Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XII, 1948

ПРИНЦИП ПРЕДЕЛЬНОЙ НАПРЯЖЕННОСТИ

С. М. Фейнберг

(Москва)

Независимо от классического направления в математической теории пластичности, исходящей из соотношений Генки—Мизеса между напряжениями и даформациями, может быть развит метод решения задачи прочности течения пластических тел, исходящий из давно известных в строительной механике представлений, называемых методом предельного равновесия. На этих представлениях построены современные методы расчета сооружений по стадии разрушения. Развитие этого метода и приложение его в значительной мере обязано работам А. А. Гвоздева [1], [2]. Модификация этих идей приводит к принципу предельной напряженности, решающему задачу прочности и пластического течения, не привлекая к рассмотрению какой-либо специальной гипотезы о связи между напряжениями и деформациями. Мы ограничимся рассмотрением идеально пластических тел, прочность которых подчиняется закону Мизеса.

Кроме того, везде в дальнейшем рассматривается случай малых деформаций тела при условии, что потеря устойчивости не имеет места.

Заметим, что область приложения принципа предельной напряженности распространяется на все идеально пластические тела, подчиняющиеся любым законам прочности.

1. При заданной системе внешних сил, действующих на тело, в гиперстатическом теле возможно, вообще говоря, бесконечное множество напряженных состояний, удовлетворяющих условиям равновесия в каждой точке тела и условиям регулярности (дифференцируемости компонентов напряженного состояния). Совокупность этих возможных (регулярных) напряженных состояний обозначим L. Каждое из этих возможных напряженных состояний определяет напряженность в любой точке тела. Последняя, описывается тензором напряженности $\mathbf{T}$.

Как указано, составляющие тензора $\mathbf{T}$ в каждой точке тела (включая границу) удовлетворяют условиям равновесия, т. е. внутри тела

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + F_x = 0 \qquad (x,\ y,\ z) \tag{1.1}$$

и на границе тела

$$X_x \cos(xn) + X_y \cos(yn) + X_z \cos(zn) + F_{nx} = 0 \qquad (x, \tag{1.2}$$

где $(x,\ y,\ z)$ — символ циклической перестановки для получения остальных формул, $F_x,\ F_y,\ F_z$ — составляющие массовых сил по осям координат, а F_{nx}, F_{ny}, F_{nz} — составляющие поверхностных сил и n — направление нормали к поверхности, ограничивающей тело.

2. Очевидно, что в пластическом теле напряженность T не может быть произвольной. Она подчиняется условиям прочности, которые для пластического материала примем по Мизесу:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(X_x - Y_y)^2 + (X_x - Z_z)^2 + (Y_y - Z_z)^2 + 6(X_y^2 + X_z^2 + Y_z^2)} \leqslant k \qquad (2.1)$$

где k — константа материала в данной точке тела; здесь σ_i называется интенсивностью напряженного состояния в данной точке тела.

Так как для сохранения пластическим телом прочности необходимо выполнение условий прочности в каждой точке тела, то не всякое из числа возможных напряженных состояний может иметь место на самом деле.

Назовем допустимым напряженным состоянием такое возможное напряженное состояние, которое в каждой точке удовлетворяет условиям прочности. Необходимым критерием прочности данного тела при данной системе внешних сил будет условие существования хотя бы одного допустимого напряженного состояния. Содержание принципа предельной напряженности сводится к тому, что это необходимое условие прочности пластического тела признается достаточным.

Принцип предельной напряженности эквивалентен гипотезе о неограниченности возможности перераспределения напряженного состояния вследствие проявления свойства пластичности материала. Принцип предельной напряженности формулируется следующим образом: Если в теле при данной нагрузке существует некоторая совокупность допустимых напряженных состояний, то одно из них реализуется на самом деле.

3. Введем понятие коэффициента нагрузки λ. При умножении на λ действующей на тело нагрузки составляющие тензора напряженности **T** и интенсивность напряженности σ_i также умножаются на λ в силу линейности выражений (1.1) и (1.2).

