Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

К ТЕОРИИ ТОНКИХ ПОЛОГИХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

И. Н. Векуа

(Тбилиси)

В работе дается общий способ интегрирования уравнения (1.5), к которому приводится система уравнений (1.1) достаточно пологих оболочек. Отдельно рассматриваются случаи сферической и цилиндрической оболочек. Заметим, что исследованию уравнений более общего вида, чем (1.5), посвящены работы автора [1].

§ 1. Основная система уравнений. В работе [2] В. З. Власова теория тонких достаточно пологих упругих оболочек сводится к следующей основной системе дифференциальных уравнений

$$\nabla^2\nabla^2\Phi - E\delta\Delta w = 0, \qquad \nabla^2\nabla^2 w + \frac{1}{D}\Delta\Phi = \frac{1}{D}Z \tag{1.1}$$

Здесь E — модуль Юнга, δ — толщина оболочки, $D = E\delta^3 / 12(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость, причем ν — коэффициент Пуассона, Z — объемная сила, действующая перпендикулярно серединной поверхности оболочки (предполагается, что касательные компоненты объемных сил равны нулю), Φ — функция напряжений, при помощи которой выражены компоненты усилий и моментов (см. Власов[2], стр. 125), w — нормальное перемещение точек серединной поверхности; наконец операторы

$$\nabla^2 = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right] \tag{1.2}$$

$$\Delta = \frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}k_2\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}k_1\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right] \tag{1.3}$$

где $A = A(\alpha, \beta)$, $B = B(\alpha, \beta)$ обозначают коэффициенты квадрата линейного элемента серединной поверхности, причем α, β — криволинейные координаты на этой поверхности, совпадающие с линиями кривизны, $k_1 = k_1(\alpha, \beta)$, $k_2 = k_2(\alpha, \beta)$ главные кривизны, соответствующие линиям $\beta = \mathrm{const}$, $\alpha = \mathrm{const}$. Введем в рассмотрение комплексную функцию

$$V = w + \frac{i\sqrt{12(1-\nu^2)}}{E\delta^2}\Phi \tag{1.4}$$

Тогда, как нетрудно проверить, система двух действительных уравнений (1.1) будет равносильна одному комплексному уравнению

$$\nabla^2\nabla^2 V - \frac{i\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\delta}\Delta V = \frac{Z}{D} \tag{1.5}$$

причем первоначальные функции Φ, w будут выражаться через V так:

$$w = \frac{1}{2}(V + \overline{V}), \qquad \Phi = \frac{E\delta^2(V - \overline{V})}{2i\sqrt{12(1-\nu^2)}} \tag{1.6}$$

§ 2. Приведение уравнения (1.5) к интегральному уравнению типа Вольтерра в комплексной области. Введем на серединной поверхности оболочки вместо криволинейных координат α, β некоторую изотермическую систему координат ξ, η. Тогда, как известно (см., Бляшке [4])

$$\nabla^2 = \frac{1}{\lambda(\xi, \eta)} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] \tag{2.1}$$

где $\lambda(\xi, \eta)$ — положительная функция точки серединной поверхности, которая является решением уравнения (Гаусс)

$$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial \eta^2} = -2K\lambda \tag{2.2}$$

причем K — гауссова кривизна. Введем комплексные переменные $z = \xi + i\eta$, $\zeta = \xi - i\eta$ и рассмотрим дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - i\frac{\partial}{\partial \eta}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + i\frac{\partial}{\partial \eta}\right) \tag{2.3}$$

Тогда оператор ∇^2 примет вид

$$\nabla^2 = \frac{4}{\lambda} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} \tag{2.4}$$

В силу этой формулы уравнение (1.5) запишется так:

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta} - i\varepsilon\lambda\Delta V = \frac{\lambda}{16D} Z \qquad \left(\varepsilon = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{8\delta}\right) \tag{2.5}$$

Что же касается оператора $\lambda\Delta$, то его можно представить в виде

$$\lambda \Delta V = \frac{\partial^2 aV}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 bV}{\partial z \partial \zeta} + \frac{\partial^2 cV}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial dV}{\partial z} + \frac{\partial eV}{\partial \zeta} + fV \tag{2.6}$$

где a, b, c, d, e, f — заданные функции точки поверхности; их нетрудно выразить в явном виде через λ, A, B, k_1, k_2.

