

ПЛАСТИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ

В. В. Соколовский

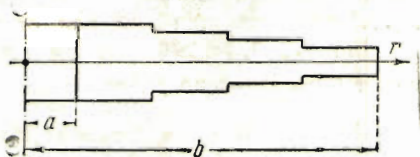
(Москва)

Вопрос о пластическом напряженном состоянии быстро вращающихся дисков родствен задачам об упруго-пластическом равновесии тел, в которых напряженное состояние зависит лишь от одной координаты, подробно рассмотренном в нашей монографии^[1].

При достаточно большой угловой скорости вращения в центре диска (если диск без отверстия) или вдоль внутреннего контура (если диск с отверстием) появляется пластическое состояние; при возрастании угловой скорости вращения пластическое состояние распространяется и постепенно заполняет весь диск; при дальнейшем возрастании угловой скорости вращения работа диска возможна лишь при наличии упрочнения материала.

§ 1. Основные уравнения. Граничные условия. Введем цилиндрические координаты $r\theta z$, ось z которых проходит через центр диска; плоскость $z=0$ является средней плотностью диска. Радиусы внутреннего и внешнего круговых контуров диска соответственно равны a и b ($b > a$).

Диск имеет постоянную толщину $2h$ или состоит из нескольких кольцевых зон, в каждой из которых толщина диска постоянна (фиг. 1).



Фиг. 1.

Из условий задачи ясно, что:

$$\sigma_z = \tau_{\theta z} = \tau_{r\theta} = 0 \quad (1.1)$$

а компоненты σ_r и σ_θ не зависят от θ .

При вращении диска компоненты σ_r и σ_θ должны быть растягивающими, причем σ_θ всегда больше σ_r . Таким образом, $\sigma_\theta \geq \sigma_r \geq 0$.

Дифференциальное уравнение, описывающее напряженное состояние диска, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω , напишется следующим образом:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = -\frac{\gamma \omega^2}{g} r^2 \quad (1.2)$$

где γ — объемный вес диска, а g — ускорение силы тяжести.

Для пластического состояния принимаются известные соотношения Генки

$$\varepsilon_r = \frac{N}{G} \sigma + \frac{\psi}{2G} (\sigma_r - \sigma), \quad \varepsilon_\theta = \frac{N}{G} \sigma + \frac{\psi}{2G} (\sigma_\theta - \sigma), \quad \varepsilon_z = \frac{N}{G} \sigma + \frac{\psi}{2G} (\sigma_z - \sigma)$$

$$3\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z, \quad N = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, и условие пластичности, учитывающее упрочнение материала

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2} = \\ = kF \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2} \right\}$$

где $k = \sigma_s / \sqrt{3}$, а σ_s — предел текучести при простом растяжении¹. Функция $F(\dots)$ находится экспериментально.

Последнее на основании соотношений Генки может быть также представлено в форме

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2} = \\ & = kF \left\{ \frac{\psi}{G} \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2} \right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Уравнения Генки при $\sigma_s = 0$ принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{N}{3G} (\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{\psi}{6G} (2\sigma_r - \sigma_\theta), & \varepsilon_z &= -\frac{\psi - 2N}{6G} (\sigma_r + \sigma_\theta) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{N}{3G} (\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{\psi}{6G} (2\sigma_\theta - \sigma_r), \end{aligned}$$

Условие пластичности с упрочнением при $\sigma_s = 0$ может быть представлено следующим образом

$$\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r \sigma_\theta = \sigma_s^2 \quad f^2(\psi) = 3k^2 f^2(\psi) \quad (1.4)$$

причем функция $f(\psi)$ определена уравнением

$$f(\psi) = F \left\{ \frac{k}{G} \psi f(\psi) \right\}$$

Если пластичность не сопровождается упрочнением материала, то $f = 1$; если $F(\dots)$ является линейной или степенной функцией, то $f(\psi)$ можно легко найти.

