Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПОГРАНИЧНОЙ ЗОНЫ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ В КОМПЛЕКСНОЙ ФОРМЕ

Х. М. Муштари

(Казань)

1. Основные уравнения. Пусть a_{jk} и b_{jk} — коэффициенты первой и второй квадратичной формы недеформированной срединной поверхности, a_{jk}^* и b_{jk}^* — эти же величины деформированной поверхности:

$$\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}(a_{jk}^* - a_{jk}), \quad \beta_{jk} = b_{jk}^* - b_{jk}; \quad \mu_{jk} = -\beta_{jk} + b^s_{.k}\varepsilon_{js} \tag{1.1}$$

где ε_{jk} и μ_{jk} — тензоры удлинения и изменения кривизны. Введем также дискриминантный тензор c_{jk}, для которого

$$c_{jj} = 0, \quad c_{12} = -c_{11} = \sqrt{a}, \quad c_{j\alpha}c^{k\alpha} = a^*{}_j{}^k, \quad a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \tag{1.2}$$

Уравнения неразрывности деформации и уравнения равновесия в форме, приведенной в статье А. Л. Гольденвейзера [1], имеют вид

$$c^{\dot\alpha\beta}c^{st}\nabla_\beta\mu_{t\dot\alpha} - c^{\dot\alpha\beta}b_{\beta.}^{s}c^{jk}\nabla_k\varepsilon_{j\dot\alpha} = 0 \tag{1.3}$$

$$c^{\dot\alpha\beta}c^{st}b_{s\beta}\mu_{t\dot\alpha} + c^{\dot\alpha\beta}\nabla_\beta(c^{jk}\nabla_k\varepsilon_{j\dot\alpha}) = 0 \tag{1.4}$$

$$\nabla_\beta T^{s\beta} - b^s_{.\beta}N_\beta = -X^s, \qquad b_{s\beta}T^{s\beta} + \nabla_\beta N^\beta = X,$$
$$-c_{\alpha j}\nabla_\beta M^{\alpha\beta} + c_{\dot\alpha j}N^{\alpha}_{\cdot} = -Y_j \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем все индексы принимают значения 1 и 2. Связь между тензором деформации и контравариантными тензорами упругого усилия $T^{\dot\alpha\beta}$ и упругого момента $M^{\dot\alpha\beta}$ дают соотношения

$$\varepsilon_{j\dot\alpha} = B'(a_{j\gamma}a_{\dot\alpha\delta} - \sigma c_{j\gamma}c_{\dot\alpha\delta})T^{\gamma\delta}, \qquad B' = 1/2\,Eh \tag{1.6}$$

$$M^{jk} = D(a^{j\alpha}a^{k\beta} + \sigma c^{j\dot\alpha}c^{k\beta})\mu_{\dot\alpha\beta}, \qquad D = 2Eh^3/3(1-\sigma^2) \tag{1.7}$$

Из последнего уравнения (1.5) для перерезывающих усилий находим

$$N^{\dot\alpha} = \nabla_\beta M^{\dot\alpha\beta} - Y_j c^{\dot\alpha j}$$

Следовательно, остальные уравнения (1.5) можно записать в виде

$$\nabla_\beta T^{s\beta} = b^s_{.\beta}(\nabla_k M^{\beta k} - Y_j c^{\beta j}) - X^s \tag{1.8}$$

$$b_{s\beta}T^{s\beta} + \nabla_j\nabla_k M^{jk} = X + \nabla_{\dot\alpha}(Y_j c^{\dot\alpha j}) = Z \tag{1.9}$$

Таким образом, имеем шесть уравнений (1.3), (1.4), (1.8) и (1.9) для определения шести величин $\mu_{t\dot\alpha}$ и $\varepsilon_{j\dot\alpha}$.