Таким образом, мы можем рассматривать семейство напряженных состояний λL и соответствующих им нагрузок λF, внутри которого каждое напряженное состояние отличается от другого (также принадлежащего данному семейству) лишь на числовой множитель. Для данного семейства возможных напряженных состояний λL существует максимальное значение числа λ, определяемое условием

$$\max \lambda\sigma_i(L) \leqslant k \qquad (3.1)$$

выделяющее из рассматриваемых λL возможных напряженных состояний совокупность напряженных состояний λL, где $\lambda \leqslant \max \lambda$, каждое из которых допустимо в смысле п 2. Здесь $\sigma_i(L)$ не зависит от λ. Из (3.1) следует вследствие регулярности L и непрерывности (2.1), что

$$\max \lambda = \frac{k}{\max \sigma_i(L)} = \min \frac{k}{\sigma_i(L)} \qquad (3.2)$$

где L — некоторое данное возможное напряженное состояние. (Второе выражение относится к случаю переменного k.)

4. Задача прочности пластического тела, находящегося под действием заданной системы внешних сил, сводится к определению такого предельного значения коэффициента λ_0, при достижении которого тело утрачивает прочность, т. е. при $\lambda > \lambda_0$ оно утрачивает прочное равновесие.

Величина λ_0 может быть названа коэффициентом прочности.

Согласно принципу предельной напряженности n2 для данной системы внешних сил F значение λ_0 определится как

$$\lambda_0 = \sup \max \lambda = \sup \min \frac{k}{\sigma_i(L)} = \sup f(L) \tag{4.1}$$

где sup — верхняя граница возможных значений функционала

$$f(L) = \min \frac{k}{\sigma_i(L)} \tag{4.2}$$

причем L рассматривается здесь как произвольное напряженное состояние из числа возможных.

В самом деле, если $\lambda < \lambda_0$, то найдется по крайней мере одно допустимое напряженное состояние; наоборот, если $\lambda > \lambda_0$, то не найдется ни одного допустимого напряженного состояния. Из последнего и принципа предельной напряженности n2 следует требуемое.

Таким образом задача прочности псевдо-упругого тела может быть сведена к исследованию некоторого функционала (4.2).

Существование максимума (или верхней границы) у функционала $f(L)$ может быть легко доказано при условиях, когда $k \neq 0$ и величины $X_x - Y_y$, $X_x - Z_z$, $Y_y - Z_z$, X_y, X_z, Y_z одновременно не все равны нулю во всех точках рассматриваемого тела. Тем самым определяется существование предельного напряженного состояния. Наоборот, проблема единственности предельного напряженного состояния, т. е. отсутствие у $f(L)$ более чем одного максимума оказывается сложной.

5. Напряженное состояние L_0 такое, что

$$\lambda_0 = \min \frac{k}{\sigma_i(L_0)} \qquad \left(\lambda_0 = \frac{k}{\max \sigma_i(L_0)} \quad \text{при} \quad k = \text{const}\right)$$

естественно назвать предельным напряженным состоянием. Важно заметить, что последнее может и не быть возможным напряженным состоянием в смысле n 1, т. е. предельное напряженное состояние может и не быть регулярным (например непрерывным).

На основании (4.1) предельное напряженное состояние может быть определено как такое возможное напряженное состояние (или как предел последовательности возможных напряженных состояний), при котором выражение $\sigma_i(L)$ (или $\sigma_i(L)/k$ при k — переменном) наименее уклоняется от нуля в заданной области изменения аргументов. Следует заметить что И. Я. Штаерман [3], повидимому, впервые указал на связь между задачей прочности и функциями, наименее уклоняющимися от нуля.

6. Необходимые и достаточные условия предельности данного напряженного состояния L_0 в малом (локальные условия) заключаются в том, что вариации функционала $f(L) = \min k/\sigma_i(L)$ подчиняются условиям

$$\delta f(L_0) = 0 \qquad \delta^2 f(L_0) < 0 \tag{6.1},$$

Так как, с другой стороны, предельное напряженное состояние L_0 определяется как такое, которое на совокупности возможных напряженных состояний L реализует функцию интенсивности напряженности σ_i, наименее уклоняющейся от нуля, то критерий, выделяющий функцию, наименее уклоняющуюся от нуля в малом, будет заключаться в том, что на совокупности точек пластического течения (хотя бы для одной из точек r)

$$\delta\sigma_i(L_0,\ r) > 0, \qquad \sigma_i(L_0,\ r) = k \tag{6.2}$$

при любых из числа возможных δL; при этом предполагается, что совокупность точек пластического течения преобразует тело в механизм.

