Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

К ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК [1]

С. А. Амбарцумян

(Ереван)

1. Исходные предпосылки. Будем рассматривать тонкостенную, достаточно пологую и анизотропную оболочку, материал которой в каждой точке имеет одну плоскость упругой симметрии, параллельной срединной поверхности оболочки [2].

За координатную поверхность этой оболочки примем срединную поверхность в криволинейных ортогональных координатах α и β, совпадающих с линиями кривизны. Пусть $k_1 = k_1(\alpha, \beta)$, $k_2 = k_2(\alpha, \beta)$ — главные кривизны координатной поверхности, $A = A(\alpha, \beta)$, $B = B(\alpha, \beta)$ — коэффициенты первой квадратичной формы.

В отношении оболочки принимаем упрощающие предпосылки.

1) Гипотезу Киргоффа-Лява [2] о том, что нормальные к срединной поверхности прямолинейные элементы оболочки после деформации оболочки сохраняют свою первоначальную длину, остаются прямолинейными и нормальными к этой поверхности. Погрешность этой гипотезы, как доказано [3], имеет величину порядка (δk) по сравнению с единицей, причем δ — постоянная толщина оболочки.

2) Параметры $A(\alpha, \beta)$ и $B(\alpha, \beta)$ при дифференцировании рассматриваем как постоянные [4].

3) Отбрасываем некоторые члены второстепенного значения [5].

2. Уравнения равновесия и соотношения между деформациями и напряжениями. Условия равновесия элемента оболочки, при наших исходных предпосылках, как известно, выражаются уравнениями

$$
\begin{gathered}
B\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} + A\frac{\partial S}{\partial \beta} + ABX = 0, \qquad A\frac{\partial T_2}{\partial \beta} + B\frac{\partial S}{\partial \alpha} + ABY = 0 \\
-(k_1 T_1 + k_2 T_2) + \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(BN_1) + \frac{\partial}{\partial \beta}(AN_2)\right] + Z = 0 \\
B\frac{\partial H}{\partial \alpha} - A\frac{\partial G_2}{\partial \beta} - ABN_2 = 0, \qquad -A\frac{\partial H}{\partial \beta} + B\frac{\partial G_1}{\partial \alpha} + ABN_1 = 0 \\
S_1 + S_2 + k_1 H_1 + k_2 H_2 = 0
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

Последнее соотношение в силу формул, выражающих условия и моменты через деформации срединной поверхности, является тождеством.

---

[1] Приношу глубокую благодарность А. Г. Назарову за внимание к этой работе.

[2] Аналогичная задача для пластинки решена С. Г. Лехницким [1].

Для деформаций и параметров изменения кривизны имеем

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha}+k_1 w,\quad \varepsilon_2=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta}+k_2 w,\quad \omega=\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha} \tag{2.2}$$

$$\varkappa_1=-\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2},\quad \varkappa_2=-\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2},\quad \tau=-\frac{2}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha\,\partial \beta} \tag{2.3}$$

где $u=u(\alpha,\beta)$, $v=v(\alpha,\beta)$ — смещения в срединной поверхности по координатным линиям, $w=w(\alpha,\beta)$ — нормальное перемещение.

В формулах (2.3) мы пренебрегли компонентами u и v по сравнению с компонентом w. Поэтому эти соотношения не отличаются от соответствующих выражений для пластинок. Такая интерпретация изменения кривизны для общего случая впервые дана В. З. Власовым [5].

Из трех дифференциальных соотношений А. Л. Гольденвейзера [6] для рассматриваемой задачи необходимо только последнее:

$$k_2\varkappa_1+k_1\varkappa_2+\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial \alpha^2}-\frac{1}{AB}\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\,\partial \beta}+\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial \beta^2}=0 \tag{2.4}$$

Из уравнений обобщенного закона Гука в принятой триортогональной криволинейной системе координат

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha&=A_{11}e_\alpha+A_{12}e_\beta+A_{13}e_\gamma+A_{16}e_{\alpha\beta}, & \tau_{\beta\gamma}&=A_{44}e_{\beta\gamma}+A_{45}e_{\alpha\gamma}\\
\sigma_\beta&=A_{12}e_\alpha+A_{22}e_\beta+A_{23}e_\gamma+A_{26}e_{\alpha\beta}, & \tau_{\alpha\gamma}&=A_{45}e_{\beta\gamma}+A_{55}e_{\alpha\gamma}\\
\sigma_\gamma&=A_{13}e_\alpha+A_{23}e_\beta+A_{33}e_\gamma+A_{36}e_{\alpha\beta}, & \tau_{\alpha\beta}&=A_{16}e_\alpha+A_{26}e_\beta+A_{36}e_\gamma+A_{66}e_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

