

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАВНОВЕСИЕ СРЕДЫ, ОБЛАДАЮЩЕЙ ВНУТРЕННИМ ТРЕНИЕМ И СЦЕПЛЕНИЕМ, ПРИ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ, СИММЕТРИЧНОМ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ

В. Г. Березанцев

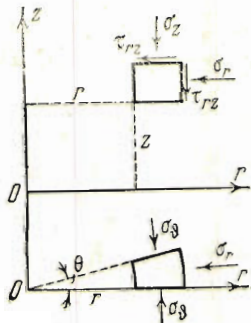
(Ленинград)

Общий метод решения плоской задачи предельного равновесия рассматриваемой среды и приложения этого метода даны В. В. Соколовским^[1].

В этой работе рассматривается пространственная задача о предельном равновесии среды, обладающей внутренним трением и сцеплением в случае напряженного состояния, симметричного относительно оси, при отсутствии объемных сил.

Воспользуемся цилиндрической координатной системой z, r, ϑ , причем за положительные направления компонентов напряжений примем указанные на фиг. 1.

В силу симметрии деформации относительно оси z компоненты $\tau_{r\vartheta}$ и $\tau_{\vartheta z}$ из шести компонентов напряжений $\sigma_z, \sigma_\vartheta, \sigma_r, \tau_{rz}, \tau_{\vartheta z}, \tau_{r\vartheta}$, а также все производные по ϑ , равны нулю. Поэтому для четырех компонентов напряжений $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\vartheta$ и τ_{rz} имеем уравнения равновесия



Фиг. 1.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad (1)$$

Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

Из условия $\tau_{r\vartheta} = \tau_{\vartheta z} = 0$ следует, что σ_ϑ является одним из главных напряжений. Кроме уравнений (1), имеем условие предельного равновесия (см. В. В. Соколовский^[1]), связывающее между собой σ_1 и σ_3 , а также в силу пространственного характера задачи — аналогичное условие для σ_1 и σ_2 т. е.

$$\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \operatorname{tg} \varphi \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = k, \quad \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} - \operatorname{tg} \varphi \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = k \quad (2)$$

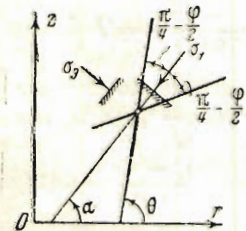
Здесь φ — угол внутреннего трения, k — величина сцепления.

Вычитая одно из другого, получим $\sigma_2 = \sigma_3$. Будем рассматривать случай, когда

$$\sigma_\vartheta = \sigma_2 = \sigma_3 \quad (3)$$

Полученных условий достаточно для определения компонентов напряжений.

Обозначим через α угол, образуемый направлением σ_1 с осью r , и через θ — угол, составляемый с осью r , касательной к линиям скольжения первого семейства (фиг. 2).



Фиг. 2.

Как принято^[1], будем называть линиями скольжения линии пересечения поверхности скольжения с плоскостью zO_r и к первому семейству отнесем линии, образующие с направлением σ_1 угол $+\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\varphi\right)$; линии второго семейства образуют с направлением σ_1 угол $-\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\varphi\right)$.

Компоненты напряжений выражаются через главные напряжения формулами

$$\sigma_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \quad \sigma_z = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\alpha, \quad \tau_{rz} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\alpha$$

Если учесть, что $\alpha = \theta - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\varphi$, то эти выражения можно привести к виду

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma [1 + \sin \varphi \sin (2\theta + \varphi)] - k \operatorname{ctg} \varphi \\ \tau_{rz} &= -\sigma \sin \varphi \cos (2\theta + \varphi) \\ \sigma_z &= \sigma [1 - \sin \varphi \sin (2\theta + \varphi)] - k \operatorname{ctg} \varphi \end{aligned} \quad \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \sin \varphi} = \sigma \right) \quad (4)$$

На основании условий (2) и (3) получим для σ_θ выражение

$$\sigma_\theta = \sigma (1 - \sin \varphi) - k \operatorname{ctg} \varphi \quad (5)$$

Подставим (5) и (4) в уравнения равновесия (1); будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \left[\sin (2\theta + \varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \cos (2\theta + \varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] + 2\sigma \left[\cos (2\theta + \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial r} + \right. \\ \left. + \sin (2\theta + \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{\sigma}{r} [1 + \sin (2\theta + \varphi)] = 0 \\ \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial \sigma}{\partial z} - \left[\sin (2\theta + \varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \cos (2\theta + \varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right] + \\ + 2\sigma \left[-\cos (2\theta + \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \sin (2\theta + \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial r} \right] - \frac{\sigma}{r} \cos (2\theta + \varphi) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

