Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

ЗАМЕТКИ

К ПРИМЕНЕНИЮ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

В. В. Крылов
(Казань)

1. Функции и компоненты напряжения. Как было показано[1], существуют две функции, подчиняющиеся условиям

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=e^{\beta}\cos\alpha,\qquad -\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=e^{\beta}\sin\alpha \tag{1.1}$$

$$e^{\beta}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{E}+1=\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{1-\nu}+1$$

где σ_i — главные напряжения, ε_i — главные удлинения, α — угол поворота главных осей во время деформации.

Образуем аналитические функции $\varphi=\varphi_1+i\varphi_2$, $\bar\varphi=\varphi_1-i\varphi_2$ от комплексных переменных $z=x+iy$, $\bar z=x-iy$ соответственно. Для них, очевидно, можно написать

$$\frac{d\varphi}{dz}=e^{\beta+i\alpha},\qquad \frac{d\bar\varphi}{d\bar z}=e^{\beta-i\alpha} \tag{1.2}$$

Когда необходимо, любую функцию от z, $\bar z$ будем рассматривать как сложную от $\varphi(z)$, $\bar\varphi(\bar z)$. Раньше имели для функций F_1, F_2 и компонентов напряжения

$$F_1=\frac{\partial W_0}{\partial\varphi_2},\qquad X_x=\frac{\partial F_1}{\partial y},\qquad X_y=-\frac{\partial F_1}{\partial x},$$
$$F_2=-\frac{\partial W_0}{\partial\varphi_1},\qquad Y_x=\frac{\partial F_2}{\partial y},\qquad Y_y=-\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

Для комплексных комбинаций получим

$$\begin{aligned} F&=F_1+iF_2=-2i\frac{\partial W_0}{\partial\bar\varphi}, & A_1+iA_2&=+2i\frac{\partial F}{\partial z}\\ \bar F&=F_1-iF_2=+2i\frac{\partial W_0}{\partial\varphi}, & A_1-iA_2&=-2i\frac{\partial\bar F}{\partial\bar z}\\ D_1+iD_2&=-2i\frac{\partial F}{\partial\bar z}, & D_1-iD_2&=+2i\frac{\partial\bar F}{\partial z}\end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь, как и раньше, введены обозначения

$$A_1=X_x+Y_y=(\sigma_1+\sigma_2)\cos\alpha,\qquad D_1=X_x-Y_y=(\sigma_1-\sigma_2)\cos(2\theta-\alpha)$$
$$A_2=Y_x-X_y=(\sigma_1+\sigma_2)\sin\alpha,\qquad D_2=Y_x+X_y=(\sigma_2-\sigma_1)\sin(2\theta-\alpha)$$

причем θ — угол, определяющий положение главных осей.

---

[1] Мы будем основываться на результатах ранее опубликованной работы [1].

Переходя к переменным φ, из (1.3) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_1+\sigma_2 &= +2i\frac{\partial F}{\partial \varphi}e^{\beta} = -2i\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{\varphi}}e^{\beta} \\ \sigma_1-\sigma_2 &= -2i\frac{\partial F}{\partial \overline{\varphi}}e^{\beta+2i(\theta-\alpha)} = 2i\frac{\partial \overline{F}}{\partial \varphi}e^{\beta-2i(\theta-\alpha)} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Из первой формулы при помощи (1.1) и (1.3) последовательно получим

$$2i\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -2i\frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{\varphi}} = E(1-e^{-\beta}), \qquad 4\frac{\partial^2 W_0}{\partial \varphi\,\partial \overline{\varphi}} = E(1-e^{-\beta}) \tag{1.5}$$

2. Функции и характеристики деформации. Для координат деформированного состояния и характеристик деформации в работе [1] были даны формулы

