

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ОДНОПРОВОДНЫХ ЛИНИЙ

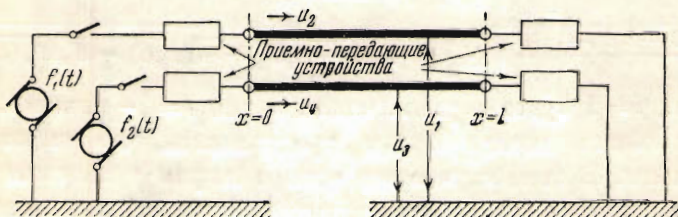
П. И. Кузнецов

(Москва)

Задача о распространении электромагнитных волн в многопроводной системе [1, 2, 3], как известно, описывается уравнениями

$$-\frac{\partial}{\partial x}(V) = [R](J) + [L] \frac{\partial J}{\partial t}, \quad -\frac{\partial}{\partial x}(J) = [G](V) + [C] \frac{\partial V}{\partial t}$$

где  $(V)$  и  $(J)$  — колонные матрицы, элементы которых  $V_r(x, t)$  и  $J_r(x, t)$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) являются соответственно напряжениями относительно



Фиг. 1.

нулевого провода и токами отдельных проводов;  $[R]$ ,  $[L]$ ,  $[G]$  и  $[C]$  — квадратные матрицы  $n$ -порядка соответственно сопротивления, индуктивности, проводимости изоляции и емкости.

Эту задачу рассматривали: К. Вагнер [4] при условии, что  $n=2$ ,  $[R]=0$ ,  $[G]=0$  и переход энергии с одного провода на другой — односторонний; Л. Бьюлей [2] при условии, что  $[R]=0$ ,  $[G]=0$  и  $n$  — любое, при помощи операционного метода; Л. Пайпс [3] при условии, что линия симметрированная, дал решение через определенный интеграл от функции Бесселя, применяя матричную теорию и преобразование Лапласа; В. И. Коваленков [5] при соотношениях между параметрами проводов  $R_1/R_2 = L_{11}/L_{22} = G_{22}/G_{11} = C_{22}/C_{11} = m^2/n^2$  показал, что общая система уравнений при  $n=2$  распадается на обычные телеграфные уравнения.

В настоящей работе рассматривается случай, когда  $n=2$ . Решение задачи дается в контурных интегралах. Если  $A^2 - 4B$  есть полный квадрат, то интегралы выражаются через функции Ломмеля.

1. Рассмотрим землю и два провода, к обоим концам которых присоединены приемно-передающие устройства с питанием на ближних концах (фиг. 1).

Введем обозначения

$$V_1 = u_1, \quad J_1 = u_2, \quad V_2 = u_3, \quad J_2 = u_4, \quad L_{11} = L_1, \quad L_{22} = L_2, \quad L_{12} = M \\ G_{11} = G_1, \quad G_{22} = G_2, \quad G_{12} = -G_{12}, \quad C_{11} = C_1, \quad C_{22} = C_2, \quad C_{12} = -C_{12}$$

Тогда уравнения распространения электромагнитных волн будут

$$-\frac{\partial u_1}{\partial x} = R_1 u_2 + L_1 \frac{\partial u_2}{\partial t} + M \frac{\partial u_4}{\partial t}, \quad -\frac{\partial u_2}{\partial x} = G_1 u_1 + C_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - G_{12} u_3 - C_{12} \frac{\partial u_3}{\partial t} \\ -\frac{\partial u_3}{\partial x} = R_2 u_4 + L_2 \frac{\partial u_4}{\partial t} + M \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad -\frac{\partial u_4}{\partial x} = G_2 u_3 + C_2 \frac{\partial u_3}{\partial t} - G_{12} u_1 - C_{12} \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad (1.1)$$

Эти уравнения будем решать в интервале  $0 < x < l$  для значений времени  $t > 0$  при начальных условиях

$$u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = 0, \quad u_3(x, 0) = u_4(x, 0) = 0 \quad (1.2)$$

Граничные условия для линии, вообще говоря, могут быть различными и на основе законов Кирхгофа задаются системой линейных дифференциальных уравнений.