2. Уравнения равновесия пограничной зоны в компонентах комплексного усилия. В пограничной зоне оболочки удлинения от растяжения — сжатия и от изгиба — величины одного порядка. Поэтому с погрешностью, присущей теории оболочек, построенной на гипотезе Кирхгофа-Лява, и составляющей величину порядка h_0 (отношения толщины оболочки к наименьшему из остальных линейных размеров) по сравнению с единицей, величинами $b^{\varepsilon}_{\beta}\varepsilon_{j\alpha}$ можем пренебрегать по сравнению с $\mu_{t\dot{\alpha}}$. Пусть, далее, граничный контур не имеет угловых точек и принадлежит к семейству координатных линий $x^1 = \text{const}$. Имеющиеся решения задачи краевого эффекта показывают, что компоненты упругого усилия и момента в пограничной зоне при изменении безразмерной кординаты x^1 изменяются по экспоненциальному закону так, что производные их в $h_0^{-\frac{1}{2}}$ раз больше самих величин.

Положим, что в общем случае дифференцирование по x^1 дает фактор h_0^{-r}, дифференцирование же по x^2 не изменяет порядка величин. При этом, как известно, $r \leqslant {}^1/_2$. Учитывая сказанное, уравнения (1.3) заменяем приближенными уравнениями

$$c^{st}c^{\dot{\alpha}\beta}\nabla_{\beta}\mu_{t\dot{\alpha}} = 0 \tag{2.1}$$

из рассмотрения которых приходим к заключению, что наибольшей из величины $\mu_{t\dot{\alpha}}$ является μ_{11}, а величины μ_{12} и μ_{22} суть, самое большее, одного порядка с $h_0^r\mu_{11}$. (Более подробное исследование этого вопроса проводится в § 3.) Нетрудно также показать, что при переходе от уравнений (1.3) к приближенным уравнениям (2.1) мы отбросили, самое большее, члены порядка h_0^{1-r} по сравнению с единицей. Так как эти последние уравнения нами используются лишь для выражения величин второстепенных изгибов μ_{12} и μ_{22} через μ_{11}, то соответствующая погрешность при определении суммарного напряжения от изгиба будет порядка h_0 по сравнению с единицей. Совершенно так же уравнение (1.8) заменяем приближенным уравнением

$$\nabla_{\beta}T^{\cdot\beta} = -X^{\cdot} \tag{2.2}$$

При этом оказывается, что наиболее существенной компонентой упругого усилия является T^{22}, а величины T^{12} и T^{21} суть, самое большее, порядка $h_0^rT^{22}$. Из (1.9) после подстановки (1.7) и с учетом того, что при ковариантном дифференцировании c_{jk} и a_{jk} ведут себя как постоянные факторы, получаем уравнение

$$b_{\cdot\beta}T^{\cdot\beta} + Da^{j\alpha}a^{k\beta}\nabla_j\nabla_k\mu_{\alpha\beta} = Z - D\sigma c^{j\alpha}c^{k\beta}\nabla_j\nabla_k\mu_{\dot{\alpha}\beta}$$

Но по уравнению (1.3)

$$Dc^{j\alpha}c^{k\beta}\nabla_j\nabla_k\mu_{\dot{\alpha}\beta} = Dc^{\alpha\beta}c^{m}{}_{n}\nabla_j(b^{j}_{\cdot\beta}\nabla_n\varepsilon_{m\alpha})$$

Отношение этой величины к величине главных членов левой части предыдущего уравнения (например, к $\nabla_1\nabla_1\mu_{11}$), самое большее, порядка h_0. Поэтому с точностью до h_0 по сравнению с единицей (1.9) заменяем приближенным уравнением

$$b_{\cdot\beta}T^{\cdot\beta} + Da^{j\alpha}a^{k\beta}\nabla_j\nabla_k\mu_{\alpha\beta} = X + \nabla_{\dot{\alpha}}(Y_jc^{\dot{\alpha}j}) = Z \tag{2.3}$$