Пусть T — область на плоскости $z = \xi + i\eta$, которая соответствует серединной поверхности оболочки. В дальнейшем для простоты ограничимся рассмотрением того случая, когда область T односвязна.

Во всем дальнейшем будем предполагать, что λ, a, b, c, d, e, f, а также Z — аналитические функции двух комплексных переменных z, ζ в области $(z \in T, \zeta \in \overline{T})$, где $\overline{T}$ обозначает зеркальное изображение области T относительно действительной оси (большинство поверхностей представляющих интерес для практики, принадлежат к рассматриваемому классу).

Чтобы практически перейти от функции переменных ξ, η к соответствующим функциям переменных z, ζ, надо аргументы ξ, η заменить выражениями $\frac{1}{2}(z+\zeta)$, $\frac{1}{2}(z-\zeta)/i$ соответственно.

Пусть V — некоторое регулярное в области T решение уравнения (1.5), т. е. решение, непрерывное вместе со своими частными производными порядка $\leqslant 4$ в области T. Известно, что такое решение будет аналитической функцией переменных ξ, η в области T. Можно доказать, что аналитическое продолжение этой функции в область комплексных значений переменных ξ, η является аналитической функцией $V(z, \zeta)$ двух комплексных переменных z, ζ в области $(z \in T, \zeta \in \overline{T})$.

В силу (2.6) уравнение (2.5) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta}\left\{\frac{1}{\lambda(z,\zeta)}\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta} - i\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{\zeta} a(z,\tau)V(z,\tau)\,d\tau + \frac{\partial}{\partial \zeta}\int_0^{z} c(t,\zeta)V(t,\zeta)\,dt + \right.\right.$$

$$+ b(z,\zeta)V(z,\zeta) + \int_0^{\zeta} d(z,\tau)V(z,\tau)\,d\tau + \int_0^{z} e(t,\zeta)V(t,\zeta)\,dt +$$

$$\left.\left. + \int_0^{z} dt\int_0^{\zeta} f(t,\tau)V(t,\tau)\,d\tau\right] - \frac{1}{16D}\int_0^{z} dt\int_0^{\zeta}\lambda(t,\tau)Z(t,\tau)\,d\tau\right\} = 0 \quad (2.7)$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{\lambda(z,\zeta)}\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \zeta} - i\varepsilon\left[\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{\zeta} a(z,\tau)V(z,\tau)\,d\tau + \frac{\partial}{\partial \zeta}\int_0^{z} c(t,\zeta)V(t,\zeta)\,dt + \right.$$

$$+ b(z,\zeta)V(z,\zeta) + \int_0^{\zeta} d(z,\tau)V(z,\tau)\,d\tau + \int_0^{z} e(t,\zeta)V(t,\zeta)\,dt + \quad (2.8)$$

$$\left. + \int_0^{z} dt\int_0^{\zeta} f(t,\tau)V(t,\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{16D}\int_0^{z} dt\int_0^{\zeta}\lambda(t,\tau)Z(t,\tau)\,d\tau + \varphi_0(z) + \varphi_0^*(\zeta)$$