Для определения типа системы уравнений (1.1) составим характеристическую форму [6] в переменных  $y = \partial / \partial t$ ,  $s = \partial / \partial x$ :

$$C(y) = \left(s + \frac{y}{v_1}\right) \left(s - \frac{y}{v_1}\right) \left(s + \frac{y}{v_2}\right) \left(s - \frac{y}{v_2}\right) = 0 \quad (1.3)$$

где

$$\frac{1}{v_i} = \sqrt{\frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 - 2MC_{12}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4(L_1 C_{12} - C_2 M)(L_2 C_{12} - C_1 M)}}$$

причем для  $i=1$  будет верхний знак, а для  $i=2$  — нижний.

В дальнейшем всегда будем предполагать, что выражения (1.3) действительны. В этом случае все четыре корня уравнения характеристического конуса  $C(y)$  действительны и, следовательно, система уравнений (1.1) есть вполне гиперболическая.

Рассматриваемая задача относится к смешанным задачам второго типа: начальные условия однородны, а граничные — неоднородны (нестационарная задача [6]). В этом случае решение находится при помощи преобразования Лапласа [7, 8]. Умножая уравнения (1.1) на  $e^{-pt}$ , предполагая  $\text{Re}(p) > 0$ , проинтегрируем по  $t$  от нуля до бесконечности. Принимая во внимание начальные условия (1.2), получим для  $u_k$  вспомогательную систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\bar{u}_1}{dx} + z_1 \bar{u}_2 + z_{12} \bar{u}_4 = 0, \quad \frac{d\bar{u}_2}{dx} + \omega_1 \bar{u}_1 - \omega_{12} \bar{u}_3 = 0 \\ \frac{d\bar{u}_3}{dx} + z_{12} \bar{u}_2 + z_2 \bar{u}_4 = 0, \quad \frac{d\bar{u}_4}{dx} - \omega_{12} \bar{u}_1 + \omega_2 \bar{u}_3 = 0 \quad (1.4)$$

где

$$z_1 = R_1 + pL_1, \quad z_2 = R_2 + pL_2, \quad z_{12} = pM \\ \omega_1 = G_1 + pC_1, \quad \omega_2 = G_2 + pC_2, \quad \omega_{12} = G_{12} + pC_{12} \quad \bar{u}_k(x, p) = \int_0^{\infty} u_k(x, t) e^{-pt} dt$$

Применяя то же самое преобразование к дифференциальным уравнениям, описывающим граничные условия, получим

$$\bar{u}_1(0, p) = \bar{f}_1(p) - Z_{11}(p) \bar{u}_2(0, p), \quad \bar{u}_1(l, p) = Z_{12}(p) \bar{u}_2(l, p) \\ \bar{u}_3(0, p) = \bar{f}_2(p) - Z_{21}(p) \bar{u}_4(0, p), \quad \bar{u}_3(l, p) = Z_{22}(p) \bar{u}_4(l, p) \quad (1.5)$$

Здесь  $Z_{11}(p)$ ,  $Z_{12}(p)$ ,  $Z_{21}(p)$ ,  $Z_{22}(p)$  — импедансы приемно-передающих устройств и

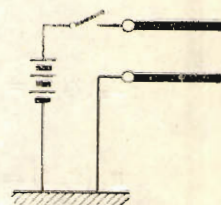
$$\bar{f}_1(p) = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-pt} dt, \quad \bar{f}_2(p) = \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-pt} dt$$

где  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  — функции, выражающие закон изменения напряжения на зажимах источников питания.

Определяя из граничных условий (1.5) четыре постоянные, входящие в решение системы (1.4), найдем решение  $\bar{u}_k(x, p)$ , а затем по теореме обращения для интеграла Лапласа определим и  $u_k(x, t)$ . Этим путем формально получится решение задачи. В каждом конкретном случае требуется показать, что найденное формальное решение существует и удовлетворяет уравнениям и условиям начальным и граничным.

