, 10, 11, 4.

Лемма 14. Функция (11.33)

$$\delta_2(\xi, \eta, t, h) = \varphi(x_1, y_1, Y_1)\frac{\eta-\xi}{y_1-x_1} - \varphi(x, y, Y)\frac{\eta-\xi}{y-x} - h(\eta-\xi)\frac{\partial}{\partial t}\frac{\varphi(x, y, Y)}{y-x}$$

где $x_1 = x(\xi, t+h)$, $Y_1 = X(\eta, t+h)$, удовлетворяет при достаточно малом h условию $H(1, \mu; D_{15}|h|)$ и $|\delta_2| \leqslant D_{16}|h|^2$.

Доказательство. Представим δ_2 в виде

$$\delta_2 = \varphi(x_1, y_1, Y_1)\left[\frac{\eta-\xi}{y_1-x_1} - \frac{\eta-\xi}{y-x} - h\frac{\partial}{\partial t}\frac{\eta-\xi}{y-x}\right] + \frac{\eta-\xi}{y-x}\left[\varphi(x_1, y_1, Y_1) - \right.$$

$$\left. - \varphi(x, y, Y) - h\frac{\partial\varphi(x, y, Y)}{\partial t}\right] + h[\varphi(x_1, y_1, Y_1) - \varphi(x, y, Y)]\frac{\partial}{\partial t}\frac{\eta-\xi}{y-x} \tag{11.34}$$

Далее легко установить требуемые оценки отдельно для каждого из трех слагаемых в (11.34), пользуясь леммами 9, 10, 7, 6, 11 при $\Omega(t) = B|h|$ и свойствами функции $\varphi(x, y, Y)$.

Теперь легко доказать лемму В. Действительно, неравенства (11.2) являются непосредственным следствием лемм 12 и 1, неравенства (11.4) следуют из лемм 13 и 1, и голоморфность функций u и u^*, определенных формулами (11.1), следует из леммы 14.

§ 12. Теорема существования решения системы (9.2). *Пусть функции* $\varphi(x, y, Y)$, $\psi(x, y, Y)$, $f(x, y, Y)$ — *голоморфны в области* $r_1 \leqslant |x| \leqslant r_2$, $r_1 \leqslant |y| \leqslant r_2$, $|Y| \leqslant R$ $(r_1 < r < r_2)$ *и функция* $X_0(\xi)$ *удовлетворяет на* C_ξ *условиям*

$$|X_0(\xi)| \leqslant R_0 \quad (R_0 < R), \quad |X_0(\xi_1) - X_0(\xi_2)| \leqslant H_0 |\xi_1 - \xi_2|^\mu \quad (0 < \mu < 1) \tag{12.1}$$

При достаточно малом $t_0 > 0$ *система* (9.2) *имеет в области* K_{t_0} *единственное правильное*[1] *решение* $x = x(\xi, t)$, $X = X(\xi, t)$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$x(\xi, 0) = \xi, \qquad X(\xi, 0) = X_0(\xi)$$

Доказательство. Построим последовательности функций

$$x_0(\xi, t) = \xi, \qquad X_0(\xi, t) = X_0(\xi) \tag{12.2}$$

$$x_1(\xi, t) = \xi + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} f(\xi, \eta, X_0(\eta))\, d\eta \tag{12.3}$$

$$X_1(\xi, t) = X_0(\xi) + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} \psi(\xi, \eta, X_0(\eta))\, d\eta + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} \frac{\varphi(\xi, \eta, X_0(\eta))}{\eta - \xi}\, d\eta$$

. . . .

$$x_{n+1}(\xi, t) = \xi + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} f(x_n, y_n, Y_n)\, d\eta \tag{12.4}$$

$$X_{n+1}(\xi, t) = X_0(\xi) + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} \psi(x_n, y_n, Y_n)\, d\eta + \frac{1}{\pi i}\int_0^t dt \int_{C_\eta} \frac{\varphi(x_n, y_n, Y_n)}{y_n - x_n}\, d\eta$$

. . . .

Пользуясь леммой 1, легко показать, что при достаточно малом t_0 функции $x = x_0$, $X = X_0$, $x^* = x_1$, $X^* = X_1$ удовлетворяют условиям леммы А, если $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$, $H = 2H_0$, $\Omega(t) = D_0 t$; при этом $|D_0|$ и ниже $|D|$ — постоянные, зависящие только от R, R_0, H_0, μ, r, r_1, r_2, μ $(D_0 t = |D_0 t|)$.