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\partial S_0}{\partial \varphi_1}, \qquad e_x = \frac{\partial \xi_1}{\partial x}-\cos\alpha, \qquad \omega_x = \frac{\partial \xi_2}{\partial x}-\sin\alpha \\ \xi_2 &= \frac{\partial S_0}{\partial \varphi_2}, \qquad e_y = \frac{\partial \xi_2}{\partial y}-\cos\alpha, \qquad \omega_y = \frac{\partial \xi_1}{\partial y}+\sin\alpha \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для комплексных комбинаций получим

$$\begin{aligned} &\xi = \xi_1+i\xi_2 = 2\frac{\partial S_0}{\partial \overline{\varphi}}, && \overline{\xi} = \xi_1-i\xi_2 = 2\frac{\partial S_0}{\partial \varphi}, \\ &a_1+ia_2+2e^{i\alpha} = 2\frac{\partial \xi}{\partial z}, && a_1-ia_2+2e^{-i\alpha} = 2\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{z}}, \\ &d_1+id_2 = 2\frac{\partial \xi}{\partial \overline{z}}, && d_1-id_2 = 2\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial z} \end{aligned} \tag{2.2}$$

где, как и раньше, обозначено

$$\begin{aligned} a_1 &= e_x+e_y = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\cos\alpha \\ a_2 &= \omega_x-\omega_y = (\varepsilon_1+\varepsilon_2)\sin\alpha \\ d_1 &= e_x-e_y = (\varepsilon_1-\varepsilon_2)\cos(2\theta-\alpha) \\ d_2 &= \omega_x+\omega_y = (\varepsilon_2-\varepsilon_1)\sin(2\theta-\alpha) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Переходя к переменным φ, из (2.2) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1+\varepsilon_2+2 &= 2\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}e^{\beta} = 2\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{\varphi}}e^{\beta} \\ \varepsilon_1-\varepsilon_2 &= 2\frac{\partial \xi}{\partial \overline{\varphi}}e^{\beta+2i(\theta-\alpha)} = 2\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \varphi}e^{\beta-2i(\theta-\alpha)} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Из первой формулы при помощи (1.2) и (2.2) последовательно получим

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = 2\frac{\partial \overline{\xi}}{\partial \overline{\varphi}} &= -(1+\nu)[1-e^{-\beta}]+2, \\ 4\frac{\partial^2 S_0}{\partial \varphi\,\partial \overline{\varphi}} &= -(1+\nu)[1-e^{-\beta}]+2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Уравнения (1.5) и (2.5) были получены раньше [1].

3. Зависимость между напряжениями и деформациями. Закон Гука для главных осей имеет вид

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1-\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2), \qquad \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

При помощи (1.4), (2.4) и первой из формул (1.5) получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = -\frac{1+\nu}{E} i \frac{\partial F}{\partial \varphi} + 1, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial \bar{\varphi}} = -\frac{1+\nu}{E} i \frac{\partial F}{\partial \bar{\varphi}}$$

$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{\varphi}} = +\frac{1+\nu}{E} i \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\varphi}} + 1, \qquad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \varphi} = +\frac{1+\nu}{E} i \frac{\partial \bar{F}}{\partial \varphi}$$

После интегрирования будем иметь комплексные выражения Лява для любых перемещений

$$\xi = -\frac{1+\nu}{E} iF + \varphi, \qquad \bar{\xi} = \frac{1+\nu}{E} \bar{F} + \bar{\varphi} \tag{3.1}$$

Выразив ξ и F через S_0 и W_0 и интегрируя, найдем

$$S_0 = -\frac{1+\nu}{E} W_0 + \frac{1}{2} \varphi\bar{\varphi} \tag{3.2}$$

4. Общие интегралы. Введем функции ψ, $\bar{\psi}$ так, чтобы

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 = \frac{d\varphi}{dz}, \qquad \left(\frac{d\bar{\psi}}{d\bar{z}}\right)^2 = \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{z}}$$

и, кроме того, обозначим $\varphi^* = \varphi - z$, $\bar{\varphi}^* = \bar{\varphi} - \bar{z}$.