Подставляя далее (1.6) в (1.4) и учитывая (1.8) и (1.2), имеем с той же точностью

$$c^{\alpha\beta}c^{st}b_{s\beta}\mu_{t\alpha}+B'\nabla_\beta\nabla_t\left(c^{\alpha\beta}c^{st}a_{s\gamma}a_{\alpha\delta}T^{\gamma\delta}\right)=-B'\sigma\nabla_k X^k \tag{2.4}$$

Введем комплексные усилия

$$T_*^{s\beta}=T^{s\beta}+\frac{iD}{h'}c^{st}c^{\alpha\beta}\mu_{t\alpha}\qquad\left(h'=\frac{h}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}},\ i=\sqrt{-1}\right) \tag{2.5}$$

Умножая (2.1) на iD/h' и складывая с (2.2), имеем

$$\nabla_\beta T_*^{s\beta}=-X^s \tag{2.6}$$

Также из (2.4) и (2.3), учитывая, что

$$a^{j\alpha}a^{k\beta}\nabla_j\nabla_k\mu_{\alpha\beta}=\nabla_\beta\nabla_t a^{\beta\lambda}a^{t\nu}\mu_{\lambda\nu},\qquad a^{t\lambda}=c^{st}c^{\gamma\lambda}a_{s\gamma},\ \ldots$$

имеем

$$b_{s\beta}T_*^{s\beta}+h'i\nabla_\beta\nabla_t\left(c^{\alpha\beta}c^{st}a_{s\gamma}a_{\alpha\delta}T_*^{\gamma\delta}\right)=-\sigma h'i\nabla_k X^k+Z \tag{2.7}$$

Заметим, что уравнения (2.6) были получены путем пренебрежения величинами порядка h_0^{1-r} по сравнению с единицей, а уравнение (2.7) составлено с погрешностью, присущей гипотезе Кирхгофа-Лява, причем погрешность при определении напряжения составляет величину порядка h_0 по сравнению с единицей (за исключением весьма редкого случая, о котором сказано в конце статьи). Однако не представляет затруднения вывод более точных уравнений, заменяющих (2.6), с погрешностью порядка h_0 по сравнению с единицей. Не останавливаясь на деталях этого вывода, аналогичных предыдущему, привожу искомые уравнения в окончательном виде:

$$\nabla_\beta T_*^{s\beta}-ih'b^s_{.\beta}c^{j\beta}c^{\alpha k}a_{j\gamma}a_{\alpha\delta}\nabla_k T_*^{\gamma\delta}=Z^s=b^s_{.\beta}Y_j c^{\beta j}-X^s \tag{2.8}$$

Система уравнений (2.7) и (2.8) может быть использована не только для решения задачи краевого эффекта, но и для решения общей задачи упругого равновесия оболочки. Частные интегралы, соответствующие распределенной поверхностной нагрузке, могут быть определены из уравнений безмоментной оболочки (для X^k и X) и из уравнений типичного изгиба (для Y_j), поэтому в дальнейшем будем рассматривать однородные уравнения краевого эффекта

$$\begin{gathered}\nabla_1 T_*^{11}+\nabla_2 T_*^{12}=0,\quad \nabla_1 T_*^{12}+\nabla_2 T_*^{22}=0\\ T_*^{s\beta}b_{s\beta}+h'i\nabla_\beta\nabla_t\left(c^{\alpha\beta}c^{st}a_{s\gamma}a_{\alpha\delta}T_*^{\gamma\delta}\right)=0\end{gathered} \tag{2.9}$$

Физические составляющие комплексного усилия в ортогональных координатах

$$T_{*(ik)}=\sqrt{a_{ii}}\sqrt{a_{kk}}\,T_*^{ik} \tag{2.10}$$

В линиях кривизны имеем

$$a_{ii}=A_i^2,\qquad b_{ii}=k_iA_i^2,\qquad b_{12}=0\qquad\text{при}\quad k_i=\pm\frac{1}{R_i}$$

При этом уравнения (2.7) и (2.8) переходят в уравнения, выведенные В. В. Новожиловым [2].

