Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

КОНЕЧНЫЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ В ПОЛОМ ШАРЕ, ПОДВЕРЖЕННОМ ВНУТРЕННЕМУ ДАВЛЕНИЮ

Ф. А. Бахшиян

(Москва)

§ 1. Смешанная упруго-пластическая задача о полом шаре, подверженном внутреннему давлению, в случае малых смещений решена [1]. Здесь эта задача обобщается на случай конечных перемещений.

Пусть полый шар внутреннего и внешнего радиусов a и b подвержен равномерному внутреннему давлению p. Уравнение равновесия при любых смещениях будет

$$(r+u)^2\, d\sigma_r + 2\,(r+u)\,(dr+du)\,(\sigma_r - \sigma_0) = 0 \tag{1.1}$$

где r — лагранжева кордината точки. Вместо радиального смещения u рассмотрим величину $v = r + u$. Уравнение (1.1) примет вид

$$v\, d\sigma_r + 2dv\,(\sigma_r - \sigma_0) = 0 \tag{1.2}$$

Если давление p вызывает пластическую зону радиуса ρ, то при $a \leqslant r \leqslant \rho$ в (1.2) следует положить [2]

$$\sigma_r = k\Theta - \frac{2}{3}\sigma_s, \qquad \sigma_r - \sigma_0 = -\sigma_s \tag{1.3}$$

где

$$\Theta = \left(1+\frac{u}{r}\right)^2\left(1+\frac{du}{dr}\right) - 1 = \frac{v^2}{r^2}\frac{dv}{dr} - 1 \tag{1.4}$$

Подставляя (1.3) в (1.2), получим последовательно

$$\sigma_r = C_0 + 2\sigma_s \log v, \qquad k\left(\frac{v^2}{r^2}\frac{dv}{dr} - 1\right) - \frac{2}{3}\sigma_s = C_0 + 2\sigma_s \log v \tag{1.5}$$

Отсюда, полагая для удобства $C_0 + k + \frac{2}{3}\sigma_s = 2\sigma_s C$, получим

$$\int \frac{v^2\, dv}{C + \log v} = C_1 + \frac{2}{3}\frac{\sigma_s}{k} r^3 \tag{1.6}$$

Здесь C и C_1 — произвольные постоянные. С помощью подстановки $x = e^{3C}v^3$ в правой части (1.5) получаем

$$\int \frac{v^2\, dv}{C + \log v} = e^{-3C}\int \frac{e^x}{x}\, dx = e^{-3C}\int \frac{dx}{\log x}$$

Для интегрирования (1.2) в упругой зоне $\rho \leqslant r \leqslant b$ примем закон Гука при значении Θ согласно (1.4)

$$\sigma_r = \lambda\Theta + 2\mu\frac{du}{dr}, \qquad \sigma_r - \sigma_0 = 2\mu\left(\frac{du}{dr} - \frac{u}{r}\right)$$

Здесь λ и μ — коэффициенты Лямэ. Переходя к переменной v, имеем

$$\sigma_r=\lambda\left(\frac{v^2v'}{r^2}-1\right)+2\mu(v'-1),\qquad \sigma_r-\sigma_t=r\mu\left(v'-\frac{v}{r}\right)\qquad\left(v'=\frac{dv}{dr}\right)\tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.2) после преобразований получим уравнение

$$\left(vv''-\frac{2vv'}{r}+2v'^2\right)\left(\frac{\lambda v^2}{r^2}+2\mu\right)=0\tag{1.8}$$

Здесь второй множитель существенно отличен от нуля и может быть опущен. Разделив (1.8) на vv', последовательно получим

$$\frac{v''}{v'}+2\frac{v'}{v}=\frac{2}{r},\quad\text{или}\quad v^2v'=C_3r^2,\quad\text{или}\quad\left(\frac{v^3}{3}\right)'=\left(\frac{C_3r^3}{3}\right)'$$

Интегрируя далее, находим решение уравнения (1.8)

$$v^3=C_3r^3+C_2\tag{1.9}$$

Из (1.9) легко получить предельным переходом обычное решение, исчезающее на бесконечности. Для этого переходим к переменной u и разделим обе части равенства на r^3. Имеем

$$\left(1+\frac{u}{r}\right)^3=C_3+\frac{C_2}{r^3},\quad\text{или}\quad 3\frac{u}{r}+3\left(\frac{u}{r}\right)^2+\left(\frac{u}{r}\right)^3=C_3-1+\frac{C_2}{r^3}$$

Полагая $C_3=1$ и пренебрегая членами $(u/r)^2$ и $(u/r)^3$, получим известное решение $u=C/3r^2$.