Тогда аналогично тому, как сделано в упомянутой работе, общие интегралы легко можно получить с различной степенью точности. Они будут иметь вид:

a) Для малых α и β и дополнительного равенства $Y_x \approx X_y$

$$W = \frac{E}{8} [\varphi_0 + \bar{\varphi}_0 + \bar{z}\varphi^* + z\bar{\varphi}^*) \tag{4.1}$$

Функция напряжения выродилась в функцию Эри. С той же степенью точности получим совпадение с классической теорией и для всех других величин.

b) Для малых α и β и точного равенства $Y_x^\circ = X_y^\circ$

$$W_0 = \frac{E}{8} [\varphi_0 + \bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}\varphi^* + \varphi\bar{\varphi}^*] \tag{4.2}$$

c) Для малого β и любого α

$$W_0 = \frac{E}{8} [\varphi_0 + \bar{\varphi}_0 + \bar{\varphi}\varphi^* + \varphi\bar{\varphi}^* - \varphi^*\bar{\varphi}^*] \tag{4.3}$$

d) Для любых значений α и β

$$W_0 = \frac{E}{8} [\varphi_0 + \bar{\varphi}_0 + 2(\varphi\bar{\varphi} - \psi\bar{\psi})] \tag{4.4}$$

5. Сила, действующая на границу полуплоскости. Рассмотрим случай, когда сосредоточенная сила, приложенная в начале координат и направленная по оси x, действует на область $x > 0$. В качестве предварительного исследования воспользуемся (4.3). Для функции φ_0 возьмем

$$2\varphi_0 = z^2 - \varphi^2$$

Тогда легко получим

$$W_0 = \frac{E}{4} [2y\varphi_2^* + \varphi_2^{*2}]$$

Главный член этого выражения совпадает с известным интегралом для рассматриваемой задачи. Как и в классической теории, для φ^* возьмем

$$\varphi^* = C \log z$$

где C — вещественная постоянная.

С принятой точностью найдем

$$2\beta = C\,\frac{C+2x}{r^2} \qquad \left(r^2 = x^2 + y^2\right) \tag{5.1}$$

Для компонентов напряжения получим

$$X_x = \frac{EC}{r^4}\left[\,x^3 + \frac{1}{2}(C+2\beta x)(x^2-y^2)\,\right] \qquad Y_x = \frac{EC}{r^4}\,y\,[x^2 - 2\beta(x^2-y^2)]$$

$$Y_y = \frac{EC}{r^4}\,y^2\,[x(1-4\beta)+C], \qquad X_y = \frac{EC}{r^4}\,y\,[x^2+\beta(3x^2-y^2)] \tag{5.2}$$

и аналогично для компонентов перемещений

$$u_1 = \frac{1+\nu}{2}\,\frac{Cy^2}{r^2}(1-2\beta) + \frac{C}{4}\log r,$$

$$u_2 = -\frac{1+\nu}{2}\,\frac{Cy^2}{r^2}(x+C)(1-2\beta) + \frac{1-\nu}{2}\,C\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} \tag{5.3}$$

Главные члены (5.2) и (5.3) совпадают с известными решениями. Но, если будем исходить из (5.2), на границе полуплоскости напряжения в нуль не обращаются. При $x=0$ имеем

$$X_x = -\frac{EC^2}{2y^2}, \qquad Y_x = \frac{EC^3}{y^3}$$

При наличии старших членов так называемая элементарная форма радиального распределения напряжений будет также нарушена.

Для суммарной силы P, действующей на границе полуплоскости и круговой области, вырезанной около начала координат, найдем

$$P = \frac{\pi EC}{2}$$

Кривые $\alpha = \mathrm{const}$, $\beta = \mathrm{const}$ дадут два семейства взаимно ортогональных окружностей, причем уравнение второго семейства будет

$$\left(x - \frac{C}{2\beta}\right)^2 + y^2 = \frac{C^2(1+\beta)}{4\beta^2}$$

Они почти касаются начала координат. Как известно из результатов оптического исследования, характерные для этой задачи круги соответствуют постоянному значению разности главных напряжений. Здесь же можно считать, что они соответствуют сумме. Если будем учитывать только главные члены, то увидим, что одно из главных напряжений обращается в нуль и эта разница пропадает.