3. Приближенное решение однородных уравнений. Рассмотрим сначала развертывающуюся поверхность. Тогда при надлежащем выборе криволинейных кординат

$$\Gamma_{jk}^{\ l}=0, \qquad \nabla_m T_*^{\ jk}=\partial_m T_*^{\ jk}$$

Здесь символом ∂_m обозначена частная производная по x^m (обозначение Скоутена); при этом

$$\nabla_1 T_*^{\ 11} \sim T_*^{\ 11} h_0^{\ -r}, \qquad \nabla_2 T_*^{\ 12} \sim T_*^{\ 12}$$

где символ $\sim$ указывает, что сравниваемые величины имеют одинаковый порядок. Следовательно, по (2.9)

$$T_*^{\ 11} \sim T_*^{\ 12} h_0^{\ r}, \qquad T_*^{\ 12} \sim T_*^{\ 22} h_0^{\ r}, \qquad T_*^{\ 11} \sim T_*^{\ 22} h_0^{\ 2r} \tag{3.1}$$

Кроме того, $a_{11}=a_{22}=\mathrm{const}=R^2$, $a_{12}=0$. Поэтому с погрешностью порядка $h_0^{\ 2r}$ по сравнению с единицей третье уравнение (2.9) можно заменить приближенным уравнением

$$b_{11} T_*^{\ 11} + 2b_{12} T_*^{\ 12} + b_{22} T_*^{\ 22} + ih' \partial_1 \partial_1 T_*^{\ 22} = 0 \tag{3.2}$$

Если при этом $x^1=\mathrm{const}$ — семейство линий кривизны и $b_{22} \neq 0$, что имеет место в случае цилиндрической оболочки, то с той же погрешностью

$$\partial_1 \partial_1 T_*^{\ 22} - \lambda^2 T_*^{\ 22} = 0, \qquad \lambda = (1+i) R / \sqrt{2h' R_2} \tag{3.3}$$

Отсюда видим, что в этом случае $r = \frac{1}{2}$ и, следовательно, погрешность уравнения (3.3) не превышает погрешность, присущую теории тонких оболочек. Это уравнение интегрируется непосредственно при произвольных радиусах кривизны R_2 поперечного сечения.

Уравнение (3.2) применимо и в случае, когда координатные линии образуют ортогональную изотермическую сеть и в пограничной зоне $\Gamma_{jk}^{\ l} \sim h_0^{\ r}$. Пусть, например, срединная поверхность — минимальная винтовая поверхность, отнесенная к асимптотическим линиям. Тогда

$$a_{12}=0, \quad a_{11}=a_{22}=b^2 \operatorname{ch}^2 x^1, \quad b_{11}=b_{22}=0, \quad b_{12}=b=\mathrm{const}, \quad \Gamma_{11}^{\ \prime}=\operatorname{th} x^1, \ldots$$

Как показали И. В. Геккелер и Ю. Н. Работнов [3], отношение ширины пограничной зоны к среднему радиусу кривизны имеет порядок $\sqrt{h_0}$. В общем случае оно порядка $h_0^{\ r}$. Следовательно, если линия $x^1=0$ есть граничный контур, то в пограничной зоне $x^1 \sim h_0^{\ r}$, и с точностью до $h_0^{\ 2r}$ уравнения (2.9) приводятся к виду

$$\begin{gathered} \partial_1 T_*^{\ 11} + \partial_2 T_*^{\ 12} - T_*^{\ 22} \operatorname{th} x^1 = 0 \\ \partial_1 T_*^{\ 12} + \partial_2 T_*^{\ 22} = 0, \quad 2b T_*^{\ 12} + ih' \partial_1 \partial_1 T_*^{\ 22} = 0 \end{gathered} \tag{3.4}$$

На решении этой системы и рассмотрении граничных условий задачи мы здесь останавливаться не будем, так как нами подготовлена к печати специальная статья, посвященная детальному исследованию упругого равновесия такой оболочки. Отметим лишь, что в данном случае $r=1/3$ и наши упрощенные уравнения верны с точностью до $h_0^{\ 2/3}$ по сравнению с единицей.