в рассматриваемом случае при $\sigma_\gamma=0$ имеют место

$$\sigma_\alpha=B_{11}e_\alpha+B_{12}e_\beta+B_{16}e_{\alpha\beta},\quad \sigma_\beta=B_{12}e_\alpha+B_{22}e_\beta+B_{26}e_{\alpha\beta},$$
$$\tau_{\alpha\beta}=B_{16}e_\alpha+B_{26}e_\beta+B_{66}e_{\alpha\beta} \tag{2.6}$$

Здесь, следуя С. Г. Лехницкому [1], ведены обозначения

$$B_{ik}=(A_{ik}A_{33}-A_{i3}A_{k3})/A_{33}\qquad (i,\ k=1,\ 2,\ 6)$$

Эти напряжения вызывают внутренние обобщенные силы: тангенциальные T, S, изгибающие и крутящие моменты G, H, которые на двух основных сечениях $\alpha=\mathrm{const}$, $\beta=\mathrm{const}$ имеют вид

$$\begin{aligned}
T_1&=\delta\,[B_{11}\varepsilon_1+B_{12}\varepsilon_2+B_{16}\omega], & G_1&=-\frac{\delta^3}{12}[B_{11}\varkappa_1+B_{12}\varkappa_2+B_{16}\tau]\\
T_2&=\delta\,[B_{22}\varepsilon_2+B_{12}\varepsilon_1+B_{26}\omega], & G_2&=-\frac{\delta^3}{12}[B_{22}\varkappa_2+B_{12}\varkappa_1+B_{26}\tau]
\end{aligned}$$
$$S_1=-S_2=S=\delta\,[B_{66}\omega+B_{16}\varepsilon_1+B_{26}\varepsilon_2] \tag{2.7}$$
$$H_1=-H_2=H=-\frac{\delta^3}{12}[B_{66}\tau+B_{16}\varkappa_1+B_{26}\varkappa_2]$$

Подставляя в формулы (2.1), значения G_1, G_2 и H из (2.7), получим

$$N_1=-\frac{\delta^3}{12}C(B_{ik})\,w,\qquad N_2=-\frac{\delta^3}{12}D(B_{ik})\,w \tag{2.8}$$

где

$$C(B_{ik})=B_{11}\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3}+3B_{16}\frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3}{\partial \alpha^2\partial \beta}+(B_{12}+2B_{66})\frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3}{\partial \alpha\partial \beta^2}+B_{26}\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial \beta^3}$$

$$D(B_{ik})=B_{22}\frac{1}{B^3}\frac{\partial^3}{\partial \beta^3}+3B_{26}\frac{1}{B^2A}\frac{\partial^3}{\partial \beta^2\partial \alpha}+(B_{12}+2B_{66})\frac{1}{BA^2}\frac{\partial^3}{\partial \beta\partial \alpha^2}+B_{16}\frac{1}{A^3}\frac{\partial^3}{\partial \alpha^3}$$

3. Основные дифференциальные уравнения. За искомые принимаем $u(\alpha,\beta)$, $v(\alpha,\beta)$ и $w(\alpha,\beta)$. Подставив ε_1, ε_2, ω, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ из (2.2) и (2.3) в (2.7) можно определить T_1, T_2, S, G_1, G_2 и H как функции u, v, w.

Далее, подставляя значения внутренних усилий в уравнения равновесия и учитывая выражение (2.8), можно получить полную систему уравнений относительно трех основных искомых параметров u, v, w. Эту систему, следуя В. З. Власову [5], представим в виде табл. 1.

Уравнения (3.1, табл. 1, связывающие неизвестные u, v, w) и граничные условия, дают возможность исследовать задачу о равновесии тонкостенных, пологих и анизотропных оболочек методом перемещений. Однако интегрирование этой системы связано с весьма большими затруднениями. Пользуясь методом, предложенным В. З. Власовым [5], для изотропных оболочек, задачу можно и в случае анизотропной оболочки привести к системе двух совместных уравнений.