2. Рассмотрим распространение электромагнитных волн вдоль двух параллельных полубесконечных однородных однопроводных линий с нулевыми начальными током и напряжением.

К ближнему концу первого провода приложено напряжение, равное единице, а ближний конец второго провода заземлен (фиг. 2)



Фиг. 2.

Эта задача приводится к решению системы уравнений (1.1) в полуинтервале  $0 < x \leq \infty$  для значений времени  $t > 0$  при начальных условиях (1.2) и граничных условиях

$$u_1(0, t) = 1, \quad u_3(0, t) = 0 \quad (2.4)$$

Применяя прием, изложенный в § 1, решение задачи получим в виде

$$u_k(x, p) = A_1 \Delta_k(-r_1) e^{-r_1 x} + A_2 \Delta_k(r_1) e^{r_1 x} + A_3 \Delta_k(-r_2) e^{-r_2 x} + A_4 \Delta_k(r_2) e^{r_2 x}$$

Здесь  $A_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) — произвольные постоянные, (2.2)

$$\begin{aligned} \Delta_1(r) &= r^3 + (z_{12}\omega_{12} - z_2\omega_2)r, & \Delta_2(r) &= -\omega_1 r^3 + z_2(\omega_1\omega_2 - \omega_{12}^2) \\ \Delta_3(r) &= (z_{12}\omega_1 - z_2\omega_{12})r, & \Delta_4(r) &= \omega_{12} r^2 - z_{12}(\omega_1\omega_2 - \omega_{12}^2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$r_1 = \sqrt{-\frac{A}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - 4B}}, \quad r_2 = \sqrt{-\frac{A}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{A^2 - 4B}} \quad (2.4)$$

адьюнкты и корни с положительными частями характеристического уравнения  $p^4 + Ap^2 + B = 0$ , причем

$$A = 2z_{12}\omega_{12} - z_1\omega_1 - z_2\omega_2, \quad B = (z_1z_2 - z_{12}^2)(\omega_1\omega_2 - \omega_{12}^2) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} A^2 - 4B &= (2z_{12}\omega_{12} - z_1\omega_1 - z_2\omega_2)^2 - 4(z_1z_2 - z_{12}^2)(\omega_1\omega_2 - \omega_{12}^2) = \\ &= (z_1\omega_1 - z_2\omega_2)^2 + 4(z_1\omega_{12} - z_{12}\omega_2)(z_2\omega_{12} - z_{12}\omega_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Конечным решением системы (2.2) при  $x \rightarrow \infty$  будет

$$u_k(x, p) = A_1 \Delta_k(-r_1) e^{-r_1 x} + A_3 \Delta_k(-r_2) e^{-r_2 x} \quad (k=1, 2, 3, 4) \quad (2.7)$$

Определяя  $A_1$  и  $A_2$  из граничных условий (2.1), получим

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{1}{2p} (1 + \mu) e^{-r_1 x} + \frac{1}{2p} (1 - \mu) e^{-r_2 x} & \left( \mu = \frac{z_1 \omega_1 - z_2 \omega_2}{\sqrt{A^2 - 4B}} \right) \\ \bar{u}_2 &= \frac{1}{p} \left[ \frac{\omega_1}{2r_1} (1 + \mu) + \frac{\omega_{12}}{r_1} \mu_1 \right] e^{-r_1 x} + \frac{1}{p} \left[ \frac{\omega_1}{2r_2} (1 - \mu) - \frac{\omega_{12}}{r_2} \mu_1 \right] e^{-r_2 x} \\ \bar{u}_3 &= -\frac{\mu_1}{p} e^{-r_1 x} + \frac{\mu_1}{p} e^{-r_2 x} & \left( \mu_1 = \frac{z_2 \omega_{12} - z_{12} \omega_1}{\sqrt{A^2 - 4B}} \right) \\ \bar{u}_4 &= -\frac{1}{p} \left[ \frac{\omega_{12}}{2r_1} (1 + \mu) + \frac{\omega_2}{r_1} \mu_1 \right] e^{-r_1 x} - \frac{1}{p} \left[ \frac{\omega_{12}}{2r_2} (1 - \mu) - \frac{\omega_2}{r_2} \mu_1 \right] e^{-r_2 x} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Наконец, применяя теорему обращения Лапласа, будем иметь