Заметим, что для конечных перемещений в полом цилиндре, подверженном внутреннему давлению (задача Лямэ), аналогичным путем в упругой области можно получить уравнение и его интеграл в виде

$$\left(vv''-\frac{vv'}{r}+v'^2\right)\left(\frac{\lambda v^2}{r^2}+2\mu\right)=0,\qquad v^2=A+Br^2$$

где A и B — произвольные постоянные.

§ 2. Рассмотрим два случая. 1. Материал сферы не выходит за предел упругости. Тогда постоянные C_2 и C_3 определяются из условий

$$\sigma_r=C_3\left(\lambda+2\mu\frac{r^2}{v^2}\right)-(\lambda+2\mu)=0\qquad\text{при}\quad r=b\tag{2.1}$$

$$\sigma_r=C_3\left(\lambda+2\mu\frac{r^2}{v^2}\right)-(\lambda+2\mu)=-p\qquad\text{при}\quad r=a\tag{2.2}$$

В этих уравнениях следует положить согласно (1.9)

$$v^2=(C_3+C_4r^3)^{2/3}$$

2. Весь материал сферы находится в пластическом состоянии. В этом случае должны выполняться следующие условия: внешняя граница свободна от нагрузки, т. е. $\sigma_r=0$ при $r=b$; на внутренней границе $\sigma_r=-p$ при $r=a$. Кроме того, при $r=b$ интенсивность деформаций e_i достигает предельного значения

$$e_s=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{dv}{dr}-\frac{v}{r}\right)$$

Из первого соотношения (1.5) при указанных условиях получаем

$$C_0+2\sigma_s\log v_b=0,\qquad C_0+2\sigma_s\log v_a=-p\tag{2.3}$$

Отсюда

$$p=2\sigma_s\log\frac{v_b}{v_a}\tag{2.4}$$

где v_a и v_b — значения v при $r=a$ и $r=b$

Из второго соотношения (1.5) имеем

$$\frac{dv}{dr} = \frac{r^2}{kv^2}\left(k + \frac{2}{3}\sigma_s + C_0 + 2\sigma_s \log v\right)$$

Полагая $r = b$ и имея в виду (2.3), для v_b получим

$$v_b^3 - \frac{3}{2} be_s v_b^2 - (1+\alpha) b^3 = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{2\sigma_s}{3k}\right) \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) подстановкой $v_b = x + \frac{1}{2} be_s$ приводится к виду

$$x^3 - 3\left(\frac{be_s}{2}\right)^2 x - \gamma b^3 = 0 \qquad \left(\gamma = 1 + \frac{2}{3}\frac{\sigma_s}{3k} + \frac{3}{8} e_s^3\right)$$

Последнее имеет решение $x = y + z$, где

$$y^3 = \frac{b^3}{2}\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \frac{e_s^6}{16}}\right), \qquad z^3 = \frac{b^3}{2}\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \frac{e_s^6}{16}}\right)$$

Если отбросить малую величину $e_s^6 / 12$, то приближенно

$$v_b = \frac{b}{2}\left(e_s + 2\sqrt{1 + \frac{2}{3}\frac{\sigma_s}{k} + \frac{3}{8} e_s^3}\right)$$

Возвращаясь к переменной u, получим, что перемещение на внешней границе u_b приближенно будет равно $\frac{1}{2} be_s$.