Предположим теперь, что эти особые случаи не имеют места. Тогда Γ_{jk}^l, самое большее, – величины порядка единицы.

Из первых двух уравнений (2.9) имеем

$$\begin{aligned} &\partial_1 T_*^{11} + \partial_2 T_*^{12} + (2\Gamma_{1\alpha}^1 + \Gamma_{2\alpha}^2) T_*^{1\alpha} + \Gamma^1_{2\alpha} T_*^{2\alpha} = 0 \\ &\partial_1 T_*^{12} + \partial_2 T_*^{22} + (\Gamma_{1\alpha}^1 + 2\Gamma_{2\alpha}^2) T_*^{2\alpha} + \Gamma_{1\alpha}^2 T_*^{1\alpha} = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из этих уравнений с точностью до h_0^r получим

$$\begin{aligned} &\partial_1 T_*^{11} + \Gamma_{22}^1 T_*^{22} \approx 0 \\ &\partial_1 T_*^{12} + \partial_2 T_*^{22} + (\Gamma_{12}^1 + 2\Gamma_{22}^2) T_*^{22} \approx 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Отсюда согласно (3.1) имеем

$$T_*^{12} \sim T_*^{11} \sim T_*^{22} h_0^r$$

Положим $x^1 = x_0^1 + \xi$. Тогда на граничном контуре $\xi = 0$, а в пограничной зоне $|\xi| \sim h_0^r$. С погрешностью порядка h_0^{2r} имеем

$$a_{jk} = a_{jk\,(0)} + a_{jk\,(1)}\xi, \qquad b_{jk} = b_{jk\,(0)} + b_{jk\,(1)}\xi$$

где

$$a_{jk(1)} = (\partial_1 a_{jk})_{\xi=0}, \; \ldots$$

При этом $a_{jk(0)} \sim 1$, $b_{jk(1)} \sim b_{jk(0)}$, $a_{jk(1)}$, Γ_{jk}^m — величины порядка единицы, за исключением, может быть, особых точек, вблизи которых приближенная теория перестает быть применимой. Поэтому во второстепенных членах уравнений, содержащих множитель h_0^r по сравнению с остальными, можно (с погрешностью порядка h_0^{2r} по сравнению с единицей) все эти величины, характеризующие геометрию оболочки, считать равными их значениям на соответствующем граничном контуре. Учитывая это, а также (3.6), в третьем из уравнений (2.9) с той же погрешностью можно положить

$$\begin{gathered} \nabla_1\nabla_1 T_*^{11} \approx \partial_1\partial_1 T_*^{11} \approx -\Gamma_{22}^1 \partial_1 T_*^{22}, \qquad \nabla_2\nabla_2 T_*^{22} \approx -\Gamma_{22}^1 \partial_1 T_*^{22} \\ \nabla_1\nabla_1 T_*^{22} \approx \partial_1\partial_1 T_*^{22} + (4\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)\partial_1 T_*^{22}, \qquad \nabla_2\nabla_2 T_*^{11} \approx 0 \\ \nabla_2\nabla_2 T_*^{12} \approx 0, \qquad \nabla_1\nabla_1 T_*^{12} \approx -\partial_1\partial_2 T_*^{22} + (\Gamma_{12}^1 - 2\Gamma_{22}^2)\partial_1 T_*^{22} \\ \nabla_1\nabla_2 T_*^{12} \approx \Gamma_{22}^1 \partial_1 T_*^{22}, \ldots \end{gathered}$$

Таким образом, оно приводится к виду

$$\partial_1\partial_1 T_*^{22} - \mu_1 \partial_1\partial_2 T_*^{22} - \mu_2 \partial_1 T_*^{22} - \lambda_{11} T_*^{11} - 2\lambda_{12} T_*^{12} - \lambda_{22} T_*^{22} = 0 \tag{3.7}$$