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1+\mu}{2} e^{pt-r_1 x} \frac{dp}{p} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1-\mu}{2} e^{pt-r_2 x} \frac{dp}{p} \\ u_2(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[ \frac{\omega_1}{2r_1} (1+\mu) + \frac{\omega_{12}}{r_1} \mu_1 \right] e^{pt-r_1 x} \frac{dp}{p} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[ \frac{\omega_1}{2r_2} (1-\mu) - \frac{\omega_{12}}{r_2} \mu_1 \right] e^{pt-r_2 x} \frac{dp}{p} \\ u_3(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mu_1 e^{pt-r_1 x} \frac{dp}{p} + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mu_1 e^{pt-r_2 x} \frac{dp}{p} \\ u_4(x, t) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[ \frac{\omega_{12}}{2r_1} (1+\mu) + \frac{\omega_2}{r_1} \mu_1 \right] e^{pt-r_1 x} \frac{dp}{p} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left[ \frac{\omega_{12}}{2r_2} (1-\mu) - \frac{\omega_2}{r_2} \mu_1 \right] e^{pt-r_2 x} \frac{dp}{p} \end{aligned} \quad (2.9)$$

где величина  $a$  выбирается так, чтобы все особенности  $\bar{u}_k$  находились слева от прямой  $\text{Re}(p) = a$ .

Если выражение (2.6) является полным квадратом, то корни уравнения (2.4) содержат один радикал и контурные интегралы (2.9) выражаются через функции Ломмеля от двух мнимых аргументов [9].

Заметим, что ранее рассмотренные случаи являются частными случаями соотношения (2.6). Действительно, легко убедиться, что  $A^2 - 4B$  есть полный квадрат в случаях: 1) однопроводной линии [9, 10]  $z_{12} = 0$ ,  $\omega_{12} = 0$ ; 2) симметрированной линии [3]  $z_1 = z_2$ ,  $\omega_1 = \omega_2$ ; 3) в случае В. И. Коваленкова [5]  $z_1 \omega_1 = z_2 \omega_2$ . Если  $A^2 - 4B$  не полный квадрат, то задачу пока приходится решать численными методами.

**3.** Покажем, что полученное формальное решение удовлетворяет условиям задачи. Действительно, функции  $\bar{u}_k$  на плоскости  $p$  имеют следующие особенности: полюс первого порядка в начале координат и восемь точек ветвления, определяемых уравнениями  $A^2 - 4B = 0$ ,  $B = 0$ . Если предположим, что коэффициенты при  $p^4$  в этих уравнениях отличны от нуля, то точки ветвления будут находиться в конечной части плоскости  $p$ , т. е. существует круг конечного радиуса  $R_0$  с центром в начале координат, содержащий все особенности функции  $\bar{u}_k$  (фиг. 3).

Введем в рассмотрение контур  $L$ , представляющий всю прямую  $\operatorname{Re}(p) = a$ , параллельную мнимой оси и расположенную в правой полуплоскости на расстоянии  $a$  от нее.