§ 3. Предположим теперь, что материал несжимаем. В пластической зоне $a \leqslant r \leqslant \rho$ уравнение (1.2) сохраняет силу, т. е. согласно (1.5) попрежнему $\sigma_r = C + 2\sigma_s \log v$. Перемещение v определяется из (1. 4), где по условию несжимаемости $\Theta = 0$, т. е.

$$v^2 \frac{dv}{dr} = r^2 \quad \text{или} \quad v^3 = D + r^3 \tag{3.1}$$

Произвольные постоянные C и D определяются из условий:

$$\sigma_r = -p \quad \text{при} \quad r = a, \qquad -\frac{2}{3}\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right) = e_s \quad \text{при} \quad r = \rho \tag{3.2}$$

Из первого условия имеем $C = -p - 2\sigma_s \log v_a$. Следовательно,

$$\sigma_r = -p + 2\sigma_s \log \frac{v}{v_a}. \tag{3.3}$$

Среднее гидростатическое давление в пластической зоне будет

$$\sigma = \sigma_r + \frac{2}{3}\sigma_s = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + 2\sigma_s \log \frac{v}{v_a} \tag{3.4}$$

Из второго условия (3.2) для определения D получаем уравнение

$$\rho^3 - v_\rho^3 + \frac{3}{2} v_\rho^2 e_s = 0 \tag{3.5}$$

где v_ρ есть значение v при $r = \rho$. Заметим, что $\rho^3 - v_\rho^3 = -D$, согласно (3.1). Подставляя отсюда v_ρ в (3.5) получим

$$D^3 - \alpha D^2 - 2\alpha\rho^3 D - \alpha\rho^6 = 0 \qquad \left(\alpha = \frac{27}{8}\rho^3 e_s^3\right) \tag{3.6}$$

В упругой зоне имеем

$$\sigma_r = \sigma_1 + 2\mu\left(\frac{dv}{dr} - 1\right), \qquad \sigma_r - \sigma_1 = 2\mu\left(\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r}\right) \tag{3.7}$$

Пользуясь этим, уравнение равновесия (1.1) приведем к виду

$$d\sigma_r + 4\mu dv\left(\frac{r^2}{v^3} - \frac{1}{r}\right) = 0$$

Так как из условия несжимаемости следует $v^3 = D + r^3$, то уравнение равновесия принимает вид

$$d\sigma_r - 4\mu D\frac{r\,dr}{(D+r^3)^{5/3}} = 0, \quad \text{или} \quad \sigma_r = B + 4\mu D\int_\rho^r \frac{r\,dr}{(D+r^3)^{5/3}} \tag{3.8}$$

Постоянное B определяется из условия отсутствия внешнего давления, после чего окончательно

$$\sigma_r = -4\mu D\int_r^b \frac{r\,dr}{(D+r^3)^{5/3}} \tag{3.9}$$

Если материал не выходит за пределы упругости, то в (3.8) следует положить $\rho = a$. Для определения постоянных B и D имеем

$$-p = B, \qquad 0 = B + 4\mu D\int_a^b \frac{r\,dr}{(D+r^3)^{5/3}} \tag{3.10}$$

Отсюда, согласно (3.8)

$$\sigma_r = -p + 4\mu D\int_a^r \frac{r\,dr}{(D+r^3)^{5/3}}, \qquad \left(4\mu D\int_a^b \frac{r\,dr}{(D+r^3)^{5/3}} = p\right).$$

Наконец, разберем случай, когда толщина сферы $h = b - a$ столь мала, что ее квадратом можно пренебрегать. Внутреннее давление, под действием которого такая сфера вся переходит в пластическое состояние, определяется из (2.3)

$$p = 2\sigma_s(\log v_b - \log v_a) = 2\sigma_s h\left(\frac{v'}{v}\right)_{r=a}$$

Здесь использована теорема Лагранжа. Определяя далее v'/v из (1.5), получим

$$p = \frac{2}{3}\sigma_s\frac{(3k + 3\sigma_s)a^2h}{kv_a^2 + 2\sigma_s a^2 h} \approx \frac{2}{3}\sigma_s\frac{(3k + 2\sigma_s)h}{ak + 2\sigma_s h}$$

Можно получить более простую приближенную формулу, если в (2.3) $\log(v_b/v_a)$ заменить $\log(b/a)$. Тогда получим

$$p = 2\sigma_s\frac{h}{a}$$

Поступила в редакцию
25 XI 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Элементы математической теории пластичности. Гостехиздат. 1943.

2. Ильюшин А. А. Некоторые вопросы теории пластических деформаций. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 4.