Будем предполагать, что $X=Y=0$, т. е. рассмотрим случай поверхностной нормальной нагрузки. Полагая

$$T_1=\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2},\qquad T_2=\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2},\qquad S=-\frac{1}{AB}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\partial\beta}\tag{3.2}$$

тождественно удовлетворим первым двум уравнениям равновесия. Далее, учитывая (2.3) и (3.2) из (2.4) и третьего уравнения (2.1), получим

$$\begin{aligned}-\left(k_2\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2}+k_1\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right)+\frac{1}{\delta\Omega}L_1(B_{ik})\,\varphi=0\\ \left(k_1\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}+k_2\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}\right)+\frac{\delta^3}{12}L(B_{ik})\,w-Z=0\end{aligned}\tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned}L_1(B_{ik})=\frac{1}{B_{66}}\Big\{&(B_{11}B_{66}-B_{16}^2)\frac{1}{A^4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2(B_{11}B_{26}-B_{12}B_{16})\frac{1}{A^3B}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^3\partial\beta}+\\&+[(B_{11}B_{22}-B_{12}^2)-2(B_{12}B_{66}-B_{16}B_{26})]\frac{1}{A^2B^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\\&+2(B_{22}B_{16}-B_{12}B_{26})\frac{1}{AB^3}\frac{\partial^4}{\partial\alpha\partial\beta^3}+(B_{22}B_{66}-B_{26}^2)\frac{1}{B^4}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}\Big\}\end{aligned}\tag{3.4}$$

$$\Omega=\frac{1}{B_{66}^2}[(B_{11}B_{66}-B_{16}^2)(B_{22}B_{66}-B_{26}^2)-(B_{12}B_{66}-B_{16}B_{26})^2]\tag{3.5}$$

Введем для операторов обозначения

$$\nabla_r=k_1\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+k_2\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2},\qquad \nabla_r^2=\nabla_r\nabla_r\tag{3.6}$$

Уравнения (3.3) в таком случае примут вид

$$\frac{1}{\delta\Omega}L_1(B_{ik})\,\varphi-\nabla_r w=0,\qquad -\nabla_r\varphi-\frac{\delta^3}{12}L(B_{ik})\,w+Z=0\tag{3.7}$$

Здесь $\varphi=\varphi(\alpha,\beta)$ — функция напряжений, аналогичная в плоской задаче функциям Эри, $w=w(\alpha,\beta)$ — функция перемещений.

Из уравнений (3.7) при $k_1=k_2=0$ получаем известные уравнения для плоского напряженного состояния пластинки $L_1(B_{ik})\,\varphi=0$ и для изгиба анизотропной пластинки $L(B_{ik})\,w=12Z/\delta^3$.

Таблица 1

$u(\alpha,\beta)$	$v(\alpha,\beta)$	$w(\alpha,\beta)$	(3.1)
$B_{11}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2B_{16}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+B_{66}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$	$B_{16}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+(B_{12}+B_{66})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+B_{26}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$	$\frac{1}{A}(B_{11}k_1+B_{12}k_2)\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}(B_{16}k_1+B_{26}k_2)\frac{\partial}{\partial\beta}$	$\frac{X}{\delta}$
$B_{16}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+(B_{12}+B_{66})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+B_{26}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}$	$B_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+2B_{26}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+B_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$	$\frac{1}{B}(B_{22}k_2+B_{12}k_1)\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{A}(B_{26}k_2+B_{16}k_1)\frac{\partial}{\partial\alpha}$	$\frac{Y}{\delta}$
$\frac{1}{A}(B_{11}k_1+B_{12}k_2)\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}(B_{16}k_1+B_{26}k_2)\frac{\partial}{\partial\beta}$	$\frac{1}{B}(B_{22}k_2+B_{12}k_1)\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{1}{A}(B_{26}k_2+B_{16}k_1)\frac{\partial}{\partial\alpha}$	$(B_{11}k_1^2+2B_{12}k_1k_2+B_{22}k_2^2)+\frac{\delta^2}{12}L(B_{ik})$	$-\frac{Z}{\delta}$

$$L(B_{ik})=B_{11}\frac{1}{A^4}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+4B_{16}\frac{1}{A^3B}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^3\partial\beta}+2(B_{12}+2B_{66})\frac{1}{A^2B^2}\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+4B_{26}\frac{1}{AB^3}\frac{\partial^4}{\partial\alpha\partial\beta^3}+B_{22}\frac{1}{B^4}\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}$$