Существенным недостатком решения этой задачи является также тот факт, что перемещение стремится к бесконечности при беспредельном возрастании r.

6. Решение при помощи другого интеграла. Рассмотрим эту же задачу, исходя из (4.7). Для ψ и φ_0 возьмем

$$\psi = \frac{C+z^2}{z}, \qquad \varphi_0 = \varphi^2 - z^2 - \frac{C^2}{z^2}$$

где C — вещественная постоянная. Для φ получим

$$\varphi = \frac{3(C+z^2)^2 - 4C^2}{3z^3}$$

Для комплексных компонентов напряжения найдем

$$A_1+iA_2=E\frac{B}{\overline{B}}\left[B\overline{B}-1\right],\qquad D_1+iD_2=-E\left[\overline{B}^2-1+\frac{B_0}{\overline{B}}\frac{z^3}{r^3}\right]$$

$$A_1-iA_2=E\frac{\overline{B}}{B}\left[B\overline{B}-1\right],\qquad D_1-iD_2=-E\left[B^2-1+\frac{B_0}{B}\frac{\overline{z}^3}{r^3}\right]$$

где

$$B_0=\frac{4Cx\,(C+r^2)}{r^5},\qquad B=\frac{C-z^2}{z^2},\qquad B\overline{B}=e^{\beta}$$

Переходя к вещественным переменным, получим

$$X_x=\frac{2EC}{r^8}\,e^{-\beta}x^2\,[r^2(x^2-3y^2)-2Cy^2+C^2]$$

$$X_y=\frac{2EC}{r^8}\,e^{-\beta}\,xy\,[4r^2x^2+C\,(x^2-y^2)-C^2]$$

$$Y_x=X_y+\frac{4EC^2}{r^{12}}\,e^{-\beta}\,xy\,[C-2\,(x^2-y^2)]\,[r^4-C\,(x^2-y^2)]$$

$$Y_y=-X_x+\frac{EC}{r^{12}}\,e^{-\beta}\,[C-2\,(x^2-y^2)]\,\{[r^4-C\,(x^2-y^2)]^2-4C^2x^2y^2\}$$

На границе при $x=0$ будем иметь

$$X_x=X_y=Y_x=0,\qquad Y_y=\frac{EC\,(C+2y^2)}{y^4} \tag{6.1}$$

Все напряжения при уменьшении r до нуля стремится к бесконечности. В недеформированном теле некоторым радиусом $r=\rho$ вырежем секториальную область. Вычислив составляющие напряжения по осям x, y для наклонной площади, силу, действующую на границе этой области, представим

$$X=P=\frac{E\,(C+\rho^2)\,(3C+\rho^2)}{2\rho^2\sqrt{C}}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{2\rho\sqrt{C}}{\rho^2-C}-\frac{E}{\rho}\,(C+\rho^2),\qquad Y=0 \tag{6.2}$$

Из этого уравнения должна быть определена постоянная C (которая зависит от радиуса особой области). Решим его приближенно. Полагая β, а вместе с ней и C малыми, найдем

$$C=\frac{P\rho}{4E} \tag{6.3}$$

Построенная теория имеет смысл только тогда, когда применим закон Гука. Для оценки напряженного состояния в качестве критерия примем третью теорию прочности. В этом случае должны положить

$$\sigma_p\geqslant(\sigma_1-\sigma_2)_{\max}$$

где σ_p — напряжение, соответствующее пределу пропорциональности. Разность главных напряжений на границе области будет