Основываясь на критерии предельности данного напряженного состояния, можно доказать следующие предложения. Совокупность точек текучести в теле, находящемся в предельном напряженном состоянии:

a) не может быть совокупностью изолированных точек;

b) не может быть поверхностью; следовательно, совокупность точек текучести образует область — область текучести.

Предельное напряженное состояние, при котором область текучести охватывает все тело, будем называть выполненным.

7. Для приложения имеет значение следующая теорема: если в пластическом теле, находящемся в равновесии под действием системы внешних сил, удалить какие-либо лишние связи, так, чтобы после их удаления тело по крайней мере осталось статически определимым, то коэффициент прочности трансформированного таким образом тела будет не больше коэффициента прочности исходного тела:

$$\lambda_0' \leqslant \lambda_0$$

В самом деле, удаление лишних связей означает наложение некоторых дополнительных ограничений на компоненты тензора $\mathbf{T}$ во всех точках тела или в его части. Таким образом совокупность возможных напряженных состояний для трансформированного тела вся принадлежит совокупности возможных напряженных состояний исходного тела. Отсюда и из определения $\lambda_0 = \sup f(L)$ следует искомый результат.

Следствием предыдущей теоремы является, что если добавить связи к данному телу, то коэффициент прочности λ_0^* трансформированного тела будет не меньше коэффициента прочности λ_0 исходного тела:

$$\lambda_0 \leqslant \lambda_0^*$$

8. В качестве одного из возможных методов эффективного вычисления приближенных значений λ_0 может быть указан следующий:

Рассмотрим какое-либо n-параметрическое семейство возможных напряженных состояний L_1. Вычислим величину $\lambda_0' = \max f(L_1)$.

Так как это L_1 всегда принадлежит всей совокупности возможных напряженных состояний L, то $\lambda_0' \leqslant \lambda_0$.

Таким образом λ_0' есть приближение снизу к λ_0. Рассматривая $n+1$ параметрическое семейство возможных напряженных состояний L_2, включающее в себя предыдущее, можно найти второе приближение снизу λ_0'' и так далее:

$$\lambda_0' \leqslant \lambda_0'' \leqslant \ldots \leqslant \lambda_0 \tag{8.1}$$

Таким образом можно построить последовательность приближений снизу к λ_0. Однако при этом вопрос о возможной погрешности какого-либо приближения остается открытым. Поэтому приобретает большое значение метод оценки λ_0 сверху. В качестве метода для получения оценки для λ_0 сверху можно воспользоваться понятием упрочненного тела.

Если L есть предельное напряженное состояние для упрочненного тела, получаемого из данного умножением константы прочности k в каждой точке тела на число $\varkappa > 1$, то коэффициент прочности ζ для последнего больше коэффициента прочности λ_0 исходного тела:

$$\zeta > \lambda_0 \tag{8.2}$$

В самом деле, это утверждение есть следствие теоремы п 7. Таким образом можно получить последовательность приближений к λ_0 сверху.

9. Можно несколько изменить приведенный выше метод оценки, используя идеи, развитые А. А. Гвоздевым в теории расчета сооружений по стадии разрушения. Зададимся некоторой совокупностью точек пластического течения, которая преобразует данное тело в подвижную систему. Наложим во всех остальных точках тела дополнительные связи упрочнения, полагая в них $k \to \infty$. Кроме того, можно наложить дополнительные связи упрочения и на совокупность точек пластического течения, умножив на них действительное значение k на коэффициент $\varkappa > 1$. Если вычислить коэффициент прочности λ_0^* для упрочненного таким образом тела (для чего необходимо рассмотреть некоторое возможное напряженное состояние исходного тела, которое окажется предельным для трансформированного тела), то λ_0^* согласно следствию теоремы п 7 будет не меньше λ_0, т. е. будет оценкой сверху (которая в предыдущем обозначена через ζ) для λ_0 исходного тела:

$$\lambda_0 < \lambda_0^* = \zeta$$

10. Дифференциальные уравнения текучести могут быть получены сведéнием задачи к вариационной проблеме следующим образом.