Затем последовательно применяя при $n = 2, 3, 4, \ldots$ лемму А для $x = x_n, x^* = x_{n-1}, X = X_n, X^* = X_{n-1}, \tilde{x} = x_{n+1}, \tilde{x}^* = x_n$, $\tilde{X} = X_{n+1}$, $\tilde{X}^* = X_n$, докажем, что при достаточно малом t_0, $t_0 = \delta(R, R_0, H_0, \mu, r, r_1, r_2, \mu)$ функции $x = x_n$, $x^* = x_{n-1}$, $X = X_n$, $X^* = X_{n-1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ удовлетворяют в K_{t_0} $(\xi \subset C_\xi, |t| < t_0)$ условиям леммы А при $\Omega = \Omega(t) = D^n t^n / n!$

Согласно неравенствам (10.7) и (10.[illegible])

$$|X_n - X_{n-1}| \leqslant \frac{D^n t^n}{n!}, \quad \left|\frac{\partial^{k+l} x_n}{\partial \xi^k \partial t^l} - \frac{\partial^{k+l} x_{n-1}}{\partial \xi^k \partial t^l}\right| \leqslant \frac{D^n t^n}{n!} \quad \begin{pmatrix} k, l = 0, 1, 2, 3 \\ 0 \leqslant k + l \leqslant 3 \end{pmatrix} \tag{12.5}$$

---

[1] Определение правильного решения дано на стр. 184. Условия правильности решения можно было бы ослабить за счет некоторого усложнения доказательства

следует, что последовательности X_n, x_n, $\partial^{k+l} x_n / \partial \xi^k \partial t^l$ (k, $l = 0, 1, 2, 3$; $1 \leqslant k+l \leqslant 3$) равномерно сходятся в области K_{t_0}.

Предельные функции $x(\xi, t) = \lim x_n(\xi, t)$, $X(\xi, t) = \lim X_n(\xi, t)$ при $n \to \infty$, а также и все производные от $x(\xi, t)$ до третьего порядка включительно голоморфны по t в K_{t_0}, как пределы равномерно сходящихся последовательностей голоморфных относительно t функций.

Далее, из (12.5) и неравенств согласно (10.8)

$$|X_n(\xi_1, t) - X_n(\xi_2, t) - X_{n-1}(\xi_1, t) + X_{n-1}(\xi_2, t)| \leqslant \frac{D^n t^n}{n!} |\xi_1 - \xi_2|^\mu$$

$$\left| \frac{\partial^{k+l} x}{\partial \xi^k \partial t^l} - \frac{\partial^{k+l} x_n}{\partial \xi^k \partial t^l} \right| \leqslant e^{Dt} \frac{D^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \begin{pmatrix} k, \ l = 0, 1, 2, 3 \\ 0 \leqslant k+l \leqslant 3 \end{pmatrix} \tag{12.6}$$

$$|X - X_n| \leqslant e^{Dt} \frac{D^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$|X(\xi_1, t) - X(\xi_2, t) - X_n(\xi_1, t) + X_n(\xi_2, t)| \leqslant e^{Dt} \frac{D^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!} \tag{12.7}$$

Таким образом, функции x, X, $x^* = x_n$, $X^* = X_n$ удовлетворяют условиям леммы А при $\Omega(t) = e^{Dt} D^{n+1} t^{n+1} / (n+1)!$

Так как $\lim \Omega(t) = 0$ при $n \to \infty$, то отсюда по лемме В следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_\eta} \frac{\varphi(x_n, y_n, Y_n)}{y_n - x_n} d\eta = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{C_\eta} \frac{\varphi(x, y, Y)}{y - x} d\eta \tag{12.8}$$

После этого легко убедиться, выполняя в (12.4) предельный переход $n \to \infty$, что $x(\xi, t)$, $X(\xi, t)$ — решение системы (9.2), удовлетворяющее начальным условиям $x_0(\xi, 0) = \xi$ и $X_0(\xi, 0) = X_0(\xi)$. Как видно из указанных выше свойств функций $x(\xi, 0)$, $X(\xi, t)$, это решение правильное.

§ 13. Единственность правильного решения. Если $x^\circ(\xi, t)$, $X^\circ(\xi, t)$ — правильное решение системы (9.2) в области K_{t_0}, то таким же образом, как выше, применяя последовательно лемму А к функциям $x = x^\circ$, $X = X^\circ$, $x^* = x_n$, $X^* = X_n$, $\tilde{x} = x^\circ$, $\tilde{X} = X^\circ$, $\tilde{x}^* = x_{n+1}$, $\tilde{X}^* = X_{n+1}$, докажем (в частности), что в области K_{t_0}

$$|X^\circ - X_n| \leqslant C \frac{(Dt)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad |x^\circ - x_n| \leqslant C \frac{(Dt)^{n+1}}{(n+1)!}$$

откуда следует, что

$$x^\circ(\xi, t) = \lim_{n \to \infty} x_n(\xi, t) = x(\xi, t), \qquad X^\circ(\xi, t) = \lim_{n \to \infty} X_n(\xi, t) = X(\xi, t)$$

Таким образом, теорема, поставленная в § 4 и 9, доказана.

Поступила в редакцию
6 VI 1947

Физико-технический институт
при Томском государственном
университете

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика. 1934.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. ПММ. 1945. Т. IX.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. ДАН. 1945. Т. XLVII. № 4.
4. Галин Л. А. ДАН. 1945. Т. XLVII. № 4.
5. Привалов И. И. Граничные свойства однозначных аналитических функций. 1941.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. 1946.
7. Куфарев П. П. Ученые записки Томского университета. 1947. Вып. 5.