где $\varphi_0(z)$, $\varphi_0^*(\zeta)$—голоморфные функции в $T, \overline{T}$ соответственно; эти функции определяются однозначно при помощи функции V, если их подчиним условию

$$\varphi_0(0) = \varphi_0^*(0) \quad (2.9)$$

Здесь предполагается, что начало координат принадлежит T; это, конечно, не ограничивает общности рассуждений. Умножая обе части уравнения (2.8) на $\lambda(z,\zeta)$ и принимая во внимание тождества

$$\lambda(z,\zeta)\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{\zeta} a(z,\tau)\,V(z,\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\int_0^{\zeta}\lambda(z,\zeta)\,a(z,\tau)\,V(z,\tau)\,d\tau - \int_0^{\zeta}\frac{\partial\lambda(z,\zeta)}{\partial z}a(z,\tau)\,V(z,\tau)\,d\tau$$

$$\lambda(z,\zeta)\frac{\partial}{\partial \zeta}\int_0^{z} c(t,\zeta)\,V(t,\zeta)\,dt =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \zeta}\int_0^{z}\lambda(z,\zeta)\,c(t,\zeta)\,V(t,\zeta)\,dt - \int_0^{z}\frac{\partial\lambda(z,\zeta)}{\partial \zeta}c(t,\zeta)\,V(t,\zeta)\,dt$$

уравнение (2.8) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \zeta}\left\{V(z,\zeta) - i\varepsilon\left[\int_0^{z} K_1(z,\zeta,t)V(t,\zeta)\,dt + \int_0^{\zeta} K_2(z,\zeta,\tau)V(z,\tau)\,d\tau + \right.\right.$$

$$\left. + \int_0^{z} dt\int_0^{\zeta} K_0(z,\zeta,t,\tau)V(t,\tau)\,d\tau - Z_0(z,\zeta) - \right.$$

$$\left. - \int_0^{z} dt\int_0^{\zeta}\lambda(t,\tau)[\varphi_0(t) + \varphi_0^*(\tau)]\,dt\right\} = 0 \quad (2.10)$$

где

$$K_1(z,\zeta,t)=c(t,\zeta)\int\limits_t^z\lambda(t_1,\zeta)\,dt_1,\qquad K_2(z,\zeta,\tau)=a(z,\tau)\int\limits_\tau^\zeta\lambda(z,\tau_1)\,d\tau_1$$

$$K_0(z,\zeta,t,\tau)=\lambda(t,\tau)\,b(t,\tau)+d(t,\tau)\int\limits_\tau^\zeta\lambda(t,\tau_1)\,d\tau_1+e(t,\tau)\int\limits_t^z\lambda(t_1,\tau)\,dt_1-$$

$$-a(t,\tau)\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_\tau^\zeta\lambda(t,\tau_1)\,d\tau_1-c(t,\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_t^z\lambda(t_1,\tau)\,dt_1+$$

$$+f(t,\tau)\int\limits_t^z dt_1\int\limits_\tau^\zeta\lambda(t_1,\tau_1)\,d\tau_1 \tag{2.11}$$

$$Z_0(z,\zeta)=\frac{1}{16D}\int\limits_0^z dt\int\limits_0^\zeta\lambda(t,\tau)\,Z(t,\tau)\,d\tau\int\limits_t^z dt_1\int\limits_\tau^\zeta\lambda(t_1,\tau_1)\,d\tau_1 \tag{2.12}$$

Как видно, функции K_1, K_2, K_0 зависят лишь от формы серединной поверхности и не зависят ни от толщины, ни от физических свойств оболочки. Из (2.10) получим

$$V(z,\zeta)-i\varepsilon\Big[\int\limits_0^z K_1(z,\zeta,t)\,V(t,\zeta)\,dt+\int\limits_0^\zeta K_2(z,\zeta,\tau)\,V(z,\tau)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_0^z dt\int\limits_0^\zeta K_0(z,\zeta,t,\tau)\,V(t,\tau)\,d\tau\Big]=Z_0(z,\zeta)+U_0(z,\zeta) \tag{2.13}$$