Обозначим интегралы, входящие в сумму правой части (2.9), через  $u_{k1}(L)$  и  $u_{k2}(L)$ , где в скобках указывается контур интегрирования, а второй индекс отмечает, к какому слагаемому он относится. Используя асимптотическое представление корней  $r_1$  и  $r_2$  характеристического уравнения

$$r_1 = p/v_1 + r_{1p}, \quad r_2 = p/v_2 + r_{2p}$$

где  $v_1$  и  $v_2$  определяется по (1.3) и

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} r_{1p} = O(1), \quad \lim_{|p| \rightarrow \infty} r_{2p} = O(1)$$

легко получим выражения показателей в контурных интегралах (2.9):

$$pt - r_1 x = p \left( t - \frac{x}{v_1} \right) - r_{1p} x, \quad pt - r_2 x = p \left( t - \frac{x}{v_2} \right) + r_{2p} x$$

С помощью этих представлений легко убедиться, что множители, стоящие перед  $\exp p(t - x/v_1) dp$  и  $\exp p(t - x/v_2) dp$  подинтегральных выражений (2.9), начиная с некоторого  $R > R_0$ , удовлетворяют условиям основной леммы операционного исчисления [7, 8].

Если  $t - x/v_1 < 0$ , то интегрирование следует вести по контуру  $ABCA$ . В области, ограниченной этим контуром, функция  $u_{k1}$  не имеет особенностей, следовательно, интеграл  $u_{k1}(ABCA)$  равен нулю для любого  $R$ . Но  $u_{k1}(ABCA) = u_{k1}(ABC) + u_{k1}(CA)$  и согласно лемме  $\lim u_{k1}(ABC) = 0$  при  $R \rightarrow \infty$  и, следовательно,  $\lim u_{k1}(CA) = 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , т. е.  $u_{k1}(L) = 0$ .

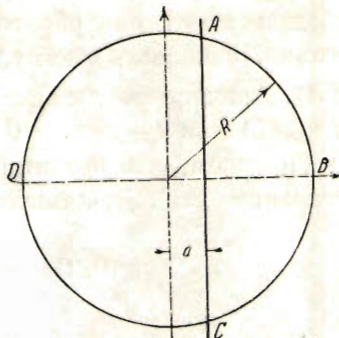
Если  $t - x/v_1 > 0$ , то интегрирование ведется по контуру  $ADCA$ . В области, ограниченной этим контуром, функции  $u_{k1}$  имеют особенности. Следовательно, интеграл  $u_{k1}(ADCA)$  отличен от нуля и остается одним и тем же для любого  $R > R_0$ .

Замечая, что  $u_{k1}(ADCA) = u_{k1}(ADC) + u_{k1}(CA)$  и что согласно лемме  $\lim u_{k1}(ADC) = 0$  при  $R \rightarrow \infty$  и, таким образом имеем  $\lim u_{k1}(CA) \neq 0$  при  $R \rightarrow \infty$ , т. е.  $u_{k1}(L) \neq 0$ . Следовательно, интегралы  $u_{k1}(L)$  имеют разрывы, соответствующие фронтам волн, которые распространяются со скоростью  $v_1$ , определяемой по формуле (1.3).

Проводя аналогичные исследования для  $u_{k2}(L)$ , найдем, что в этом случае скорость распространения фронта волн  $v_2$  определяется по (1.3).

Поэтому решение (2.9) дважды разрывное. Кроме того, если  $t - x/v_1 < 0$ ,  $t - x/v_2 < 0$ , то ни одна из волн в рассматриваемую точку еще не пришла. Если же  $t - x/v_1 < 0$  и  $t - x/v_2 > 0$  или наоборот, то пришла волна  $u_{k2}$ , а волна  $u_{k1}$  еще не пришла, или наоборот. Если же  $t - x/v_1 > 0$  и  $t - x/v_2 > 0$ , то обе волны пришли в эту точку.

Докажем, что решение  $u_k(L)$  удовлетворяет уравнениям (1.4). Рассмотрим сначала интегралы  $u_{k1}(L)$ . Если  $t - x/v_1 < 0$ , то берем интеграл



Фиг. 3.