Таблица 2

$u(\alpha,\beta)$	$v(\alpha,\beta)$	$w(\alpha,\beta)$	(4.1)
$B_{11}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2B_{16}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+$ $+B_{66}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-k_1^2T_1^\circ$	$B_{16}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+(B_{12}+B_{66})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+$ $+B_{26}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-k_1k_2S^\circ$	$\frac{1}{A}(B_{11}k_1+B_{12}k_1)\frac{\partial}{\partial\alpha}+k_1T_1^\circ\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+$ $+\frac{1}{B}(B_{16}k_1+B_{26}k_2)\frac{\partial}{\partial\beta}+k_1S^\circ\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}$	
$B_{16}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+(B_{12}+B_{66})\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+$ $+B_{26}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-k_1k_2S^\circ$	$B_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+2B_{26}\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+$ $+B_{66}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-k_2^2T_2^\circ$	$\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}(B_{22}k_2+B_{12}k_1)+k_2T_2^\circ\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+$ $+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}(B_{26}k_2+B_{16}k_1)+k_2S^\circ\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}$	
$\frac{1}{A}(B_{11}k_1+B_{12}k_2)\frac{\partial}{\partial\alpha}+k_1T_1^\circ\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+$ $+\frac{1}{B}(B_{16}k_1+B_{26}k_2)\frac{\partial}{\partial\beta}+k_1S^\circ\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}$	$\frac{1}{B}(B_{22}k_2+B_{12}k_1)\frac{\partial}{\partial\beta}+k_2T_2^\circ\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}+$ $+\frac{1}{A}(B_{26}k_2+B_{16}k_1)\frac{\partial}{\partial\alpha}+k_2S^\circ\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}$	$\frac{\delta^2}{12}L(B_{ik})+(B_{11}k_1^2+2B_{12}k_1k_2+B_{22}k_2^2)-$ $-\left(T_1^\circ\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2S^\circ\frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}+T_2^\circ\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)$	

Таким образом, пользуясь смешанным методом В. З. Власова [5], мы получили более компактное представление дифференциальных уравнений теории анизотропных оболочек. Систему (3.7) можно привести к эквивалентному ей одному уравнению восьмого порядка. Положим

$$w = L_1(B_{ik})\,\Phi, \qquad \varphi = \delta\Omega \nabla_r \Phi \tag{3.8}$$

из второго уравнения (3.7) получим

$$L_1(B_{ik})\,L(B_{ik})\,\Phi + \frac{12\Omega}{\delta^2} \nabla_r^2 \Phi = \frac{12}{\delta^3} Z \tag{3.9}$$

Заметим, что это уравнение является обобщением уравнения, данного В. З. Власовым [7] для изотропных цилиндрических оболочек, и может быть получено другим путем из системы (3.1, табл. 1), аналогично тому, как Б. Г. Галеркин [9] получил уравнение изотропной цилиндрической оболочки [8].

Внутренние силы по (2.2), (2.3), (2.7), (2.8), и (3.8) будут:

$$T_1 = \delta\Omega \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \nabla_r \Phi, \quad T_2 = \delta\Omega \frac{1}{A^2} \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \nabla_r \Phi, \quad S = -\delta\Omega \frac{1}{AB} \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} \nabla_r \Phi \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{\delta^3}{12}\left[B_{11}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + B_{12}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + B_{16}\frac{2}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\right] L_1(B_{ik})\,\Phi \\ G_2 &= \frac{\delta^3}{12}\left[B_{22}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + B_{12}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + B_{26}\frac{2}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}\right] L_1(B_{ik})\,\Phi \\ H &= -\frac{\delta^3}{12}\left[B_{66}\frac{2}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} + B_{16}\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + B_{26}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right] L_1(B_{ik})\,\Phi \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$N_1 = -\frac{\delta^3}{12} C(B_{ik})\,L_1(B_{ik})\,\Phi, \qquad N_2 = -\frac{\delta^3}{12} D(B_{ik})\,L_1(B_{ik})\,\Phi \tag{3.12}$$