Для $\sigma_r \geq 0$, $\sigma_\theta \geq 0$ условие пластичности (1.4) с некоторым приближением может быть заменено условием

$$\sigma_\theta = \mu \sigma_r f_1(\psi), \quad \mu = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \quad (1.4')$$

Заметим, что при пластичности без упрочнения материала $f = 1$ и условие (1.4') представляет собой условие Сен-Венана, в котором величина σ_s заменена на $\mu \sigma_r$.

Известные зависимости между компонентами деформации и смещения

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}$$

дают условие совместности деформаций

$$r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0 \quad (1.5)$$

Данные вдоль внешней и внутренней окружности диска могут быть записаны в виде:

для диска без отверстия

$$\sigma_r = \sigma_\theta > 0 \quad \text{при } r = 0, \quad \sigma_r = 0 \quad \text{при } r = b \quad (1.6)$$

для диска с отверстием

$$\sigma_r = 0 \quad \text{при } r = a, \quad \sigma_r = 0 \quad \text{при } r = b \quad (1.7)$$

¹ Все квадратные корни считаются положительными.

Для диска, состоящего из нескольких кольцевых зон, в каждой из которых толщина диска постоянна и имеет разную величину, в местах скачкообразного изменения толщины должно быть соблюдено условие непрерывности радиального усилия. Пусть $r=d$ — окружность, на которой толщина диска претерпевает скачок. Тогда

$$\sigma_{r1} h_1 = \sigma_{r0} h_0 \quad \text{при } r=d \quad (1.8)$$

Здесь цифрами 0 и 1 отмечены значения компонент напряжения и толщины диска вдоль окружности $r=d$, вычисленные со стороны $r < d$ и со стороны $r > d$.

Ниже принимаются безразмерные величины

$$\rho = \frac{r}{b}, \quad \alpha = \frac{a}{b}, \quad \delta = \frac{d}{b}, \quad s_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_s}, \quad s_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma_s}, \quad \chi = \frac{h_1}{h_0}, \quad \Omega = \omega b \sqrt{\frac{\gamma}{g\sigma_s}}$$

причем ва ними сохраняются названия соответствующих величин, имеющих размерность.

§ 2. Решение основных уравнений. Система уравнений, описывающих пластическое напряженное состояние быстро вращающегося диска, состоит из уравнения равновесия

$$\rho \frac{ds_r}{d\rho} + s_r - s_0 = -\Omega^2 \rho^2 \quad (2.1)$$

условия пластичности с упрочнением

$$s_r^2 + s_0^2 - s_r s_0 = f^2(\psi) \quad (2.2)$$

или

$$s_0 = \mu f(\psi) \quad (2.2')$$

и уравнения (1.5), которое вследствие зависимостей (1.3) дает

$$2N \frac{d}{d\rho} (s_r + s_0) + \frac{d}{d\rho} [\psi (2s_0 - s_r)] + \frac{3\psi}{\rho} (s_0 - s_r) = 0 \quad (2.3)$$

Приведенные уравнения содержат три неизвестные функции s_r , s_0 и ψ .

Для решения системы уравнений (2.1), (2.2) и (2.3) удобно ввести новую функцию φ , положив

$$s_r = \frac{2}{\sqrt{3}} f(\psi) \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), \quad s_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} f(\psi) \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right) \quad (2.4)$$

Заметим, что в силу условия $s_0 \geq s_r \geq 0$ величина φ с точностью до числа, кратного 2π , заключено в пределах $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Условие (2.2) удовлетворяется тождественно, а подстановка выражений (2.4) в уравнения (2.1) и (2.3) дает

$$R \frac{d\varphi}{dR} = \frac{2[R^2 - f(\psi) \sin \varphi] P - \sqrt{3} R^2 \psi [\ln f(\psi)]' \cos(\varphi + \pi/6)}{f(\psi) \{\sin^2(\varphi + \pi/6) + (\psi + N) [\ln f(\psi)]'\}} \quad (2.5)$$

$$R \frac{d\psi}{dR} = \frac{2[R^2 - f(\psi) \sin \varphi] Q - \sqrt{3} R^2 \psi \sin(\varphi + \pi/6)}{f(\psi) \{\sin^2(\varphi + \pi/6) + (\psi + N) [\ln f(\psi)]'\}} \quad (2.6)$$

где

$$P = \frac{1}{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) + (\psi + N) [\ln f(\psi)]' \cos \varphi, \quad Q = (\psi + N) \sin \varphi$$

Полученные уравнения значительно упрощаются, если ввести допущение о несжимаемости пластического материала. При этом допущение следует положить $N=0$.