где

$$\lambda_{11} = \frac{iab_{11}}{h' a_{22}^2}, \qquad \lambda_{12(0)} = \left(\frac{iab_{12}}{h' a_{22}^2}\right)_0, \qquad \lambda_{22} = \lambda_{22(0)} + \lambda_{22(1)}\xi = \frac{iab_{22}}{h' a_{22}^2}, \tag{3.8}$$

$$\mu_1 = \left\{\frac{4a_{12}}{a_{22}}\right\}_0$$

$$\mu_2 = \left\{\frac{2\Gamma_{22}^2(a_{11}a_{22} + 2a_{12}^2) + 4(2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{12}^1)a_{12}a_{22} - (4\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1)a_{22}^2}{a_{22}^2}\right\}_0$$

Наибольший интерес представляет случай, когда граничный контур не является асимптотической линией и, следовательно, краевой эффект проявляется в полной мере. Тогда $b_{22} \neq 0$ и с погрешностью порядка $h_0^{1/2}$ по сравнению с единицей (так как $r = \frac{1}{2}$) имеем

$$\partial_1\partial_1 T_*^{22} - T_*^{22}\lambda^2 = 0, \qquad \lambda = \sqrt{\lambda_{22(0)}} = (1+i)\sqrt{\frac{a_0 b_{22(0)}}{2h' a_{22(0)}^2}}$$

$$T_*^{22} \approx T_{*(1)}^{22} = C_1(x^2)\,e^{\lambda\xi} + C_2(x^2)\,e^{-\lambda\xi} \tag{3.9}$$

где C_1 и C_2 — произвольные функции от x^2 с комплексными коэффициентами. Отсюда и из (3.6) с той же точностью

$$\begin{aligned} T_*^{11} &\approx T_{*(1)}^{11} = -\int \Gamma^1_{22(0)} T_{*(1)}^{22}\, d\xi \\ T_*^{12} &\approx T_{*(1)}^{12} = -\int \left[\partial_2 T_{*(1)}^{22} + (\Gamma^1_{12} + 2\Gamma^2_{22})_0\, T_{*(1)}^{22}\right] d\xi \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь произвольные функции от x^2, появляющиеся при интегрировании, приравнены нулю, так как они не могут войти в интеграл краевого эффекта.

Для определения T_*^{22} с точностью до h_0 можно подставить в (3.7) вместо ранее отброшенных малых членов их значения по первому приближению. Таким образом, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \partial_1\partial_1 T_*^{22} - T_*^{22}\lambda^2 = f(\xi, x^2) = \mu_1\partial_1\partial_2 T_{*(1)}^{22} + \\ + \mu_2\partial_1 T_{*(1)}^{22} + \lambda_{11(0)} T_{*(1)}^{11} + 2\lambda_{12(0)} T_{*(1)}^{12} + \lambda_{22(1)} T_{*(1)}^{22}\xi \end{aligned} \tag{3.11}$$

Следовательно,

$$T_*^{22} = e^{\lambda\xi}\left[C_1 + \frac{1}{2\lambda}\int e^{-\xi\lambda} f\, d\xi\right] + e^{-\lambda\xi}\left[C_2 - \frac{1}{2\lambda}\int e^{\lambda\xi} f\, d\xi\right] \tag{3.12}$$

Здесь $C_1 = 0$, если действительная часть $\lambda > 0$ и в пограничной зоне $\xi = x^1 - x_0^1 \geqslant 0$, и $C_2 = 0$, если $\xi \leqslant 0$. Если оболочка ограничена двумя контурами $x^1 = x_0^1$ и $x^1 = x_0^1 + x$ при $\alpha \sim 1$, то для нахождения интеграла, выражающего напряженное состояние вблизи контура $x^1 = x_0^1 + \alpha$, полагаем

$$\xi = x^1 - x_0^1 - \alpha \leqslant 0, \qquad C_2 = 0$$

причем $\lambda_{ik(0)}, \mu_{i(0)}, \ldots$ имеют соответствующие новые значения.