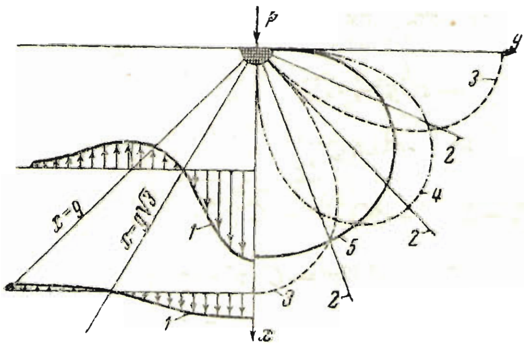
$$D^2=D_1^2+D_2^2=(\sigma_1-\sigma_2)^2=\frac{8E^2C^2}{\rho^4}\,(5-\cos 2\vartheta)\cos^2\vartheta \tag{6.4}$$

Для $\rho=\text{const}$ величина D примет максимальное значение при $\vartheta=0$. Тогда уравнение прочности совместно с (6,3) даст

$$C=\pm\frac{P^2}{2\sqrt{2}\,E\sigma_p},\qquad \rho=\pm\frac{P\sqrt{2}}{\sigma_p} \tag{6.5}$$

Знак нужно взять одинаковым со знаком силы P. Сила считается положительной, если она направлена в сторону отрицательных x. Оставляя теперь только главные члены, для компонентов напряжения можно написать окончательно

$$X_x = \pm \frac{P^2}{\sigma_p \sqrt{2}} \frac{x^2 (x^2 - 3y^2)}{r^6}, \qquad X_y = Y_x = \pm \frac{2\sqrt{2}\, P^2}{\sigma_p} \frac{x^3 y}{r^6}$$
$$Y_y = \mp \frac{P^2}{\sigma_p \sqrt{2}} \left[\frac{x^2 (x^2 - 3y^2)}{r^6} + \frac{x^2 - y^2}{r^4} \right] \tag{6.6}$$



Фиг. 1.

Не приводя вычислений, с принятой точностью напишем результаты и для компонентов перемещений (6.7)

$$u_1 = \pm \frac{P^2}{\sqrt{2}\, E \sigma_p} \frac{x (y^2 - \nu x^2)}{r^4}$$
$$u_2 = \pm \frac{P}{\sqrt{2}\, E \sigma_p} \frac{y (y^2 + \nu x^2)}{r^4}$$

Эти формулы имеют место только тогда, когда

$$x^2 + y^2 \geqslant \rho^2 \tag{6.8}$$

Подчеркнем следующие обстоятельства: 1) с возрастанием r компоненты напряжения и перемещения стремятся к нулю; 2) как те, так и другие не являются линейными функциями силы; 3) решение зависит от физических свойств тела.

Наконец, заметим $X_x = 0$ при $x^2 = 3y^2$ и $u_1 = 0$ для $\nu = 1/3$; для $x = \text{const}$ функции X_x и u_1 в двух точках принимают экстремальные значения.

Направления главных осей найдем из уравнения, которое получим с помощью (6.6). В полярных координатах оно имеет вид

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{Y_x + X_y}{X_x - Y_y} = \frac{4 \sin 2\vartheta}{3 \cos 2\vartheta - (2 + \cos 2\vartheta) \operatorname{tg}^2 \vartheta} \tag{6.9}$$

Отсюда видно, что прямая, выходящая из начала координат и взятая в недеформированном теле, после деформации будет изоклиной.

Для $D = \sigma_1 - \sigma_2 = \text{const}$ получим из (6.4)

$$D^2 \sigma_p^2 r^2 = P (5 - \cos 2\vartheta) \cos^2 \vartheta \tag{6.10}$$

Кривая, соответствующая этому уравнению, проходит через начало координат и немного отличается от окружности. На фиг. 1 кривые *1* дают X_x при $x = \text{const}$ кривые *2* изоклины, кривые *3* изопахи, кривые *5* изохромы, *4* соответствует $x = \text{const}$.

Поступила в редакцию
13 II 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В. В., Плоская задача теории упругости для конечных перемещений. ПММ. 1946. Вып. 5—6.
2. Ляв А., Математическая теория упругости. ОНТИ. 1935.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. АН СССР. 1933.