Новый аргумент R определен формулой

$$R^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Omega^2 \rho^2 \quad (2.7)$$

При отсутствии упрочнения материала $f=1$ и уравнение (2.5) принимает вид

$$R \frac{d\varphi}{dR} = \frac{R^2 - \sin \varphi}{\sin(\varphi + \pi/6)} \quad (2.8)$$

Перепишем теперь контурные условия (1.6)–(1.8) применительно к функции φ , введенной при помощи формул (2.4). Имеем:

для диска без отверстий

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \rho = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \quad \text{при } \rho = 1 \quad (2.9)$$

для диска с отверстием

$$\varphi = \frac{\pi}{3} \quad \text{при } \rho = \alpha, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} \quad \text{при } \rho = 1 \quad (2.10)$$

Величины φ определены с точностью до чисел, кратных 2π , не влияющих на компоненты напряжения.

В местах скачкообразного изменения толщины диска

$$\chi f(\psi_1) \cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{6}\right) = f(\psi_0) \cos\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{при } \rho = \delta \quad (2.11)$$

Здесь цифрами 0 и 1 отмечены значения функций φ и ψ , взятых на окружности $\rho = \delta$, на которой толщина диска претерпевает скачок, вычисленные соответственно со стороны $\rho < \delta$ и со стороны $\rho > \delta$.

Для решения системы уравнений (2.1), (2.2') и (2.3) достаточно подставить выражение s_r из формулы (2.2') в уравнения (2.1) и (2.3). Система уравнений при этом имеет немного более простой вид, чем уравнения (2.5) и (2.6).

При отсутствии упрочнения материала $f=1$ система уравнений (2.1) и (2.2') может быть проинтегрирована и ее решение имеет вид

$$s_r = \mu - \frac{\Omega^2}{3} \rho^2 + \frac{C}{\rho}, \quad s_\theta = \mu \quad (2.12)$$

где C — постоянное интегрирования.

§ 3. Пластическое напряженное состояние вращающегося диска. Приведенные выше уравнения дают возможность решать задачи о пластическом напряженном состоянии вращающегося диска с учетом упрочнения материала. Метод решения задач показан на двух примерах.

В первом примере рассмотрим ступенчатый диск без отверстия, состоящий из двух кольцевых зон $0 \leq r < d$ и $d < r \leq b$, в каждой из которых толщина диска постоянна и равна соответственно $2h_0$ и $2h_1$ (фиг. 2). Исследуем распределение напряжений в диске в момент полного перехода всего диска в пластическое состояние без упрочнения материала ($f=1$), а также найдем соответствующее значение угловой скорости вращения Ω .

Решение задачи сводится к нахождению функции φ из уравнения (2.8) и условий (2.9), (2.11).

В кольцевой зоне $0 \leq \rho < \delta$ или $0 \leq R < \Delta$ найдем $\varphi = \varphi_0(R, \Omega)$ — решение уравнения (2.8), голоморфное в окрестности особой точки $R=0$. Из уравнения (2.8) очевидно, что для указанного голоморфного решения $\varphi_0(0, \Omega) = 0$.

Отсюда на основании формул (2.4) ясно, что условие (2.9) в центре диска удовлетворяется автоматически.