Сумма найденных таким образом интегралов характеризует краевой эффект полностью, если пренебречь взаимным влиянием граничных контуров, что допустимо с принятой точностью.

Во многих случаях (например, в случае поверхностей вращения и линейчатых поверхностей) выгодно пользоваться полугеодезической системой координат, приняв за $x^1 = \text{const}$ геодезически параллельные и за линии $x^2 = \text{const}$ ортогональные им геодезические. Тогда имеем $A^2 = a_{11} = \text{const}$ и в пограничной зоне

$$a_{22} \approx a_{22(0)}(1 + \mu\xi) \qquad [\mu = (\partial_1 \log a_{22})_0 \sim 1]$$

Кроме того,

$$\Gamma^1_{11} = \Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{11} = 0, \quad \Gamma^2_{12} \approx \frac{1}{2}\mu, \quad \Gamma^1_{22} \approx -\frac{1}{2a_{11}} a_{22(0)}\mu, \quad \Gamma^2_{22} \approx \frac{1}{2}\partial_2 \log a_{22(0)}$$

При этом разрешающее уравнение (3.7) с точностью до h_0^{2r} приводится к виду

$$\partial_1\partial_1 T_*^{22} + 3\mu\partial_1 T_*^{22} - T_*^{\beta\beta}\lambda_{\beta\beta} = 0 \tag{3.7a}$$

В заключение отметим, что уравнение краевого эффекта И. В. Гекелера (четвертого порядка для осесимметричной деформации оболочки вращения) и два симметричных уравнения в общей сложности восьмого порядка, выведенные Ю. Н. Работновым [3] для произвольной оболочки, имеют точность лишь до h_0^r. Поэтому наш метод определения краевого эффекта с точностью до h_0^{2r}, изложенный в § 3, в ряде случаев может оказаться весьма ценным, тем более, что обычно $r = 1/2$ и, следовательно, погрешность решения не превышает погрешность, присущую вообще теории тонких оболочек.

Заметим также, что в общем случае решение уравнений упругого равновесия оболочки складывается из рассмотренного выше интеграла краевого эффекта, содержащего четыре вещественные произвольные функции от x^2, из интеграла чисто моментного напряженного состояния и из интеграла безмоментного напряженного состояния, содержащего еще четыре произвольные функции. Поэтому влияние погрешности порядка h_0^r по сравнению с единицей, допущенной при определении меньших усилий T_*^{11} и T_*^{12} по формулам (3.10), на граничные условия задачи и на величину суммарных компонент напряжения будет вообще говоря, незначительным.

Однако в том весьма частном случае, когда края оболочки свободны и усилия, приложенные к каждому из них, самоуравновешиваются, погрешность этих формул может дать при определении произвольных функций погрешность порядка h_0^r по сравнению с единицей и, таким образом, внести такую же погрешность в величину главного усилия T_*^{22}. Поэтому в таком случае понадобится определение и меньших усилий T_*^{11} и T_*^{12} с сохранением величин порядка h_0^r по сравнению с единицей. Мы не будем здесь останавливаться на этой последней задаче, которая может быть решена без особых затруднений путем подстановки в ранее отброшенные члены уравнений (2.8) их величин по первому приближению.

4. Решение с помощью комплексной функции напряжений. Допуская погрешность порядка h_0^{2r} по сравнению с единицей, однородным уравнениям (2.8) можно удовлетворить, полагая

$$T_*^{11} = \frac{1}{a} \nabla_2 \nabla_2 \chi - \frac{1}{a_{22}} b^1_{.2} b^{.1}_2 \chi, \qquad T_*^{22} = \frac{1}{a} \nabla_1 \nabla_1 \chi$$

$$T_*^{12} = -\frac{1}{a} \nabla_2 \nabla_1 \chi - \frac{1}{a_{22}} b^2_{.2} b^{.1}_2 \chi \tag{4.1}$$