После некоторых преобразований эти уравнения можно привести к виду

$$\begin{aligned} \left[\cos \theta \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] + 2\sigma \operatorname{tg} \varphi \left[\cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \\ + \frac{\sigma}{r} [\cos \theta + \sin (\theta + \varphi)] \operatorname{tg} \varphi \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = 0 \\ \left[\sin (\theta + \varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \cos (\theta + \varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] - 2\sigma \operatorname{tg} \varphi \left[\sin (\theta + \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial r} - \right. \\ \left. - \cos (\theta + \varphi) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] + \frac{\sigma}{r} [\cos \theta + \sin (\theta + \varphi)] \operatorname{tg} \varphi \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Введем новые переменные ξ и η , связанные с σ и θ зависимостями

$$\xi = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi \log \sigma + \theta, \quad \eta = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \varphi \log \sigma - \theta, \quad \sigma = e^{(\xi + \eta) \operatorname{tg} \varphi}, \quad \theta = \frac{\xi - \eta}{2} \quad (8)$$

Тогда уравнения (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial \xi}{\partial z} \sin \theta + \frac{1}{2r} [\cos \theta + \sin (\theta + \varphi)] \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} \sin (\theta + \varphi) - \frac{\partial \eta}{\partial z} \cos (\theta + \varphi) + \frac{1}{2r} [\cos \theta + \sin (\theta + \varphi)] \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

или, учитывая, что первые два члена уравнений суть производные по линиям скольжения (обозначим дугу линий первого семейства s_1 , второго — s_2), получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_1} = -\frac{\cos \theta + \sin (\theta + \varphi)}{2r} \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial s_2} = -\frac{\cos \theta + \sin (\theta + \varphi)}{2r} \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \quad (10)$$

Рассмотрим частный случай, когда функции σ и θ , к определению которых сводится вообще данная задача, могут быть получены непосредственным решением уравнений (7). Такое решение возможно в случае прямолинейных линий скольжения, т. е. когда, например, $\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\varphi = \text{const}$; это условие отвечает схеме, когда стенки цилиндрической выемки в грунте находятся под (нормальным давлением, причем поверхность грунта имеет некоторую пригрузку фиг. 3).

При $\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\varphi = \text{const}$ уравнения (7) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 2 \frac{\sigma}{r} \operatorname{tg} \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) &= 0 \\ \frac{\partial \sigma}{\partial r} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 2 \frac{\sigma}{r} \operatorname{tg} \varphi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $\partial \sigma / \partial z = 0$. Следовательно является функцией только r и для его определения, на основании (11), имеем

$$\frac{d\sigma}{dr} + 2 \frac{\sigma}{r} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

Общее решение этого уравнения

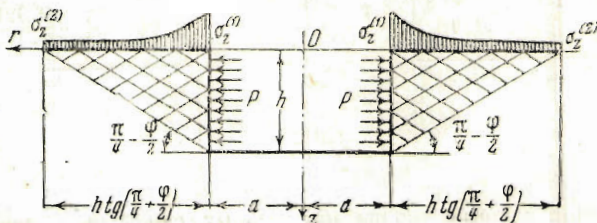
$$\sigma = Cr^{-\omega} \quad \left(\omega = 2 \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right]\right) \quad (12)$$

Компоненты напряжения на основании (4) и (5) представляются формулам

$$\begin{aligned} \sigma_r &= C(1 + \sin \varphi) r^{-\omega} - k \operatorname{ctg} \varphi, \\ \sigma_z = \sigma_\theta &= C(1 - \sin \varphi) r^{-\omega} - k \operatorname{ctg} \varphi, \quad \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, σ_z и σ_r являются главными напряжениями и при данном значении радиуса, радиальные напряжения сохраняют постоянную величину в направлении, параллельном оси z .