В кольцевой зоне $\delta < \rho \leq 1$ построим $\varphi = \varphi_1(R, \Omega, \Delta)$ решение уравнения (2.8), удовлетворяющее при $R = \Delta$ условию (2.11):

$$\cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\chi} \cos\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{6}\right)$$

Заметим, что должно выполняться неравенство $\cos(\varphi_0 + \pi/6) \leq \chi$, устанавливающее минимальное значение φ_0 , а следовательно, и Δ , при котором возможно скачкообразное изменение толщины диска, определяемое величиной χ .

Условие (2.9) на внешней контурной окружности дает уравнения

$$\varphi_1(R_*, \Omega; \Delta) = \frac{\pi}{3}, \quad R_*^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Omega^2$$

из которых находятся $\Omega = \Omega(\Delta)$, $R_* = R_*(\Delta)$. Здесь через R_* обозначено значение R на внешнем контуре диска $\rho = 1$.

Величина Ω определяет предельную угловую скорость — угловую скорость вращения, при которой весь диск полностью переходит в пластическое состояние.

Теперь на основании формулы (2.7) легко получить

$$\delta^2 = \delta^2(\Delta) = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\Delta^2}{\Omega^2}$$

Функции $\Omega = \Omega(\Delta)$, $\delta = \delta(\Delta)$ устанавливают зависимость между безразмерной предельной угловой скоростью Ω и безразмерным радиусом δ .

Найденные функции $\varphi = \varphi_0(R, \Omega)$ и $\varphi = \varphi_1(R, \Omega, \Delta)$ в силу формул

$$R^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Omega^2 \rho^2, \quad \Omega = \Omega(\Delta), \quad \delta = \delta(\Delta)$$

позволяют найти $\varphi = \Phi_0(\rho, \delta)$ для $0 \leq \rho < \delta$ и $\varphi = \Phi_1(\rho, \delta)$ для $\delta < \rho \leq 1$. Подстановка этих функций в формулы (2.4) дает возможность определить s_r и s_θ .

Заметим, что задача, рассмотренная в первом примере, легко решается в замкнутом виде, если, основываясь на условии пластичности (2.2'), использовать решение (2.12).

Напишем выражения для рассматриваемых двух областей диска отдельно:

для $0 \leq \rho < \delta$

$$s_r = \mu - \frac{\Omega^2}{3} \rho^2 + \frac{C_1}{\rho}, \quad s_\theta = \mu$$

для $\delta < \rho \leq 1$

$$s_r = \mu - \frac{\Omega^2}{3} \rho^2 + \frac{C_2}{\rho}, \quad s_\theta = \mu$$

Условие (1.6) в центре диска $\rho = 0$ и условие (1.8) в месте скачкообразного изменения толщины $\rho = \delta$ дают возможность найти постоянные интегрирования C_1 и C_2 . Имеем:

для $0 \leq \rho < \delta$

$$s_r = \mu - \frac{\Omega^2}{3} \rho^2, \quad s_\theta = \mu \tag{3.1}$$

для $\delta < \rho \leq 1$

$$s_r = \mu - \frac{\Omega^2}{3} \rho^2 + (\chi - 1) \left(\mu - \frac{\Omega^2}{3} \delta^2 \right) \frac{\delta}{\rho}, \quad s_\theta = \mu \tag{3.2}$$

Контурное условие (1.6) дает

$$\Omega^2 = 3\mu \frac{1+\delta(\chi-1)}{1+\delta^2(\chi-1)} \quad (3.3)$$

Эта формула определяет предельную угловую скорость вращения диска, при которой он полностью становится пластическим.

Заметим, что условие $s_r \leq \mu$ для $\delta < \rho \leq 1$ накладывает ограничения на величину χ . Имеем

$$\chi \leq \frac{1-\delta^2}{1-\delta^2(1+\delta)}$$

Это неравенство устанавливает минимальное значение δ , при котором возможно скачкообразное изменение толщины диска, определенное величиной χ .