где χ — комплексная скалярная функция напряжений. При этом следует учитывать, что согласно (2.7) и (4.1) для выражения малых членов уравнений (2.7) через функцию напряжений можно пользоваться приближенным равенством

$$b_{\alpha\beta} T_*^{\alpha\beta} \approx -h' i a_{22}{}^2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x'^4}$$

Кроме того,

$$(\nabla_1 \nabla_2 - \nabla_2 \nabla_1) \nabla_2 \chi = R^{\cdots\alpha}_{122.} \nabla_\alpha \chi = (b_{12}^2 - b_{11} b_{22}) (a^{11} \nabla_1 \chi + a^{12} \nabla_2 \chi)$$

Подставляя (4.1) в однородное уравнение (2.7), приходим к приближенному уравнению

$$\Delta\Delta\chi - a^{s\beta}\nabla_s\nabla_\beta\left[\frac{1}{a_{22}}b^1_{.2}(b_{12}+a_{12}b^2_{.2})\chi\right] -$$

$$-\frac{i}{h'}\left\{b_{s\beta}c^{sm}c^{\beta n}\nabla_m\nabla_n\chi - \frac{1}{a_{22}}b^{.1}_{2}(b_{11}b^1_{.2}+2b_{12}b^2_{.2})\chi\right\} = 0 \qquad (4.2)$$

где обобщенный оператор Лапласа $\Delta\chi = a^{jk}\nabla_j\nabla_k\chi$.

Отсюда при $b_{22}\neq 0$, пренебрегая величинами порядка h_0 по сравнению с единицей (в частности, заменяя во второстепенных членах геометрические величины их контурными значениями) и пользуясь обозначениями (3.8), а также учитывая, что в первом приближении

$$\chi \approx \frac{1}{\lambda_{22(0)}}\frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} - 2\nu\frac{\partial\psi}{\partial\xi} - [\lambda_{22(0)} + \xi\lambda_{22(1)}]\psi = 0$$

$$\psi = \frac{\partial^2\chi}{\partial\xi^2}, \qquad 2\nu = \left(4\Gamma^1_{11} + 4\Gamma^2_{12} + \mu_2 - \frac{\lambda_{11}}{\lambda_{22}}\Gamma^1_{22}\right)_0 \sim 1 \qquad (4.3)$$

Оно удовлетворяется с принятой точностью, если

$$\psi = e^{\xi(p+q\xi)} \qquad |p| \sim |q| \sim h_0^{-1/2}, \qquad q = \frac{\lambda_{22(1)}}{4(p-\nu)}$$

$$p^2 - 2\nu p - \lambda_{22(0)} + \frac{1}{2(p-\nu)}\lambda_{22(1)} = 0$$

Отсюда в первом приближении

$$p^2 \approx \lambda^2 = \lambda_{22(0)}, \qquad \lambda = (1 \mp i)k$$

Верхний знак соответствует случаю, когда $b_{22} < 0$. Для получения затухающего краевого эффекта в пограничной зоне, где $\xi \leqslant 0$, следует положить $p \approx +\lambda$, причем, пренебрегая h_0 по сравнению с единицей, после небольшого счета находим (4.4)

$$p = \lambda + \nu - \frac{1}{4\lambda^2}\lambda_{22(1)}, \qquad q = \frac{1}{4\lambda}\lambda_{22(1)}, \qquad \chi = Ce^{p\xi}\left(1 + \frac{6q}{p^2} - \frac{4q}{p}\xi + q\xi^2\right)$$

где C — произвольная достаточно гладкая комплексная функция от x^2.

Поступила в редакцию
30 X 1946

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Качественное исследование напряженного состояния тонкой оболочки. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 6.
2. Новожилов В. В. Новый метод расчета тонких оболочек. Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1946. Вып. 1.
3. Работнов Ю. Н. Уравнения пограничной зоны в теории оболочек. ДАН СССР. 1945. Т. XLVII. № 5.