где

$$U_0(z,\zeta)=\varphi_1(z)+\varphi_1^*(\zeta)+\int\limits_0^z\lambda_1(\zeta,t)\,\varphi_0(t)\,dt+\int\limits_0^\zeta\lambda_1^*(z,\tau)\,\varphi_0^*(\tau)\,d\tau \tag{2.14}$$

причем

$$\lambda_1(\zeta,z)=\int\limits_0^\zeta\lambda(z,\tau)\,d\tau,\qquad \lambda_1^*(z,\zeta)=\int\limits_0^z\lambda(t,\zeta)\,dt \tag{2.15}$$

Функции $\varphi_1(z)$, $\varphi_1^*(\zeta)$ голоморфны в T, $\overline{T}$ соответственно, причем их можно подчинить условию

$$\varphi_1(0)=\varphi_1^*(0) \tag{2.16}$$

Уравнение (2.13), которое представляет собой интегральное уравнение типа Вольтерра в комплексной области, можно решить методом последовательных приближений, причем решение $V(z,\zeta)$ всегда существует и является аналитической функцией двух комплексных переменных z,ζ в области $(z\in T,\ \zeta\in\overline{T})$; это решение, очевидно, содержит четыре произвольные голоморфные функции $\varphi_0(z)$, $\varphi_0^*(\zeta)$, $\varphi_1(z)$, $\varphi_1^*(\zeta)$, которые, как уже было сказано выше, можно подчинить условиям (2.9), (2.16). Если в найденном решении $V(z,\zeta)$ аргументы z,ζ заменим через $\xi+i\eta$, $\xi-i\eta$ соответственно, то получим функцию V двух действительных переменных ξ, η, при помощи которой по формулам (1.6) легко выразим искомые функции Φ, w.

Замечание. В конкретных случаях при решении интегрального уравнения (2.13) надо учитывать степень пологости оболочки и в выражениях функций K_1, K_2, K_0, Z_0 и U_0 следует отбрасывать несуществующие малые члены, помня, что мы оперируем с приближенными уравнениями и, следовательно, не имеет смысла искать их точные решения. Вообще, повидимому, в выражениях операторов ∇ и Δ не учтены в полной мере пологость оболочки; это станет очевидным при рассмотрении уравнений сферической оболочки.

§ 3. Сферическая оболочка. В случае сферической оболочки $k_1=k_2=1/R=\text{const}$, где R — радиус сферы. Тогда уравнение (1.5), как видно из (1.3), примет вид

$$\nabla^2\left(\nabla^2 V-\frac{i\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\delta R}V\right)=\frac{Z}{D} \tag{3.1}$$

На сфере в качестве координат ξ, η можно взять $\xi=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\cos\varphi$, $\eta=\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\sin\varphi$, где θ, φ — географические координаты точки, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. Тогда оператор ∇^2 принимает вид

$$\nabla^2=\frac{(1+\xi^2+\eta^2)^2}{4R^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)=\frac{(1+z\zeta)}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta}\qquad\begin{pmatrix}z=\xi+i\eta\\ \zeta=\xi-i\eta\end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Учитывая пологость оболочки, можно положить

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta\approx\frac{1}{2}\theta,\qquad 1+\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta\approx 1,\qquad z=\frac{1}{2}\theta e^{i\varphi} \tag{3.3}$$

Следовательно,

$$\nabla^2=\frac{1}{4R^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)=\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta} \tag{3.4}$$

Поэтому уравнение (3.1) принимает вид

$$\Delta\left(\Delta-\frac{4iR\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\delta}\right)V=\frac{16R^4z}{D}\qquad\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\zeta}\right) \tag{3.5}$$

Это уравнение иным путем получено Е. Рейснером [6]; другой вывод его дан также в нашей работе [4]. Общее решение уравнения (3.5), очевидно, имеет вид

$$V=V_0+V_1+V_2 \tag{3.6}$$

где V_0 — некоторое частное решение его, а V_1 и V_2 — произвольные решения уравнений

$$\Delta V_1=0,\qquad \Delta V_2-\frac{4iR\sqrt{12(1-\nu^2)}}{\delta}V_2=0 \tag{3.7}$$