В области пластического течения[1]

$$\sigma_i^2 = k^2$$

С другой стороны, в предельном напряженном состоянии функция $\sigma_i^2(L)$ согласно п 5 наименее уклоняется от нуля. Таким образом задачу можно сформулировать так: для предельного напряженного состояния в области пластического течения напряженное состояние L должно удовлетворять уравнениям равновесия (1.2) и условию

$$\sigma_i^2(L) = c^2 = \text{const}$$

При этом L надо выбрать таким, чтобы реализовать минимум для c^2.

Составим теперь интеграл

$$I_L = \int_g \sigma_i^2(L)\, d\omega = c^2 \int_g d\omega$$

распространенный на всю область пластического течения g.

[1] Для упрощения рассуждений полагаем k=const; обобщение на случай переменного k не составляет затруднений.

Легко видеть, что вместе с достижением c^2 минимального значения и I_L также достигает минимума.

Итак, мы пришли к вариационной проблеме с голономными связями

$$I = \min \int_g \sigma_i^2(L)\, d\omega \tag{10.1}$$

при условиях, что $\sigma_i^2(L) - c^2 = 0$ и составляющие напряженного состояния удовлетворяют уравнениям равновесия (1.2). Введем функцию Лагранжа

$$F^* = \sigma_i^2 + \nu(\sigma_i^2 - c^2) + \sum_{n=1}^{n=3} \nu_n R_n \tag{10.2}$$

где ν, ν_1, ν_2, ν_3—множители Лагранжа, функции от координат, а через R_n для краткости обозначены левые части уравнений равновесия (1.1).

Уравнения Эйлера будут иметь вид

$$\begin{aligned} &(1+\nu)\left[6X_x - (X_x + Y_y + Z_z)\right] - \frac{\partial \nu_1}{\partial x} = 0 \\ &(1+\nu)\, 6X_y - \frac{\partial \nu_1}{\partial y} - \frac{\partial \nu_2}{\partial x} = 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x, & y, & z \\ 1, & 2, & 3 \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

(остальные уравнения получаются циклической перестановкой x, y, z и 1, 2, 3). Таким образом, для области текучести в предельном напряженном состоянии получаем три уравнения равновесия, одно уравнение прочности и шесть уравнений Эйлера, содержащие десять неизвестных.

11. Пользуясь уравнениями текучести п 10, можно построить решения, которые дают хорошие результаты в приложениях.

Система уравнений текучести нелинейна, что составляет главную трудность при ее исследовании. Однако она может быть значительно упрощена и даже линеизирована, если заменить заданный закон прочности Мизеса каким-либо другим, например, кусочно-линейным. (Закон прочности Мизеса изображается шаровой поверхностью в системе координат σ_1, σ_2, σ_3. Эту шаровую поверхность можно заменить вписанными и описанными многоугольниками.) В некоторых случаях, важных для приложений, система уравнения текучести становится линейной.

Основываясь на теореме 7, можно утверждать, что коэффициенты прочности λ_0, вычисленные для каких-либо «вписанного» и «описанного» законов прочности, будут соответственно меньше и больше искомого. При этом возможная ошибка заранее известна. Оказывается, что в некоторых важных для приложений случаях возможная ошибка не велика уже для первого приближения к заданному закону прочности.

Поступила в редакцию
23 II 1944

ЛИТЕРАТУРА

1. Гвоздев А. А. Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределенных систем. Проект и стандарт. 1934. № 8.
2. Гвоздев А. А. Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации. Труды Конференции по пластическим деформациям ОТН АН СССР. 1936.
3. Штаерман И. Я. Применение современных методов апроксимации функций в строительной механике и математической физике. Изв. ОТН АН СССР. 1939. № 1.