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Δ	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
	0.000	0.007	0.024	0.049	0.083	0.124	0.172	0.227	0.288	0.354
1.60	0.000	0.007	0.024	0.049	0.083	0.124	0.172	0.227	0.288	0.354
1.50	0.000	0.007	0.024	0.049	0.083	0.124	0.172	0.227	0.288	0.354
1.40	0.000	0.007	0.024	0.049	0.083	0.124	0.172	0.227	0.288	0.354
1.30	0.000	0.007	0.024	0.049	0.083	0.124	0.172	0.227	0.288	0.354
1.25	0.000	0.007	0.024	0.049	0.083	0.124	0.172	0.227	0.288	0.354

Функция φ

Для диска постоянной толщины решение особенно просто.

Компоненты напряжения имеют вид



Фиг. 2.

$$s_r = \mu - \frac{\Omega^2}{3} r^2, \quad s_\theta = \mu \quad (3.4)$$

Предельная угловая скорость будет

$$\Omega^2 = 3\mu, \quad \text{или} \quad \Omega \approx 1.80$$

Во втором примере рассмотрим диск постоянной толщины без отверстия (Фиг.2).

Найдем распределение напряжений в диске после полного перехода его в пластическое состояние с упрочнением материала при различных значениях угловой скорости вращения Ω .

Решение задачи сводится к нахождению функций φ и ψ из уравнений (2.5) и (2.6) и граничных условий (2.9).

Найдем $\varphi = \varphi(R, \Omega, \psi_0)$, $\psi = \psi(R, \Omega, \psi_0)$ решение уравнений (2.5), (2.6), голоморфное в окрестности особой точки $R=0$. Через ψ_0 обозначено значение ψ в центре диска, и, следовательно, $\psi_0 = \psi(0, \Omega, \psi_0)$. Условие (2.9) в центре диска удовлетворяется автоматически, так как $\varphi(0, \Omega, \psi_0) = 0$.

Условие (2.9) на внешней контурной окружности дает уравнения

$$\varphi(R_*, \Omega, \psi_0) = \frac{\pi}{3} \quad R_*^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Omega^2$$

где через R_* обозначено значение R на внешнем контуре при $r=1$.

Из этих уравнений находится $\Omega = \Omega(\psi_0)$ или $\psi_0 = \psi_0(\Omega)$.

Найденные выше функции $\varphi = \varphi(R, \Omega, \psi_0)$, $\psi = \psi(R, \Omega, \psi_0)$ в силу формул

$$R^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Omega^2 \rho^2, \quad \psi = \psi(\Omega)$$

позволяют найти $\varphi = \Phi(\rho, \Omega)$, $\psi = \Psi(\rho, \Omega)$. Подстановка этих функций в формулы (2.4) дает возможность найти s_r и s_θ .

Таблица 1

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1.00	1.10	1.20	1.25	1.30	1.40	1.50	1.60	1.70	1.80	1.90
0.426	0.503	0.583	0.626	0.671	0.764	0.864	0.970	1.085		
0.426	0.503	0.583	0.626	0.671	0.764	0.864	0.970 0.893	1.011	1.129	
0.426	0.503	0.553	0.626	0.671	0.764	0.864 0.674	0.793	0.917	1.047	1.177
0.426	0.503	0.583	0.626	0.671	0.764 0.454	0.585	0.713	0.842	0.976	1.116
0.426	0.503	0.583	0.626	0.671 0.221	0.379	0.520	0.656	0.790	0.926	1.068
0.426	0.503	0.583	0.626 0.091	0.188	0.352	0.498	0.636	0.772	0.910	1.052

§ 4. Численное решение задач. Нахождение численных значений компонент напряжения при решении задач весьма просто и осуществляется путем применения к полученным уравнениям методов численного интегрирования.

Рассмотрим, например, первый из этих примеров при $\chi=2$. Найдем функцию φ при различных значениях δ и зависимость между Ω и δ .

Для вычислений служат рекуррентная формула, полученная из уравнения (2.8):

$$\varphi_{k+1} = \varphi_k + \frac{\Delta R}{R_k} \frac{R_k^2 - \sin \varphi_k}{\sin(\varphi_k + \pi/6)}$$

где через ΔR обозначено приращение аргумента R .