$u_{k1}(ABCA)$ ; так как подинтегральные выражения интеграла  $u_{k1}(ABCA)$  являются голоморфными функциями, то их можно дифференцировать по параметрам  $x$  и  $t$ . Подставляя  $u_{k1}(ABCA)$  в уравнения (1.1), легко убедиться, что они обратятся в тождество для любого  $R$ , и, следовательно, используя лемму, найдем, что интегралы  $u_{k1}(L)$  удовлетворяют (1.1). Аналогично доказывается, что интегралы  $u_{k1}(L)$  при  $t - x/v_1 > 0$  и  $u_{k2}(L)$  при  $t - x/v_2 \geq 0$  удовлетворяют уравнениям (1.1).

Докажем, что функции  $u_1(L)$  и  $u_3(L)$  удовлетворяют граничным условиям (2.1). Действительно, при  $x=0$  имеем

$$u_1(0, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{pt} \frac{dp}{p} = 1, \quad u_3(0, t) = 0$$

Наконец, покажем, что решение  $u_k(L)$  удовлетворяет начальным условиям (1.2). В самом деле, при  $t=0$  для  $u_1$  имеем

$$u_1(x, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1+\mu}{2} e^{-r_1 x} \frac{dp}{p} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{1-\mu}{2} e^{-r_2 x} \frac{dp}{p}$$

Так как  $\operatorname{Re}(r_1) > 0$  и  $\operatorname{Re}(r_2) > 0$ , то, производя исследование, аналогичные тем, которые были приведены выше, получим  $u_1(x, 0) = 0$ .

Аналогично доказывается, что решение удовлетворяет и другим начальным условиям.

4. В качестве примера рассмотрим симметрированную линию [3], т. е.  $z_1 = z_2 = z$  и  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ . В этом случае имеем  $\mu = 0$ ,  $\mu_1 = 1/2$ , и

$$r_1 = \frac{1}{c_1} \sqrt{(p + 2\alpha_1)(p + 2\beta_1)}, \quad r_2 = \frac{1}{v_2} \sqrt{(p + 2\alpha_2)(p + 2\beta_2)} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \sqrt{(L-M)(C+C_{12})}, & \alpha_1 &= \frac{R}{2(L-M)}, & \beta_1 &= \frac{G+G_{12}}{2(C+C_{12})} \\ \frac{1}{v_2} &= \sqrt{(L+M)(C-C_{12})}, & \alpha_2 &= \frac{R}{2(L+M)}, & \beta_2 &= \frac{G-G_{12}}{2(C-C_{12})} \end{aligned} \quad (4.2)$$

и интегралы (2.9) примут вид

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt-r_1 x} \frac{dp}{p} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt-r_2 x} \frac{dp}{p} \right\} \\ u_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{C+C_{12}}{L-M}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sqrt{\frac{p+2\beta_1}{p+2\alpha_1}} e^{pt-r_1 x} \frac{dp}{p} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{C-C_{12}}{L+M}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sqrt{\frac{p+2\beta_2}{p+2\alpha_2}} e^{pt-r_2 x} \frac{dp}{p} \right\} \\ u_3 &= \frac{1}{2} \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt-r_1 x} \frac{dp}{p} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt-r_2 x} \frac{dp}{p} \right\} \\ u_4 &= \frac{1}{2} \left\{ -\sqrt{\frac{C+C_{12}}{L-M}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sqrt{\frac{p+2\beta_1}{p+2\alpha_1}} e^{pt-r_1 x} \frac{dp}{p} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{C-C_{12}}{L+M}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sqrt{\frac{p+2\beta_2}{p+2\alpha_2}} e^{pt-r_2 x} \frac{dp}{p} \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Эти интегралы были вычислены в работах [9, 10] и имеют вид

$$u_1 = \frac{1}{2}(u_{11} + u_{12}), \quad u_2 = \frac{1}{2}(u_{21} + u_{22})$$

$$u_3 = \frac{1}{2}(-u_{11} + u_{12}), \quad u_4 = \frac{1}{2}(-u_{21} + u_{22}) \quad (4.4)$$