Для перемещений точки срединной поверхности имеем

$$w = L_1(B_{ik})\,\Phi \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} u = -\frac{1}{B_{66}} \Big\{ &\left[(B_{11}B_{66} - B_{16}^2)\,k_1 + (B_{12}B_{66} - B_{16}B_{26})\,k_2\right] \frac{1}{A^3}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^3} + \\ &+ \left[2(B_{11}B_{26} - B_{12}B_{16})\,k_1 - (B_{22}B_{16} - B_{12}B_{26})\,k_2\right] \frac{1}{A^2B}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^2\partial\beta} + \\ &+ \left[\left[(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) - (B_{12}B_{66} - B_{16}B_{26})\right] k_1 - (B_{22}B_{66} - B_{26}^2)\,k_2\right] \frac{1}{AB^2}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha\partial\beta^2} + \\ &+ (B_{22}B_{16} - B_{12}B_{26})\,k_1 \frac{1}{B^3}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\beta^3} \Big\} \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned} v = -\frac{1}{B_{66}} \Big\{ &\left[B_{22}B_{66} - B_{26}^2)\,k_2 + (B_{12}B_{66} - B_{16}B_{26})\,k_1\right] \frac{1}{B^3}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\beta^3} + \\ &+ \left[2(B_{22}B_{16} - B_{12}B_{26})\,k_2 - (B_{11}B_{26} - B_{12}B_{16})\,k_1\right] \frac{1}{B^2A}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\beta^2\partial\alpha} + \\ &+ \left[\left[(B_{11}B_{22} - B_{12}^2) - (B_{12}B_{66} - B_{16}B_{26})\right] k_2 - (B_{11}B_{66} - B_{16}^2)\,k_1\right] \frac{1}{BA^2}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\beta\partial\alpha^2} + \\ &(B +_{11} B_{26} - B_{12}B_{16})\,k_2 \frac{1}{A^3}\frac{\partial^3\Phi}{\partial\alpha^3} \Big\} \end{aligned} \tag{3.15}$$

4. Локальная устойчивость и колебания. Повторяя рассуждения В. З. Власова [5], уравнения локальной устойчивости анизотропной пологой оболочки можно **получить** в виде, представленном на табл. 2.

Так как в этом случае компоненты X, Y пропорциональны кривизнам k_1 и k_2, то ими можно пренебрегать. Тогда из (3.7) получим

$$\frac{1}{\delta\Omega} L_1(B_{ik})\varphi - \nabla_r w = 0$$

$$\nabla_r \varphi + \frac{\delta^3}{12} L(B_{ik}) w - \left[T_1^\circ \frac{1}{A^2}\frac{\partial w^2}{\partial \alpha^2} + 2S^\circ \frac{1}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta\partial\alpha} + T_2^\circ \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}\right] = 0 \quad (4.2)$$

Таким образом, задача приводится также к решению системы двух совместных уравнений относительно функции напряжений φ и функции перемещений w. Эту систему можно привести к одному уравнению восьмого порядка относительно одной функции. Из (3.9) получим

$$L_1(B_{ik}) L(B_{ik}) \Phi + \frac{12\Omega}{\delta^2} \nabla_r^2 \Phi - \quad (4.3)$$

$$- \frac{12}{\delta^3}\left[T_1^\circ \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2S^\circ \frac{1}{AB}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} + T_2^\circ \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right] L_1(B_{ik})\Phi = 0$$

Из уравнений (4.2) или (4.3) легко можно получить также уравнения колебаний анизотропных пологих оболочек. Для этого необходимо принять в расчет инерционные силы и положить $T_1^\circ = T_2^\circ = S^\circ = 0$.

Обозначая через γ объёмный вес оболочки, g — ускорение силы тяжести, получим из (7.8) или (7.9) соответственно

$$\frac{1}{\delta\Omega} L_1(B_{ik})\varphi - \nabla_r w = 0, \qquad \nabla_r \varphi + \frac{\delta^3}{12} L(B_{ik}) w + \frac{\gamma\delta}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.4)$$

$$L_1(B_{ik}) L(B_{ik})\Phi + \frac{12}{\delta^2}\nabla_r^2\Phi + \frac{\gamma\delta}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2} L_1(B_{ik})\Phi = 0 \quad (4.5)$$

Эта задача для пологих изотропных оболочек в такой форме впервые разрешена В. З. Власовым [7]. При $k_1 = k_2 = 0$ из приведенных уравнений можно получить основные уравнения устойчивости и колебаний анизотропных пластинок (С. Г. Лехницкий [8]).

Поступила в редакцию
23 VIII 1947

Институт стройматериалов и сооружений Академии Наук Арм. ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ. 1938. Т. II. Вып. 2.
2. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ. 1935.
3. Новожилов В. В. О погрешности одной из гипотез теории оболочек. ДАН СССР. 1943. Т. XXXVIII. № 5—6.
4. Работнов Ю. Н. Уравнения пограничной зоны в теории оболочек. ДАН СССР. 1945. Т. XLVII. № 5.
5. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 2.
6. Гольденвейзер А. Л. Уравнения теории тонких оболочек. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 2.
7. Власов В. З. Некоторые новые задачи строительной механики оболочек и тонкостенных конструкций. Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. 1947. № 1.
8. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат. 1947.
9. Галеркин Б. Г. Равновесие упругой цилиндрической оболочки. Сб. «Труды Ленинградского института сооружений». ОНТИ. 1935.