Обозначим радиус выемки через a , глубину ее $-h$; ординату эпюры пригружающего давления у края выемки примем $\sigma_z^{(1)} = q$; искомое давление на стенку выемки обозначим через p (фиг. 3). Граничные условия имеем в виде



Фиг. 3.

$$(\sigma_z)_{r=a} = q, \quad (\sigma_r)_{r=a} = p \quad (14)$$

Применяя первое условие, получим значение постоянной C ; после подстановки этого значения в (13) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= q \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^\omega + k \operatorname{ctg} \varphi \left[\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{a}{r}\right)^\omega - 1 \right] \\ \sigma_z = \sigma_\theta &= q \left(\frac{a}{r}\right)^\omega + k \operatorname{ctg} \varphi \left[\left(\frac{a}{r}\right)^\omega - 1 \right] \end{aligned} \quad (15)$$

Пользуясь вторым граничным условием (14), получим значение давления

$$p = q \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + k \operatorname{ctg} \varphi \left[\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - 1 \right] \quad (16)$$

Необходимо отметить, что такое давление будет соответствовать состоянию предельного равновесия среды только при условии, что интенсивность пригрузки на поверхности изменяется по закону, устанавливаемому выражением (15) для σ_z : от $\sigma_z^{(1)} = q$ до значения $\sigma_z^{(2)}$ на границе выхода линий скольжения на поверхность. Это значение легко получается из (15), где r следует положить согласно фиг. 3.

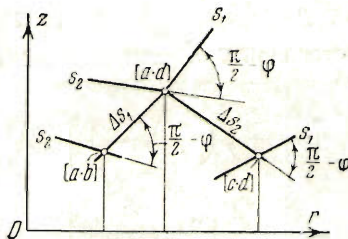
Формулу (16) можно применить и для среды с идеальным сцеплением, положив $\varphi = 0$; тогда при условии, принятом Генки [2], что $\sigma_z^{(2)}$ должно быть равно нулю, раскрыв неопределенности, из (16) получим известное выражение

$$p = 2k \left[\log\left(1 + \frac{h}{a}\right) + 1 \right]$$

Отыскание решений в более сложных случаях напряженного состояния можно провести приближенно, например, следуя А. Ю. Ишлинскому [3]. С помощью зависимостей (10) можно, зная значения функций ξ и η (а следовательно, известно и θ) в двух достаточно близких точках среды, определить ξ и η в точке пересече-

		-17	-15	-13	-11	-10	-8	-6
7	ξ	3.698	3.781	3.962	4.257	4.490	3.545	2.632
	η	-0.498	-0.522	-0.561	-0.607	-0.637	-0.634	-0.487
	θ	2.098	2.152	2.261	2.432	2.563	2.089	1.560
5	ξ		3.781	3.940	4.208	4.413	3.564	2.718
	η		-0.415	-0.429	-0.458	-0.485	-0.468	-0.373
	θ		2.098	2.185	2.333	2.449	2.016	1.545
3	ξ			3.935	4.180	3.369	3.589	2.808
	η			-0.261	-0.274	-0.291	-0.276	-0.223
	θ			2.098	2.227	2.330	1.932	1.515
1	ξ				4.175	4.350	3.625	2.904
	η				-0.021	-0.027	-0.020	-0.003
	θ				2.098	2.188	1.822	1.453
0	ξ					4.356	3.650	2.956
	η					0.160	0.160	0.160
	θ					2.098	1.745	1.398

чения кривых скольжения разных семейств, проведенных через данные точки. При этом на близких расстояниях очертание кривых скольжения можно заменить отрезками касательных.



Фиг. 4.

Пусть в точках $[a \cdot b]$ и $[c \cdot d]$ (фиг. 4) нам известны значения функций ξ и η и, следовательно, известны углы наклона θ_{ab} и θ_{cd} касательных линий скольжения к оси r . Тогда графически можно построить точку $[a \cdot d]$.

Обозначим через Δs_1 расстояние от точки $[a \cdot b]$ до $[a \cdot d]$ и через Δs_2 от точки $[c \cdot d]$ до $[a \cdot d]$. На основании (10) напомним приближенные выражения для ξ и η в точке $[a \cdot d]$. Подставив вместо r среднее арифметическое радиусов смежных точек, имеем

$$\begin{aligned} \xi_{ad} &\approx \xi_{ab} - \frac{1}{r_{ab} + r_{ad}} [\cos \theta_{ab} + \sin (\theta_{ab} + \varphi)] \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \Delta s_1 \\ \eta_{ad} &\approx \eta_{cd} - \frac{1}{r_{cd} + r_{ad}} [\cos \theta_{cd} + \sin (\theta_{cd} + \varphi)] \frac{1 - \sin \varphi}{\cos \varphi} \Delta s_2 \end{aligned} \quad (17)$$

Имея граничные условия, с помощью формул (17) можно, постепенно переходя от одних точек к другим, получить приближенные значения компонентов напряжений в интересующих нас точках среды.