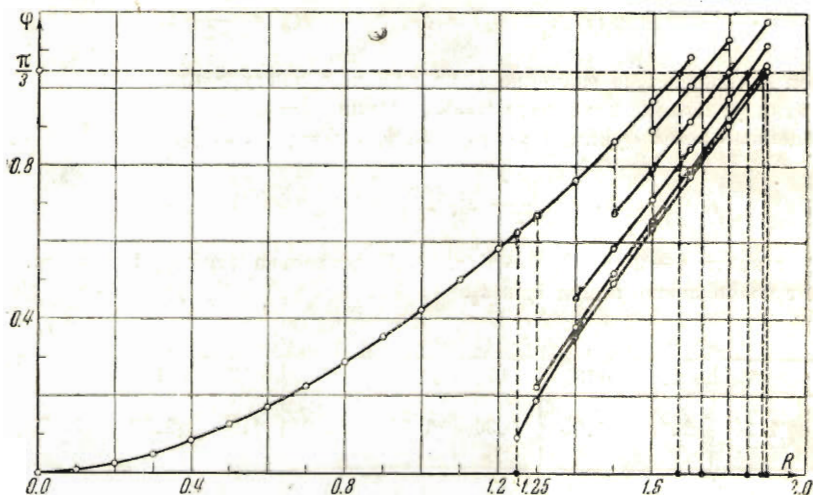
Табл. 1 составлена следующим образом. Строка 0 соответствует диску постоянной толщины. Значения φ в клетках этой строки вычисляются последовательно при помощи рекуррентных формул. Значение $R_* = 1.67$, соответствующее $\varphi = \pi/3$, находится путем интерполяции.

Величина $\Omega \approx 1.79$ определялась по формуле

$$\Omega^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} R_*^2$$

Строки 1—5 отвечают ступенчатому диску. Они соответствуют значениям

$\Delta = 1.60, 1.50, 1.40, 1.30, 1.25$, которыми мы задаемся. Заметим, что величина $\Delta = 1.25$ соответствует $\cos(\varphi_0 + \pi/6) = \chi = 2$.



Фиг. 3.

В клетки каждой строки, расположенные слева от диагональных, в которых $R = \Delta$ (эти клетки обведены жирными линиями), переносятся значения φ_0 , полученные в строке 0; в диагональные клетки помимо уже вычисленных значений φ_0 (верхние цифры) вносятся значения φ_1 (нижние цифры) найденные по формуле

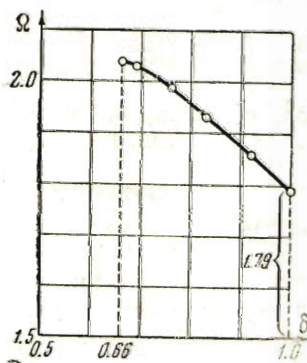
$$\cos\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\chi} \cos\left(\varphi_0 + \frac{\pi}{6}\right)$$

В клетки, расположенные справа от диагональных, записываются значения φ_1 , последовательно вычисленные с помощью рекуррентных формул.

На фиг. 3 изображены интегральные кривые уравнения (2.8), построенные по координатам точек табл. 1:

Приводим значения R_* , соответствующие $\varphi = \pi/3$, а также значения Ω и δ для различных значений Δ :

Δ	1.25	1.30	1.40	1.50	1.60
R_*	1.90	1.89	1.85	1.80	1.73
Ω	2.04	2.03	1.99	1.93	1.86
δ	0.66	0.69	0.76	0.83	0.92



Фиг. 4.

Минимальное значение δ , при котором возможен скачок толщины диска, определяемый величиной $\chi = 2$, будет $\delta \approx 0.66$.

На фиг. 4 представлена зависимость между величинами Ω и δ .

В заключение заметим, что полученные числовые результаты весьма близки к числовым результатам, даваемым формулами (3.1)–(3.4).

Поступила в редакцию
14 XI 1947

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. АН. СССР. 1946;