Здесь

$$u_{11} = e^{-\gamma_1 t} [I_0(\zeta_1) + Y_1(\xi_1, \zeta_1) + Y_2(\xi_1, \zeta_1) + Y_1(\eta_1, \zeta_1) + Y_2(\eta_1, \zeta_1)] H\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

$$u_{12} = e^{-\alpha_2 t} [I_0(\zeta_2) + Y_1(\xi_2, \zeta_2) + Y_2(\xi_2, \zeta_2) + Y_1(\eta_2, \zeta_2) + Y_2(\eta_2, \zeta_2)] H\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$$

$$u_{21} = \sqrt{\frac{G+G_{12}}{R}} e^{-\gamma_1 t} \left[ \sqrt{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} I_0(\zeta_1) + Y_1(\xi_1, \zeta_1) + Y_2(\xi_1, \zeta_1) - \right. \quad (4.5)$$

$$\left. - Y_1(\eta_1, \zeta_1) - Y_2(\eta_1, \zeta_1) \right] H\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

$$u_{22} = \sqrt{\frac{G-G_{12}}{R}} e^{-\alpha_2 t} \left[ \sqrt{\frac{\alpha_2}{\beta_2}} I_0(\zeta_2) + Y_1(\xi_2, \zeta_2) + Y_2(\xi_2, \zeta_2) - \right.$$

$$\left. - Y_1(\eta_2, \zeta_2) - Y_2(\eta_2, \zeta_2) \right] H\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$$

где

$$\rho_1 = \alpha_1 + \beta_1, \quad \sigma_1 = \alpha_1 - \beta_1, \quad m_1 = \sqrt{\alpha_1} + \sqrt{\beta_1}, \quad n_1 = \sqrt{\alpha_1} - \sqrt{\beta_1}$$

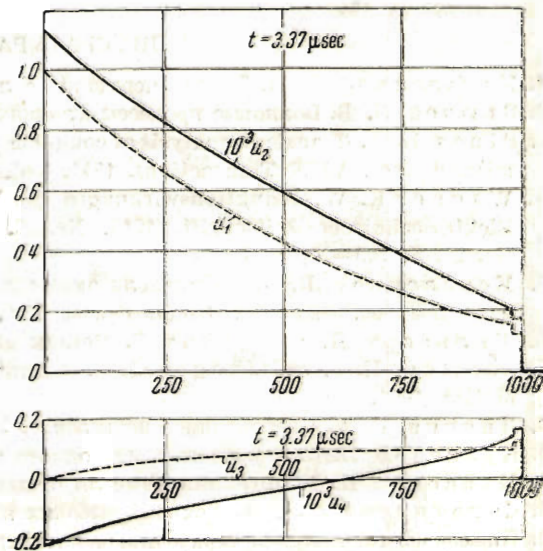
$$\rho_2 = \alpha_2 + \beta_2, \quad \sigma_2 = \alpha_2 - \beta_2, \quad m_2 = \sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\beta_2}, \quad n_2 = \sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\beta_2}$$

$$\xi_1 = m_1^2 \left(t - \frac{x}{v_1}\right), \quad \eta_1 = n_1^2 \left(t - \frac{x}{v_1}\right), \quad \zeta_1 = \sigma_1 \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{v_1}\right)^2}$$

$$\xi_2 = m_2^2 \left(t - \frac{x}{v_2}\right), \quad \eta_2 = n_2^2 \left(t - \frac{x}{v_2}\right), \quad \zeta_2 = \sigma_2 \sqrt{t^2 - \left(\frac{x}{v_2}\right)^2}$$

и  $H(y) = 0$  при  $y < 0$ ,  $H(y) = 1$  при  $y > 0$ .

Из рассмотрения формул (4.4) замечаем, что индуктирующая волна напряжения  $u_1$  состоит из полусуммы волн быстрой и медленной, индуктированная волна напряжения  $u_3$  состоит из полуразности тех же волн. Для любого промежутка времени  $t$  быстрая и медленная волны напряжений разойдутся на расстояние  $l = |v_1 - v_2| t$  и на всем этом расстоянии амплитуды индуктирующей и индуктированной быстрой волны остаются по абсолютной величине равными.