Следовательно, имеем (см. нашу работу [5])

$$V_1=\Phi_0(z)+\Phi_0^*(\bar z)$$

$$V_2=a_0I_0(k\theta)+\int_0^1\left[z\Phi_1(zt)+\bar z\Phi_1^*(\bar z t)\right]I_0\left(k\theta\sqrt{1-t}\right)dt \tag{3.8}$$

$$\left(k=\sqrt{i}\sqrt{\rho\frac{R}{\delta}}\qquad\rho=\sqrt{12(1-\nu^2)},\qquad z=\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\right)$$

где a_0 — произвольная постоянная, Φ_1, Φ_1^* — произвольные голоморфные функции, I_0 — функция Бесселя нулевого порядка с мнимым аргументом. Подставляя (3.8) в (3.6), получим общее выражение для V через четыре голоморфные функции.

§ 4. Круговая цилиндрическая оболочка. В этом случае $k_1 = 0$, $k_1 = 1/R = \text{const}$. Полагая $Z = 0$, уравнение (1.5) приведем к виду

$$\triangle\triangle V - \frac{i\rho}{R\delta}\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2} = 0 \qquad \left(\triangle = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}, \quad \rho = \sqrt{12(1-\nu^2)}\right) \tag{4.1}$$

Это уравнение можно представить также в виде

$$\left(\triangle - 2k\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left(\triangle + 2k\frac{\partial}{\partial\xi}\right)V = 0 \qquad \left(k = \frac{\sqrt{i\rho}}{2\sqrt{R\delta}}\right) \tag{4.2}$$

Общее решение этого уравнения, как легко можно доказать, имеет вид $V = V^{(1)} + V^{(2)}$ где $V^{(1)}$ и $V^{(2)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\triangle V^{(1)} - 2k\frac{\partial V^{(1)}}{\partial\xi} = 0, \qquad \triangle V^{(2)} + 2k\frac{\partial V^{(2)}}{\partial\xi} = 0 \tag{4.3}$$

Пусть $V^{(1)} = e^{k\xi}\psi_1$, $V^{(2)} = e^{-k\xi}\psi_2$ Тогда легко видеть, что ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют уравнению

$$\triangle\psi - k^2\psi = 0 \qquad \left(k^2 = \frac{i\sqrt{12(1-\nu^2)}}{4\delta R}\right) \tag{4.4}$$

Общее решение уравнения (4.6) можно записать в виде [5]

$$\psi = a_0 I_0(kr) + \int_0^z I_0\left(k\sqrt{\zeta(z-t)}\right)\Phi(t)\,dt + \int_0^\zeta I_0\left(k\sqrt{z(\zeta-\tau)}\right)\Phi^*(\tau)\,d\tau \tag{4.5}$$

где a_0 — любая постоянная, $\Phi(z)$, $\Phi^*(\zeta)$ — любые голоморфные функции, $r = |z|$, $z = \xi + i\eta$, $\zeta = \xi - i\eta$

Поступила в редакцию
29 X 1947

Математический институт Академии
Наук Грузинской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Комплексное представление решений эллиптических дифференциальных уравнений и его применения к граничным задачам. Труды Тбилисского математического института. 1939. Т. VII.
2. Власов В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ. 1944. Т. VIII. Стр. 109—140.
3. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. ОНТИ. 1935.
4. Векуа И. Н. Интегрирование уравнений сферической оболочки. ПММ. 1945. Т. IX.
5. Векуа И. Н. К теории цилиндрических функций. Сооб. АН Гр. ССР. 1946. Т. VII.
6. Reissner E. Stress and Small Displacements of Shallow Spherical Shells. Jour. Math. and Physiks. 1946. Vol. XXV. Nr. 1.