В виде иллюстрации приводим решение задачи о предельном равновесии среды при давлении на ее плоскую поверхность гибкого гладкого кругового цилиндрического штампа, причем поверхность среды вне штампа предполагается пригруженной равномерно распределенной нагрузкой.

в области $[8 \cdot 8]$, $[0 \cdot 0]$, $[0 \cdot 8]$ с вычислением ξ , η и θ в каждой точке, находящейся на пересечении касательных к линиям скольжения, проведенных из двух смежных точек. Эта операция является приближенным решением задачи Коши.

Для дальнейшего построения прежде всего необходимо получить очертание ближайшей к точке $[0 \cdot 0]$ линии $[0 \cdot 1]$ $[-2 \cdot 1]$... $[-8 \cdot 1]$ $[-10 \cdot 1]$. Построение этой линии, отталкиваясь от точек $[0 \cdot 1]$ и $[0 \cdot 0]$, выполнено, исходя из следующих соображений. Линии скольжения первого семейства, выходящие из точки $[0 \cdot 0]$, на малом участке, до линии $[0 \cdot 1]$... $[-10 \cdot 1]$, могут быть приняты прямыми. Зная значения угла для каждого произвольно выбранного нами луча, выходящего из точки $[0 \cdot 0]$, и учитывая, что функция η в точке $[0 \cdot 0]$ постоянна, можно найти значение функции ξ в точке $[0 \cdot 0]$ для любого направления луча согласно (8), η по формуле $\xi = 2\theta + \eta$ и, следовательно, определить функции ξ и η в точке $[-2 \cdot 1]$, затем в точке $[-4 \cdot 1]$ и т. д. (такой метод построения назван А. Ю. Ишлинским ^[3] задачей Соколовского). Получив линии $[0 \cdot 1]$... $[-10 \cdot 1]$ и $[0 \cdot 1]$ $[0 \cdot 2]$... $[0 \cdot 8]$ и значения ξ и η в точках на этих линиях, можно построить линии скольжения и вычислить ξ и η в области $[0 \cdot 8]$ $[0 \cdot 0]$ $[-10 \cdot 8]$. Эта операция представляет собой приближенное решение задачи Гурса.

Для построения линий скольжения в области, примыкающей непосредственно к штампу, необходимо приближенно решать так называемую смешанную задачу. Прежде всего необходимо вычислить значения ξ и η в точке $[-11 \cdot 1]$, что возможно сделать, так как функция η определяется по значению η в точке $[-10 \cdot 1]$, а функция ξ находится по формуле $\xi = 2\theta + \eta$, где известно, что при гладком штампе значение θ во всех точках контактной поверхности составляет $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\varphi$. Таким образом были последовательно построены линии скольжения $[-11 \cdot 1]$... $[-11 \cdot 8]$, затем $[-12 \cdot 1]$... $[-12 \cdot 8]$ и т. д. и, наконец, точка $[-18 \cdot 8]$, находящаяся вблизи центра штампа. Эпюра распределения давления по площади штампа, ординаты которой вычислены на основании значений функций ξ и η в точке $[0 \cdot 0]$ при подходе к ней по направлению последнего луча и в точках $[-11 \cdot 1]$, ... $[-13 \cdot 3]$, ..., $[-18 \cdot 8]$, приведена на фиг. 5.

При указанных выше исходных данных наибольшая (краевая) ордината эпюры составляет 19.20 т/м^2 , наименьшая (в центре) — 8.25 т/м^2 . Среднее давление на подошве штампа 12.80 т/м^2 .

Необходимо отметить, что теоретически не представляет затруднений отказаться от принятого нами ограничения, заключающегося в предположении о невесомости среды, и ввести при выводе дифференциальных уравнений предельного равновесия объемные силы. Однако вычисления при этом становятся значительно более громоздкими. Сравнительные же расчеты показывают, что для прикладных целей вполне допустимо рассматривать среду невесомой и действие собственного веса заменять эквивалентной пригрузкой по поверхности.

В заключение укажем, что для случая шероховатых жестких штампов распределение напряжений и очертание линий скольжения будут отличаться от полученных при решении данной задачи.

Поступила в редакцию
16 X 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. Изд. АН СССР. 1943.
2. Ненский Н. Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. ZAMM. 1923. Bd. 3. H. 4.
3. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача теории пластичности. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 3.