Фиг. 4.

Покажем теперь, что при  $M, G_{12}, C_{12}$ , стремящихся к нулю, остается только индуктирующая волна напряжений, индуктированная же волна

исчезнет. Действительно, при этом предположении согласно формулам (4.1), (4.2) и (4.5) имеем  $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ ,  $\beta_1 \rightarrow \beta_2$ ,  $v_1 \rightarrow v_2$ ,  $r_1 \rightarrow r_2$ ,  $u_{11} \rightarrow u_{12}$  а из (4.4) вытекает  $u_1 \rightarrow u_{11}$ ,  $u_3 \rightarrow 0$ , что и требовалось доказать.

Все изложенное остается в силе и для волн тока.

Для иллюстрации приводим в табл. 1 и на фиг. 4 результаты вычислений для двух однопроводных медных четырехмиллиметровых линий

Таблица 1					с постоянными [11, 12]	
$t = 3.37 \mu \text{ sec}$					$R = 1.49 \frac{\Omega}{\text{km}}$	
$x \text{ km}$	$i_1$	$10^3 u_2$	$u_3$	$10^3 u_4$	$L = 17.1 \times 10^{-4} \frac{H}{\text{km}}$	$G = 1.5 \times 10^{-6} \frac{1}{\Omega \text{ km}}$
0	1.000	1.143	0.000	-0.217	$C = 8.36 \times 10^{-9} \frac{F}{\text{km}}$	$M = 7.36 \times 10^{-4} \frac{H}{\text{km}}$
250	0.654	0.821	0.068	-0.103	$G_{12} = 0.5 \times 10^{-6} \frac{1}{\Omega \text{ km}}$	$C_{12} = 3.72 \times 10^{-9} \frac{F}{\text{km}}$
500	0.420	0.586	0.093	-0.034		
750	0.257	0.404	0.103	0.027		
981-0	0.157	0.207	0.100	0.143		
981+0	0.129	0.175	0.129	0.175		
1000-0	0.125	0.172	0.125	0.172		
1000+0	0.000	0.000	0.000	0.000		

Применяя способы, изложенные в работе [13], получим решение задачи для линий с приемно-передающими устройствами при любых источниках питания на ближних концах.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность В. И. Коваленкову за постановку задачи, а В. Н. Кузнецову и Н. Н. Лузину за ценные советы при выполнении этой работы.

Поступила в редакцию

29 IV 1947

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленков В. И. Теория передачи по линиям электросвязи. 1937. Т. 1.
2. Бьюлей Л. В. Волновые процессы в линиях передачи и трансформаторах. 1938.
3. Pipes L. A. Transient analysis of completely transposed multiconductor transmission lines. AJEE Transactions. 1941. Vol. 60, p. 346—350.
4. Wagner K. W. Induktionswirkungen von Wanderwellen in Nachbarleitungen. Elektrotechnische Zeitschrift. 1914. Nr. 23. S. 639—643; Nr. 24 S. 677—680; Nr. 25, S. 705—708
5. Коваленков В. И. Устанавливающиеся процессы при движении электромагнитных волн вдоль проводов связи. Изв. ОТН АН СССР. 1945. № 12.
6. Гильберт Д. и Курант Р. Методы математической физики. 1945. Т. II.
7. Carslaw H. S. and Jaeger J. C. Operational methods in applied mathematics. 1941.
8. Диткин В. А. Операционное исчисление. Успехи математических наук. 1947.
9. Кузнецов П. И. О представлении одного контурного интеграла. ПММ. 1947.
10. Кузнецов П. И. Функции Ломмеля от двух мнимых аргументов. ПММ. 1947.
11. Сиротинский Л. И. Техника высоких напряжений. 1945. Вып. 3.
12. Инженерно-технический справочник по электросвязи. IV. Воздушные и кабельные линии связи. 1945.
13. Кузнецов П. И. Распространение электромагнитных волн вдоль линий. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 6